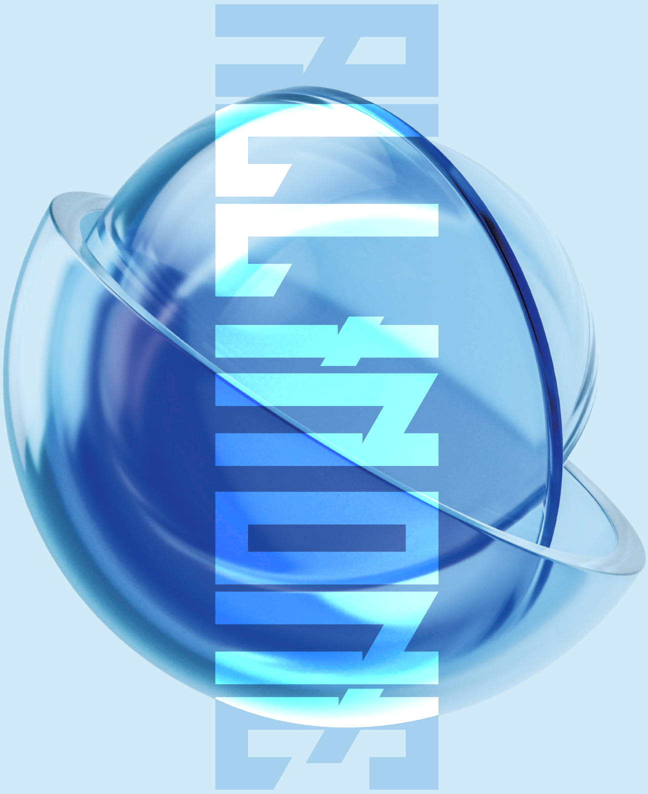
| 채수용 지음 |

개념 X 공식 X 스킬을 모두 담았다

ALL IN ONE

수학 상/하 + 수1 + 수2



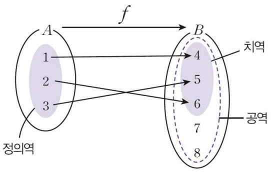
개념 X 공식 X 스킬을 모두 담았다

ALL IN ONE

| 채수용 지음 |

1 함수는 방향성이 존재한다.

대응의 출발이 되는 집합을 정의역 X라 하고, X에 대응되는 Y집합을 공역이라 한다. 공역의 부분집합 중 함숫값을 원소로 갖는 집합을 치역이라 한다.



함수는 그 대응의 방향성이 존재한다. 어떤 집합에서 어떤 집합으로 대응하는지를 확인해야 한다.
X집합에서 Y집합으로 함수라는 이름을 붙일 수 있어도
Y집합에서 X집합으로 함수가 아닐 수도 있다.
어디서 어디로 대응되는지를 확인해야 한다.

관찰의 제 1순위는 정의역이다. 모든 함수 문제는 관찰하고자 하는 함수의 출발점 즉, 정의역에 대한 관찰이 중요하다.

2 함수의 표현과 읽는 법

① 함수의 표현
$f(x)=2x+1$
$f: x \to 2x+1,\ A \to B$

② $f(★)$의 독해
제시된 함수에 정의역에 ★이 대응되었을 때 함숫값

$f(x)=x^2+1$ 에서 $f(x-2)$는?

$f(x)=x^2+1$는 '명령어' 라고 생각하자. x라는 문자에 함몰되지 말자. 그냥, $f(★)=★^2+1$처럼 무엇을 넣고 무엇이 나오는지 관찰하자.

$$f(x-2)=(x-2)^2+1$$

$f(x)+xf(1-x)=1+x$일 때 $f(x)$는?

x에 $(1-x)$를 대입하여 나온 식과 처음 식을 연립하여 $f(x)$를 직접 구해낸다.

$f(x)+xf(1-x)=1+x \quad \cdots ①$

에서 x대신 $1-x$를 대입하면

$f(1-x)+(1-x)f(x)=2-x \quad \cdots ②$

$① - ② \times x$하면

$f(x)-x(1-x)f(x)=1+x-x(2-x)$

$\therefore\ (x^2-x+1)f(x)=x^2-x+1$

$x^2-x+1>0$이므로 $f(x)=1$

3 함수의 분류

1. 대칭성에 따른 분류

① 우함수
y축 대칭 $f(x)=f(-x)$
다항함수일 때 짝수차항 또는 상수만 있다.
(예) $y=x^2+5$

② 기함수
원점 대칭 $f(x)=-f(-x)$
다항함수일 때 홀수차항만 있다.
(예) $y=x^3+3x$

※ 연산에 대한 대칭성

$f(x)$	$g(x)$	⇨	$f(x)\pm g(x)$	$f(x)g(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$(f\circ g)(x)$
우	우		우	우	우	우
우	기			기	기	우
기	우			기	기	우
기	기		기	우	우	기

★ 속함수가 우함수면 합성함수는 무조건 우함수이다.

함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 라 하면 $g(x)$는 우함수이다.

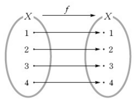
$g(x)$에서 x대신 $-x$를 대입해 보면
$g(-x)=f(-x)+f(x)$임을 확인할 수 있다.
따라서 $g(x)=g(-x)$이다.
이때, $g(x)$, $f(x)$가 다항함수라면
$g(x)$는 $f(x)$에서 홀수차항을 없애고 짝수차항만 계수 2배한 함수가 된다.
$f(x)=x^3+2x^2+x+3$이면 $g(x)=4x^2+6$

함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)-f(-x)$ 라 하면 $g(x)$는 기함수이다.

$g(x)$에서 x대신 $-x$를 대입해 보면
$g(-x)=f(-x)-f(x)$임을 확인할 수 있다.
따라서 $g(x)=-g(-x)$이다. 이때, $g(x)$, $f(x)$가 다항함수라면 $g(x)$는 $f(x)$에서 짝수차항을 없애고 홀수차항만 계수 2배한 함수가 된다.
$f(x)=x^3+2x^2+x+3$이면 $g(x)=2x^3+2x$

2. 치역의 상태에 따른 분류

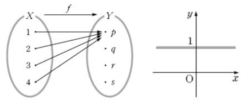
① 항등함수 : 정의역의 원소가 자기 자신에게로 대응되는 함수
$X=Y$이고 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x)=x$



$X=\{-1,1\}$ 일 때, $f: x \to x^3,\ X \to X$

항등함수이다. $f: X \to X,\ x \to x$만 항등함수로 생각하면 안 된다. 주어진 정의역에 따라
$f(x)=x,\ f(x)=x^3\ \cdots$ 여러 모양의 함수가 항등함수가 될 수 있다.

② 상수함수: $f(x)$의 치역이 하나의 원소로만 이루어진 함수



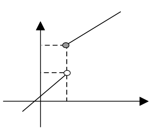
$X=\{-1,1\}$ 일 때, $f: x \to x^2,\ X \to X$

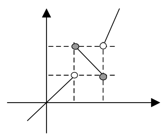
상수함수이다. $f: x \to k,\ X \to X$만 상수함수로 생각하면 안 된다. 주어진 정의역에 따라 여러 모양의 함수가 상수함수가 될 수 있다.

③ 일대일함수 : $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$
y값 하나에 x값 하나 이렇게 문장으로 기억하자.

④ 일대일대응 : 일대일함수 중 치역과 공역이 같은 함수

※ 일대일 함수 및 일대일대응함수 그래프에서 판단
: x축과 평행한 임의의 직선이 그래프와 오직 한 점에서 만날 때 → 일대일함수
: x축과 평행한 임의의 직선이 그래프와 오직 한 점에서 만나며 치역과 공역이 같을 때 → 일대일대응 함수

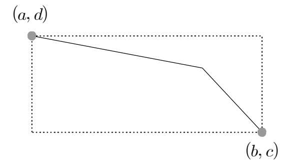

일대일함수


일대일대응함수

※ 일대일대응함수가 되는 조건의 판단

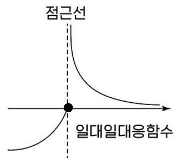
① 구간 내 모든 실수에서 일대일대응함수

1) 연속함수(끊어져 있는 점이 없다.)
단 한 번이라도 함수의 증가와 감소가 바뀌면 일대일대응이 될 수 없다. 따라서 한번 증가하면 계속 증가, 한 번 감소하면 계속 감소한다.



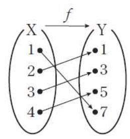
정의역 $a \le x \le b$, 치역 $c \le y \le d$인 함수의 그래프
★ 만약 $X \to X$ 에서 정의된 함수 $f(x)$가 일대일 대응함수라면, 정사각형의 대각선 방향 꼭지점을 그래프가 지나야한다.

2) 불연속함수(끊어져 있는 점이 있다.)
구간별로 함수가 정의되어야 한다. 증가, 감소가 변한다.
불연속이어도 일대일대응일 수 있다!



② 유한개 정의역에서 일대일대응함수 정의
1) 좌표평면 위에 '점'을 표시한다.
2) 두 집합을 도식화 하여 표현한다.

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 함수 f는 X에서 Y로의 일대일대응이고
$f(2)=1,\ f(1)-f(3)=4$
일 때, $f(3)+f(4)$의 값은?



$f(1)-f(3)=4$을 만족시키려면
$f(1)=5,\ f(3)=1$ 또는 $f(1)=7,\ f(3)=3$
이어야 한다. 이때 $f(2)=1$이고 f가 일대일대응이므로
$f(3)\neq 1$ 따라서 $f(1)=7,\ f(3)=3$이고 $f(4)=5$
$\therefore\ f(3)+f(4)=3+5=8$

※ 함수의 상등
두 함수 f, g에 대하여
- 정의역끼리, 공역끼리 서로 각각 같다.
- 정의역의 각 원소에 대하여 $f(x)=g(x)$ 일 때, 두 함수 f와 g는 서로 같다고 하고, 기호로 $f=g$와 같이 나타낸다.
- 두 함수의 식이 서로 같아도 정의역이 다르면 다른 함수이다.
- 두 함수의 식이 서로 달라도 두 함수는 서로 같을 수 있다.

집합 X를 정의역으로 하는 두 함수
$f(x)=x^3,\ g(x)=x^2+2x$
가 서로 같도록 하는 집합 X의 부분집합 A의 개수는?
(단 집합 A는 공집합이 아니다.)

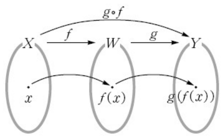
서로 같도록 하는 집합 X는
방정식 $f(x)=g(x)$의 해집합이다.
따라서 $x^3=x^2+2x$
$x^3-x^2-2x=x(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ X=\{-1,0,2\}$
따라서 부분집합 A의 개수는 $2^3-1=7$개 이다.

4 합성함수 정의와 성질

1. 정의

두 함수 $f: X \to Z$, $g: Z \to Y$에 대하여 집합 X의 각 원소 x에 집합 Z의 원소 $f(x)$를 대응시키고 다시 이 $f(x)$에 집합 Y의 원소 $g(f(x))$를 대응시켜 X의 각 원소 x에 집합 Y를 대응시키는 함수

⇨ $g \circ f: X \to Y$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



2. 성질 : 세 함수 f, g, h 에 대하여

① $f \circ g \neq g \circ f$ 교환법칙이 성립하지 않는다.

② $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ 결합법칙이 성립한다.

③ $I \circ f = f \circ I = f$ (단 I 는 항등함수)

④ $f(x) = x + b$ 에 대하여

$$\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \cdots\cdots \circ f)}_{n\text{개}}(x) = x + bn$$

⑤ $g(x) = ax$일 때

$$\underbrace{(g \circ g \circ g \circ \cdots\cdots \circ g)}_{n\text{개}}(x) = a^n x$$

⑥ $f(x) = ax^n + \cdots$ 에 대하여

$$\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \cdots\cdots \circ f)}_{m\text{개}}(x) = a^{n^{m-1}+n^{m-2}+\cdots+1} x^{n^m} \cdots$$

최고차항의 계수가 2인 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(f(f(x)))}{x^m} = \alpha \ (\alpha \neq 0)$$

일 때, 두 상수 m과 α를 구하시오.

이렇게까지 나오지는 않겠지만 연습으로 합성했을 때 최고차항의 계수와 차수가 어떻게 변하는지 확인합시다.

$f(x)$의 최고차항만 따지면 $f(x) = 2x^3 + \cdots$ 따라서

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^{3^2+3^1+1} \times x^{3^3}}{x^m} = \alpha \ (\alpha \neq 0)$$

$m = 27$, $\alpha = 2^{13}$

5 합성함수의 개수

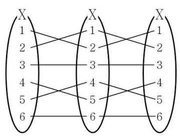
① $(f \circ f)(x) = x$인 함수 $f(x)$의 개수

f가 일대일대응일 때,

$f: \{1, 2, 3, \cdots, n\} \to \{1, 2, 3, \cdots, n\}$

모든 x에 대하여 $(f \circ f)(x) = x$를 만족하는 경우의 수는 − 자 또는 X 자로 대응시키는 방법의 수를 구하면 된다.

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 $f: X \to X$라 할 때, $f(f(x)) = x$를 만족하는 함수 f의 개수는?



(예시)

정답 : 76가지

X의 개수에 따라 분류를 시작한다.

1) X: 0개 ⇨ 1가지

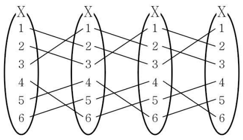
2) X: 1개 ⇨ ${}_6C_2$ 15가지

3) X: 2개 ⇨ ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times \frac{1}{2!}$ 45가지

4) X: 3개 ⇨ ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!}$ 15가지

② $(f \circ f \circ f)(x) = x$

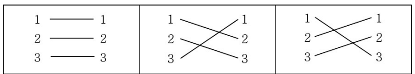
집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 $f: X \to X$라 할 때, $f(f(f(x))) = x$를 만족하는 함수 f의 개수는?



(예시)

정답 : 81가지

3번 거쳐서 자기 자신을 찍어야 한다. 3개 한 세트



모두 − 자	한 칸 밀리는(?) 느낌

1) 모두 − 자 : 1가지

2) 세트 1개 : ${}_6C_3 \times 2 = 40$ 가지

3) 세트 2개 : ${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \times 2 \times 2 = 40$

③ $(g \circ f)(x) = x$인 함수 $f(x)$의 개수

f와 g가 각각 일대일대응이고,

$f: \{1, 2, 3, \cdots, n\} \to \{1, 2, 3, \cdots, n\}$

$g: \{1, 2, 3, \cdots, n\} \to \{1, 2, 3, \cdots, n\}$

중에서 모든 x에 대하여 $g(f(x)) = x$를 만족하는 경우의 수는 $n! \times n!$

6 합성함수가 포함된 항등식

주어진 구간내 모든 실수 x

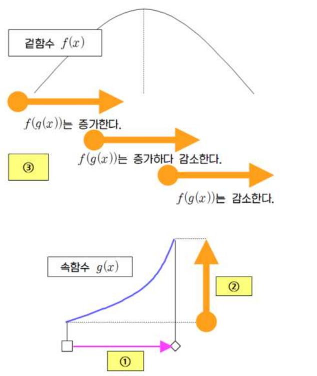
① $f(g(x)) = x$라면 $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이다.

② $f(g(x)) = f(x)$라고 $g(x) = x$ 인 것은 아니다.

(반례) $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$

③ $f(g(x)) = h(x)$일 때 함수 $h(x)$의 최대최소 구하기

겉함수와 속함수를 분리하고, ① → ② → ③ 순으로 파악한다.



증가 ∘ 증가 = 증가 / 감소 ∘ 증가 = 감소

증가 ∘ 감소 = 감소 / 감소 ∘ 감소 = 증가

7 합성함수가 포함된 방정식 ★★★★★

1. 방정식 $f(g(x)) = k$

① $g(x) = t$라고 치환하여

② $f(t) = k$의 실근을 구한다.

③ $g(x) = t$의 실근을 구한다.

2. 방정식 $f(f(x)) = f(x)$

① $f(x) = t$로 치환한다.

② $f(f(x)) = f(x)$ ⇨ t에 대한 방정식 $f(t) = t$부터 푼다.

③ x에 대한 방정식 $f(x) = t$를 푼다.

3. 방정식 $f(f(x)) = x$

① $f(f(x)) = x$의 한 실근을 α라고 가정하면 $f(f(\alpha)) = \alpha$이다.

② 이때, $f(\alpha) = \beta$라고 하면 $f(\beta) = \alpha$이므로 두 가지 케이스 $\alpha = \beta$ 인 경우 / $\alpha \neq \beta$인 경우로 나눠 생각한다.

③ $\alpha = \beta$인 경우 $f(\alpha) = \alpha$이므로 $y = f(x)$와 $y = x$의 교점을 찾는다.

④ $\alpha \neq \beta$인 경우 (α, β), (β, α)해의 순서쌍이 생긴다.

$y = f(x)$를 $y = x$에 대하여 대칭이동한 뒤, $y = f(x)$와의 교점을 찾는다.

4. 그 외 $f(f(x)) = f(x) - k$등의 방정식 풀이는 치환을 기본으로 문제에 접근하자.

8 합성함수 그래프 그리기 (직선만 있을 때)

1. 주어진 두 함수가 직선의 형태일 때 기본기

① 직선은 합성해도 직선이 된다.

② 꺾인 점은 합성해도 꺾인 점이 된다.

③ 시작점과 끝점을 합성해도 각각 시작점과 끝점이 된다.

2. $y = f(g(x))$의 그래프를 그리는 방법

① 주어진 두 함수 $f(x), g(x)$의 그래프를 그려놓고 시작한다.

② 속함수 $g(x)$의 시작점, 끝점, 꺾인 점의 x좌표를 찾아서 $y = f(g(x))$에 대입하여 그때의 y좌표를 찾는다.

③ 방정식

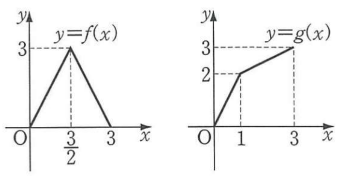
$f(x)$의 꺾인 점의 x좌표 $= g(x)$

의 x좌표를 구해서 $y = f(g(x))$에 대입하여 그때의 y좌표를 찾는다.

④ 구한 점 $(x, f(g(x)))$를 좌표평면에 찍는다.

⑤ 구해진 모든 점들을 직선으로 연결한다.

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $y = (g \circ f)(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 그려라.



① $f(x)$의 시작점과 끝점 꺾인 점의 $x = 0, \frac{3}{2}, 3$

② $g(f(0)) = g(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

$g\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = g(3) = 3 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, 3\right)$

$g(f(3)) = g(0) = 0 \Rightarrow (3, 0)$

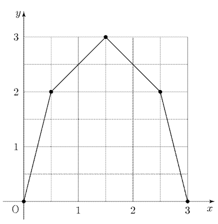
③ $g(x)$의 꺾인 점의 $x = 1$

$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 1 \end{cases}$ 의 교점의 x좌표는 $x = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$

④ $g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = g(1) = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

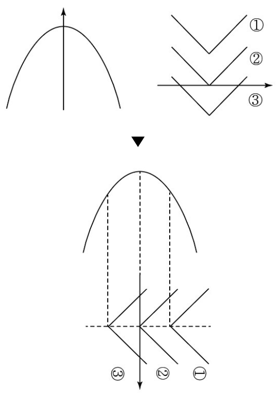
$g\left(f\left(\frac{5}{2}\right)\right) = g(1) = 2 \Rightarrow \left(\frac{5}{2}, 2\right)$

이제, ②, ④에서 구한 점들을 좌표평면에 모두 표시하고 점들을 직선으로 연결하면 원하는 그래프가 그려진다.

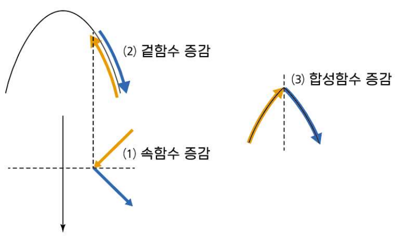


9 합성함수 그래프 그리기 (N축)

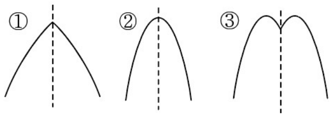
1. 구간별 함수를 직접 찾는다.
2. 새로운 축을 도입한다.
   1) 속함수의 그래프를 시계방향으로 90° 회전하여 겉함수의 정의역 축에 도입



   2) ①의 예를 들면



이와 같은 방법으로 개형을 그릴 수 있다.



10 역함수의 정의와 성질

① 함수 f와 그 역함수 f^{-1}는 정의역과 치역이 서로 바뀜
② $(f^{-1})^{-1}=f$
③ $(f^{-1}\circ f)(x)=f\circ f^{-1}(x)=x$(항등함수)
(단, 정의역과 공역이 같을 때만 교환법칙이 성립한다.)
④ $(f\circ g)(x)=x \Leftrightarrow f=g^{-1}(x)$
$(g\circ f)(x)=x \Leftrightarrow g=f^{-1}(x)$
⑤ $(g\circ f\circ h)^{-1}=h^{-1}\circ f^{-1}\circ g^{-1}$
⑥ $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$
⑦ $f\circ g=h$ 일 때
$f=h\circ g^{-1},\ g=f^{-1}\circ h$

11 역함수 구하기

① 함수 $y=f(x)$가 일대일대응인가를 확인한다.
② x와 y를 바꾼다.
③ $x=f(y)$를 x에 대하여 정리하면 $y=f^{-1}(x)$
④ 원래 함수의 정의역을 역함수의 치역으로,
원래 함수의 치역을 역함수의 정의역으로 바꾼다.

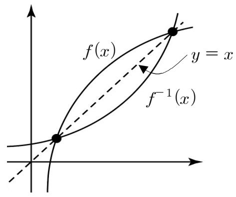
★되도록 역함수를 직접 구하지 말고, $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$ 을 이용하여 역함수를 원래함수로 바꿔서 풀 수 있는가를 먼저 고민할 것!!

$f(x)=x+2$(단, $x\ge 0$)의 역함수를 구하여라.

① $f(x)$의 치역을 구한다. $\Rightarrow y\ge 2$
② x와 y를 바꿔서 대입하고, 범위에 있는 x, y도 바꿔서 대입한다.
$y=x+2\ (y\ge 2)\ \Rightarrow x=y+2\ (x\ge 2)$
③ $y=f^{-1}(x)$형태로 풀어서 쓴다.
$y=x-2\ (x\ge 2)$

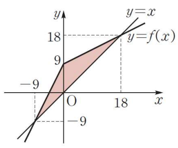
12 역함수관계인 두 함수의 그래프 특징

① 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.
② $f(x)$와 $f^{-1}(x)$의 교점의 개수 (증가함수일 때)
$\Rightarrow f(x)=x$의 실근 개수
$\Rightarrow f(x)-x=0$의 판별식을 이용한다. (이차함수 일 때)



④ 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프로 둘러싸인 넓이는 $y=f(x)$와 $y=x$로 둘러싸인 넓이의 2배이다.

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+9 & (x\ge 0)\\ 2x+9 & (x<0)\end{cases}$ 의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.



함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 좌표를 구하면
(i) $x\ge 0$일 때,
$\frac{1}{2}x+9=x \qquad \therefore x=18$
(ii) $x<0$일 때,
$2x+9=x \qquad \therefore x=-9$
따라서 구하는 넓이는 $2\left(\frac{1}{2}\times 9\times 9+\frac{1}{2}\times 9\times 18\right)=243$

13 $f(x)=f^{-1}(x)$ 함수의 특징

① $y=f(x)$ 그래프 자체가 $y=x$ 대칭이다.
예) $y=\frac{1}{x}$, $y=-x+k$, $\cdots$
② $f(f(x))=x$이다.
③ $f\circ f(x)=x$인 함수 $f(x)$의 개수
$\Rightarrow f$가 일대일대응일 때,
$f:\{1,2,3,\cdots,n\}\to\{1,2,3,\cdots,n\}$
모든 x 에 대하여 $f\circ f(x)=x$를 만족하는 경우의 수는 −자 또는 X자로 대응시키는 방법의 수를 구하면 된다.

$f(x)=f^{-1}(x)$를 만족시키는 함수만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $f(x)=x+1$ ㄴ. $f(x)=-x+1$ ㄷ. $f(x)=-\frac{1}{x}$

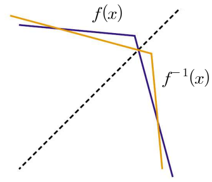
정답: ㄴ, ㄷ
ㄱ. $f(x)=x+1$은 $y=x$에 대하여 대칭이 아니므로, 틀림
ㄴ. $f(x)=-x+1$은 그래프 자체가 $y=x$에 대하여 대칭이므로 맞음
ㄷ. $f(x)=-\frac{1}{x}$은 그래프 자체가 $y=x$에 대하여 대칭이므로 맞음

14 역함수 존재 조건

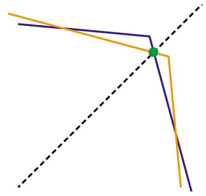
1. $y=f(x)$가 일대일대응이어야 한다.
2. 일대일대응이 되는 경우
① 그림을 그려서 판단한다.
② 주어진 정의역(x의 범위)에서 그래프가 공역에 다 포함되어야 함. $\Rightarrow$ 함수가 될 조건
③ 가로줄 그어서 항상 한 점에서만 만나야 한다. $\Rightarrow$ 일대일
④ 주어진 범위에서 그래프가 그리는 y값의 범위(치역)와 주어진 y값의 범위(공역)이 같아야 한다.
3. $h(x)=\begin{cases}ax+m & (x\ge k)\\ bx+n & (x<k)\end{cases}$ 가 역함수가 존재할 조건
① $a\times b>0$ (기울기의 부호가 같아야 한다.)
② $ak+m=bk+n$ (경계점에서 연결이 돼야 한다.)

15 감소함수인 역함수 관계의 두 함수의 교점

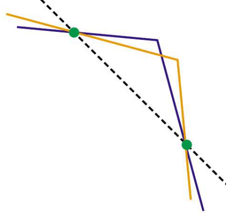
1. 역함수끼리의 교점개수가 유한개일 때
일단 아래와 같이 $f(x)$, $g(x)$가 감소함수이면서 서로 역함수 관계이다.



2. 이때 교점은 2가지의 특성을 나타낸다.
① $y=x$위 교점이다.



② $y=x$ 위에 있는 점이 아닌! 기울기 -1 인 직선 위에 있으면 항상 짝수개로 존재하는 점이다.



따라서 이때 교점은 홀수개로 존재한다.

3. 역함수끼리의 교점개수가 무한개일 때
예제) $y=-x+3$의 역함수는?
자기자신 이다. 따라서 위와 같이 감소함수인데, 기울기가 -1 인 교점개수가 무한개이다.

16 유리식의 계산

1. 이항분리 : 연속적인 유리식의 연산이 있을 때 생각하자.

부분분수 분해 : $\frac{C}{A\times B}=\frac{C}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}$를 정리하면?

앞뒤로 지워지는 구조가 만들어 진다.

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+6}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{x+6-x}{x(x+6)}\right\}=\frac{3}{x(x+6)}$

2. 스크린룰

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{\frac{f(a)}{a-b}}{x-a}+\frac{\frac{f(b)}{b-a}}{x-b}$$

① $\frac{(1차식\ 이하)}{(x-a)(x-b)}=\frac{p}{x-a}+\frac{q}{x-b}$

p, q 스크린룰 가능

② $\frac{(2차식\ 이하)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{p}{x-a}+\frac{q}{x-b}+\frac{r}{x-c}$

p, q, r 스크린룰 가능

③ $\frac{(2차식\ 이하)}{(x-a)^2(x-b)}=\frac{p}{(x-a)^2}+\frac{q}{x-a}+\frac{r}{x-b}$

p, r스크린룰 가능 q수치대입법으로 구한다.

$\frac{2x-1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{p}{(x-1)^2}+\frac{q}{x-1}+\frac{r}{x-2}$ 에서 $p+q+r$의 값을 구하시오.

$p=\frac{1}{1-2}=-1$, $r=\frac{3}{1^2}=3$

양변에 $x=0$을 대입하여 $q=-3$를 구한다.

따라서 $p+q+r=-1$

3. 가비의 리 (참고)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$

(단, $b+d+f\neq 0$, $pb+qd+rf\neq 0$)

$\frac{3c}{a+2b}=\frac{a}{2b+3c}=\frac{2b}{3c+a}=k$일 때, 모든 k값의 합을 구하시오. (단, $abc\neq 0$)

1) $a+2b+3c\neq 0$

$k=\frac{a+2b+3c}{2(a+2b+3c)}=\frac{1}{2}$

2) $a+2b+3c=0$

$k=\frac{3c}{-3c}=\frac{a}{-a}=\frac{2b}{-2b}=-1$

$\therefore$ k의 모든값의 합은 $\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$

17 유리함수

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 유리함수라고 한다.

$$y=\frac{다항함수}{다항함수}$$

라고 생각해도 된다. 다항함수의 정의역은 실수 전체의 집합이다. 일반적으로 다항함수가 아닌 유리함수에서 정의역이 따로 명시되어 있지 않을 때 분모를 0으로 하는 x의 값을 제외한 실수 전체의 집합을 정의역으로 본다.

$y=\frac{k}{x}$ $(k\neq 0)$ 의 그래프

① 정의역과 치역은 0을 제외한 실수 전체의 집합이다

⇨ 역함수가 존재한다.

② 원점에 대하여 대칭인 한 쌍의 곡선이다.

$xy=k$ ⇨ $(-x)(-y)=k$ 원점대칭 시켜도 그대로

③ 두 점근선의 교점에 대하여 점대칭이다.

④ $k>0$이면 그래프는 제 1, 3사분면에 있고,

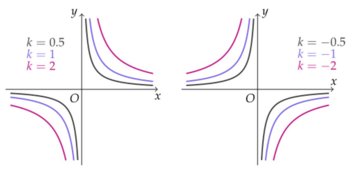
$k<0$이면 그래프는 제 2, 4사분면에 있다.

$xy=k$에서 $k>0$ 이라는 것은 x, y의 부호가 같음을 뜻한다.

$xy=k$에서 $k<0$ 이라는 것은 x, y의 부호가 다름을 뜻한다.

⑤ 점근선은 x축과 y축이다.

⑥ $|k|$의 값이 커질수록 그래프는 원점에서 멀어진다.

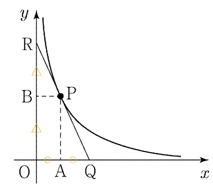


⑦ 유리함수 위의 점 $P(t, f(t))$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 A, B라 할 때 사각형 OAPB의 넓이는

$t\times f(t)=k$

$P(t, f(t))$에서 그은 접선의 방정식이 두 점근선(x축, y축)과 만나는 절편을 Q, R라 할 때 삼각형 OQR 넓이는

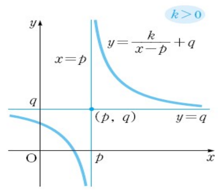
$\frac{1}{2}\times 2t\times 2f(t)=2k$



18 유리함수의 표준형

1. $y=\frac{k}{x-p}+q$ $(k\neq 0,\ x\neq a)$ 의 그래프와 성질

⇨ $y=\frac{k}{x}$ 의 그래프를 평행이동한 그래프



① 점근선 : $x=p$, $y=q$ ★(p,q)는 두 점근선의 교점

② 정의역 : $\{x\ |\ x\neq p$인 모든 실수$\}$

③ 치 역 : $\{y\ |\ y\neq q$인 모든 실수$\}$

④ 점대칭 : (p,q)에 대하여 점대칭

⑤ 선대칭 : 직선 $y=\pm(x-p)+q$에 관한 대칭

두 점근선의 교점을 지나고, 기울기가 ± 1인 두 직선

⑥ 역함수 : $y=\frac{k}{x-p}+q$ ⇔ $y=\frac{k}{x-q}+p$

$y=x$대칭 (p,q)가 (q,p)가 된다.

19 유리함수의 일반형

1. 유리함수 $y=\frac{cx+d}{ax+b}$ $(a\neq 0,\ ad-bc\neq 0)$

① 점근선 : $x=-\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{a}$

⇨ 분모가 0 되는 점 $x=-\frac{b}{a}$

⇨ 분모 분자의 1차항 계수비 $y=\frac{c}{a}$

② 대칭의 중심 : $\left(-\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$

2. 유리함수의 역함수

$f(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$ ⇔ $f^{-1}(x)=\frac{-bx+d}{ax-c}$

⇨ $f(x)=\frac{cx+d}{ax+b}$ $y=x$대칭이니깐 a, d를 기준으로 b와 c를 바꾼다는 느낌? 아 물론 부호는 바꿔서...

※ 일반형 상태로 평행이동 관계인 두 유리함수를 판단하기 어렵다. 만약, 문제에서 평행이동 또는 대칭이동으로 일치하는 함수를 찾으라 한다면 표준형으로 바꿔서 생각하자.

※ 유리함수의 정의역과 치역이 같을 조건

⇨ 두 점근선의 교점이 $y=x$위에 있고 $f(x)=f^{-1}(x)$이다.

⇨ $f(f(x))=x$

20 유리함수와 최대 최소

1. 외부의 점에서 유리함수 위의 점까지 거리의 최솟값

① 외부의 점은 반드시, 유리함수의 대칭선위에 존재한다.

② 대칭선을 구해서 대칭선과 유리함수를 연립하여 대칭선과 유리함수의 교점을 구한다.

③ 외부의 점과 ②에서 구한 교점까지의 거리가 최솟값이 된다.

2. 임의의 점에서 축이나 점근선에 내린 수선으로 만들어지는 직사각형의 둘레의 길이 또는 길이의 합, 곱의 최솟값

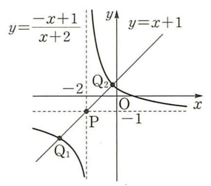
① 곡선 위의 점을 $(t, f(t))$로 잡는다.

② 점근선이나 축에 내린 수선의 발의 좌표를 t로 표현한다.

③ 직사각형의 길이를 t로 표현한다. 좌표를 길이로 표현할 때 부호에 주의한다. 길이는 양수이므로, 반드시 큰 값에서 작은 값을 빼야 길이가 나온다.

④ 둘레의 길이를 t로 표현한다음, 산술기하평균을 이용하여 최솟값을 구한다.

좌표평면 위에 점 $P(-2,\ -1)$과 곡선 $y=\frac{-x+1}{x+2}$ 위를 움직이는 점 Q가 있다. 선분 PQ의 길이의 최솟값이 m일 때, m^2의 값을 구하여라.



점근선의 방정식은 $x=-2$, $y=-1$이다.

즉, 점 $P(-2,\ -1)$은 두 점근선의 교점이다.

점 P가 점근선의 교점이므로 점 P에서 곡선

$y=\frac{-x+1}{x+2}$

에 이르는 거리가 최소인 곡선 위의 점 Q는 그림과 같이 Q_1, Q_2로 두 개가 존재한다. 두 점 Q_1, Q_2의 좌표는 각각

$(-2-\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3}), (-2+\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3})$

이고 $\overline{PQ_1}=\overline{PQ_2}$이므로

$m=\overline{PQ_1}=\sqrt{(-2-\sqrt{3}+2)^2+(-1-\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{6}$

함수 $y=\frac{k}{x-2}+3\,(x>2)$의 그래프 위의 한 점 P에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라고 한다. 이 때, $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최솟값이 8이 되는 점 P의 좌표와 양수 k값을 구하시오.

$P\left(t,\ \frac{k}{t-2}+3\right)$이라 하자. $\overline{PQ}=\left(\frac{k}{t-2}+3\right)-3=\frac{k}{t-2}$,

$\overline{PR}=t-2$이므로 $\overline{PQ}+\overline{PR}=\frac{k}{t-2}+t-2\geq 2\sqrt{k}$이다.

$\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최솟값이 8이므로 $2\sqrt{k}=8$이다.

즉, $k=16$이다. 또한 $\frac{16}{t-2}=t-2$일 때 등호가 성립한다.

$(t-2)^2=16$이고 $t-2>0$이므로 $t=6$이다.

따라서 그 때의 점 P의 좌표는 $P(6,7)$이다.

21 무리식

근호 안에 문자가 있는 식

$$\sqrt{f(x)}$$

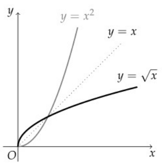
중에서 유리식으로 나타낼 수 없는 식을 무리식이라고 한다.
무리식에서는 식의 값이 실수가 되려면

$$f(x)\geq 0$$

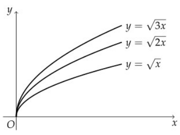
를 만족해야 한다. 이때, $f(x)\geq 0$이면 $\sqrt{f(x)}\geq 0$이다.

22 무리함수의 그래프

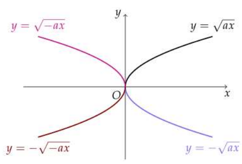
1. 무리함수 $y=\sqrt{x}\ (x\geq 0)$은 $y=x^2(x\geq 0)$의 역함수이다.
   따라서 $y=x^2$의 그래프를 $y=x$에 대하여 대칭이동하여 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 그릴 수 있다.



2. 무리함수 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프는 a의 값이 커질수록 x축에서 멀어진다.



3. 무리함수 $y=\sqrt{ax}\ (a>0)$의 그래프를
   ① y축 대칭하면 $y=\sqrt{-ax}$
   ② x축 대칭하면 $y=-\sqrt{ax}$
   ③ 원점 대칭하면 $y=-\sqrt{-ax}$



23 일반적인 무리함수의 그래프

$$y=a\sqrt{b(x-p)}+q$$

1. 부호의 성질
   ① 주축 $y=q$
   ② a의 부호는 주축보다 위에 그려질지 아래에 그려질지 결정
      $a>0$ ⇨ 주축보다 위에 그려진다.
      $a<0$ ⇨ 주축보다 아래에 그려진다.
   ③ b의 부호는 시작점에서 왼쪽 또는 오른쪽으로 갈지 결정한다.
      $b>0$ ⇨ 시작점에서 오른쪽으로 그래프가 그려진다.
      $b<0$ ⇨ 시작점에서 왼쪽으로 그래프가 그려진다.
   ④ 시작점의 x좌표 $=p$ (루트속이 0이 되는 x값)
      시작점의 y좌표 $=q$ (루트가 0이 될 때, y값)

2. 그래프 그리기
   ① 시작점의 좌표를 평면에 찍는다.
   ② a를 보고 주축보다 위에 그려질지, 아래에 그려질지 판단
   ③ b를 보고 왼쪽으로 그려질지, 오른쪽으로 그려질지 판단

3. 두 무리함수 $y=\sqrt{ax}$, $y=\sqrt{b(x-p)}+q$의 그래프가 서로 일치하기 위한 조건
   ① 평행이동 : $a=b$
   ② 평행이동 + 대칭이동 : $|a|=|b|$

24 $y=\pm\sqrt{a+bx-x^2}+c$ 꼴의 그래프

반원의 그래프가 된다.

① $y-c=\pm\sqrt{a+bx-x^2}$꼴로 고쳐 양변 제곱하여 원의 방정식 모양으로 만든다.

② 원의 그래프를 그린다.

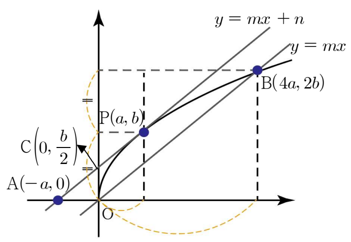
③ $y=\sqrt{a+bx-x^2}+c$ ⇨ 반원의 윗부분
   $y=-\sqrt{a+bx-x^2}+c$ ⇨ 반원의 아랫부분

25 무리함수와 직선의 위치관계

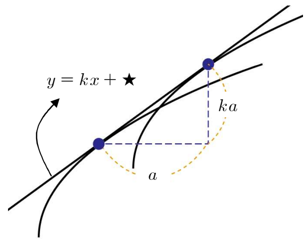
$$y=a\sqrt{b(x-p)}+q \text{ 와 } y=mx+n$$

1. 일반적인 문제풀이법
   ① 주어진 무리함수의 그래프를 그린다.
   ② 주어진 직선에서 미지수의 도형에서의 의미를 파악하고 직선을 움직여가면서 조건에 맞는 상황을 찾는다.
      (반드시 그래프를 먼저 그려서 판단한다.)
   ③ 직선과 무리함수 그래프가 접할 때의 미지수의 값을 찾아내고, 조건에 맞는 미지수의 범위를 구한다.
      (이때, $\sqrt{A}=B$ 와 $A=B^2$은 일치하지 않으므로 판별식 $D>0, D\geq 0, D<0, D\leq 0$을 함부로 쓰지 않는다.)

2. 무리함수 접선의 비율관계
   ① 기울기가 일정할 때 y좌표의 합은 항상 일정하다
      접점의 y좌표 $=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$
      직선 OB의 기울기와 같은 접선의 y좌표는 선분 OB의 중점의 y좌표와 일치한다.
   ② 접선을 그릴 때 꼭지점으로부터 접점의 x좌표까지의 거리와 꼭지점으로부터 x절편까지의 거리가 같다.
      $y=\sqrt{px}$ 에서 점 $P(a,b)$에서
      접선의 x절편은 $A(-a,0)$, y절편은 $C\left(0,\ \frac{b}{2}\right)$이다.



3. $f(x-a)+ka$: a에 관계없이 접하는 접선 $y=kx+★$



26 무리함수의 역함수

$y=\sqrt{ax+b}+c$의 역함수

무리함수의 역함수는 이차함수의 일부분이다.

1. 역함수 구하는 방법
   ① 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 정의역과 치역을 구한다.
      정의역 : $\left\{x\,|\,x\geq -\frac{b}{a}\right\}$
      치 역 : $\{y|y\geq c\}$
   ② 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$를 x에 관하여 정리
      $y=\sqrt{ax+b}+c$
      $y-c=\sqrt{ax+b}$ 양변을 제곱하여 정리하면
      $(y-c)^2=ax+b$
      $\therefore x=\frac{(y-c)^2-b}{a}$
   ③ x와 y의 자리를 서로 바꾼다. $y=\frac{(x-c)^2-b}{a}$
   ④ 정의역과 치역도 서로 바꾼다.
      정의역 : $\{x|x\geq c\}$, 치 역 : $\left\{y\,|\,y\geq -\frac{b}{a}\right\}$

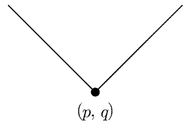
2. 역함수와의 교점
   ① $y=f(x)$가 증가함수일 때
      무리함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점은 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점과 같다.
   ② $f(x)=\sqrt{ax+b}$의 그래프와 그 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프의 교점개수가 3개이기 위한 a, b의 조건
      ⇨ $a<0,\ \frac{3}{4}a^2<b\leq a^2$
      $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$의 교점 중
      $y=x$위가 아닌 두 교점의 좌표를 (p,q), (q,p)라 하자.
      (단, $p\neq q$, $p\geq 0$, $q\geq 0$)
      이 두 교점은 $y=-x+k$직선 위에 존재하게 된다.
      따라서 방정식 $\sqrt{ax+b}=-x+k$의 두 실근이 p와 q이다.
      양변을 제곱하여 정리하면
      $ax+b=x^2-2kx+k^2$
      $x^2-(2k+a)x+k^2-b$
      근과 계수의 관계에 따라 $p+q=k=2k+a\ \therefore\ k=-a$
      $x^2+ax+a^2-b=0$
      에서 $D=a^2-4a^2+4b>0$ 이므로 $\frac{3}{4}a^2<b$이고
      $p=\sqrt{aq+b}\geq 0$
      $q=\sqrt{ap+b}\geq 0$
      이므로 두 근의 곱 $pq=a^2-b\geq 0\ \therefore\ b\geq a^2$
      따라서 $\frac{3}{4}a^2<b\leq a^2$ 이다.

27 절댓값 그래프 특강

1. $|x|$, $|f(x)|$, $|y|$ 에 대한 기본기
① 절댓값 안의 식이 0이 되는 x의 값의 범위를 나눈다.
② 각 범위에 따라 함수식을 나타낸다.
③ 각 범위에서 ②에서 구한 식의 그래프를 그린다.

$f(x)=a|x-p|+q$의 그래프 그리기

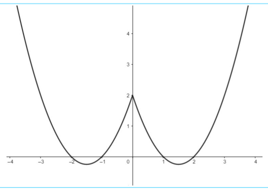
절댓값을 이차식처럼 받아들인다.



① 꼭지점 표시 (p, q)
② a의 부호에 따라 ∨ or ∧ 모양을 그린다.
③ a의 절댓값이 클수록 가파르게 그린다.

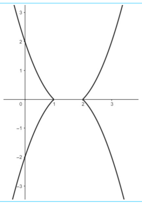
2. $y=f(|x|)$
① 모든 x에 절댓값이 붙어 있는 경우
② x에 $(-x)$를 대입해도 같으므로, 그래프 자체가 y축 대칭이다.
③ $x \geq 0$부분을 먼저 그린다.
$x<0$부분은 오른쪽을 왼쪽으로 데칼코마니 시킨다.

$y=x^2-3|x|+2$의 그래프를 그려라.



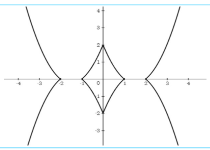
3. $|y|=f(x)$
① y에만 절댓값이 붙어 있는 경우
② y에 $(-y)$를 대입해도 같으므로, 그래프 자체가 x축 대칭이다.
③ $y \geq 0$부분을 먼저 그린다.
$y<0$부분은 위쪽을 아래로 데칼코마니 시킨다.

$|y|=x^2-3x+2$의 그래프를 그려라.

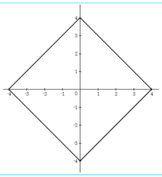


4. $|y|=f(|x|)$
① 모든 x, y에 절댓값이 붙어 있는 경우
② x에 $(-x)$를 대입해도 같고, y에 $(-y)$를 대입해도 같고, x, y에 $(-x), (-y)$대입해도 같으므로, 그래프 자체가 x축, y축, 원점대칭이다.
③ 1사분면 부분만 그래프를 그리고 이것을 모든 사분면에 대하여 데칼코마니 시킨다.

$|y|=x^2-3|x|+2$의 그래프를 그려라.

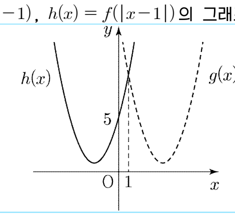


$|x|+|y|=k$(단, $k>0$)의 그래프를 그려라.



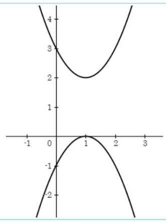
5. $y=f(|x-k|)$
① 그래프 자체가 $x=k$에 대하여 대칭이다.
② $x \geq k$ 일 때의 그래프만 그려서 $x=k$에 대하여 대칭한다.

$f(x)=x^2-4x+5$일 때, 두 함수 $g(x)=f(x-1)$, $h(x)=f(|x-1|)$의 그래프를 그려라



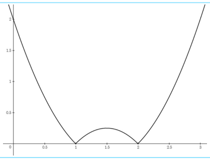
6. $|y-k|=f(x)$
① 그래프 자체가 $y=k$에 대하여 대칭이다.
② $y \geq k$ 일 때의 그래프만 그려서 $y=k$에 대하여 대칭한다.

$|y-1|=(x-1)^2+1$의 그래프를 그려라.

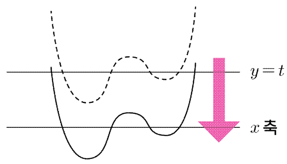


7. $y=|f(x)|$ (우변전체에 절대값이 붙어 있는 경우)
① 절대값 지우고 그래프를 그린다.
② x축 아래부분을 x축 대칭하여 위로 꺾어 올린다.
이때, 원래 x축 위에 있던 부분의 식은 $y=f(x)$
x축 아래에 있어서 꺾어 올린 부분의 식은 $y=-f(x)$

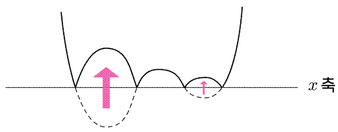
$y=|x^2-3x+2|$의 그래프를 그려라.



8. $y=|f(x)-t|$
① $f(x)$를 t만큼 아래로 평행이동 한다.

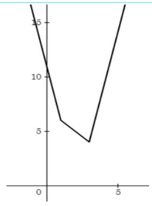


② x축 아래를 위로 대칭이동 시킨다.



9. $y=|★|+|♥|$ 절댓값 2개 이상
① (절대값 속)$=0$이 되는 x값을 $y=f(x)$식에 대입해서 나온 점 $(x, f(x))$를 좌표 평면에 찍는다.
② 점과 점 사이는 직선으로 연결한다.
③ 양쪽 끝점의 바깥쪽은 절댓값을 풀어서 직선의 기울기의 부호를 판단한 다음, 증가 또는 감소를 이용해 양쪽 끝점에 연결하여 직선을 그린다.

$y=2|x-1|+3|x-3|$의 그래프를 그려라.

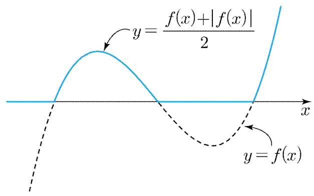


10. $y=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$

① $f(x) \geq 0$이면 $\dfrac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$

② $f(x)<0$이면 $\dfrac{f(x)-f(x)}{2}=0$

③ 한국어 번역하면 x축 위는 그대로, x축 아래는 빵



1 거듭제곱근의 정의

(1) 거듭제곱과 거듭제곱근

a의 n거듭제곱 : a^n

a의 n거듭제곱근 : $x^n = a$에서 x를 의미한다.

지수는 어떤 수나 문자의 오른쪽 위에 덧붙여 쓰여
그 거듭제곱을 한 횟수를 나타내는 문자나 숫자를 말한다.

x의 n제곱 ⇨ x^n (지수, 밑)

거듭제곱근은 n제곱하여 a가 되는 수를 a의 n제곱근이라 한다.

$\underbrace{x^n}_{a\text{의 } n\text{제곱근}} = a$ (x의 n제곱)

(2) $x^n = a$ 일 때 x의 이름은?

⇨ a의 n제곱근이라고 한다.

다시 말해 n제곱하여 a가 되는 수를 a의 n제곱근이라 한다. 즉, a의 n제곱근은 방정식 $x^n = a$의 근이다.

여기서 '근'이란 방정식의 근과 같은 용어이다.

이때 문제에서 'a의 n제곱근' 이라는 표현이 나왔을 때, $x^n = a$로 식을 세우는 것이 중요하다.

> '제곱근 3' 과 '3의 제곱근'의 차이는?
>
> [풀이] '제곱근 3'은 $\sqrt{3}$
> '3의 제곱근' 은 $x^2 = 3$방정식의 근 $x = \pm\sqrt{3}$

(3) $x^n = a$ 일 때 방정식의 근의 개수 n개다.

다만 실근이라는 것은 아니다.

실근과 허근을 포함하여 n개다.

> 8의 세제곱근은 2이다. (O / X)
>
> [풀이] X : $x^3 = 8$이 되는 모든 근이 8의 세제곱근이므로 8의 세제곱근은 $2,\ -1\pm\sqrt{3}i$라고 해야 맞다.

(4) 실근일 때와 허근일 때의 차이는?

실근일 때 특별히 기호로 정의한다.

> 8의 세제곱근과 $\sqrt[3]{8}$ 의 관계
>
> [풀이]
> 세제곱해서 8이 되는 수 곧, $x^3 = 8$을 만족하는 x를 8의 3제곱근이라 한다.
> $x^3 = 8$
> $x^3 - 2^3 = 0 \quad \cdots \quad (x-2)(x^2+2x+4) = 0$
> $\therefore x = 2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$
> 8의 3 제곱근은 $2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$이다.
> 이 중에서 실수 2를 기호 $\sqrt[3]{8}$로 나타내기로 하고 $\sqrt[3]{8}$을 세제곱근 8이라고 읽는다.
> 마찬가지로 -8의 3제곱근 곧, $x^3 = -8$을 만족하는 x은 $-2,\ 1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$의 세 개가 있으며, 이 중에서 실수인 것 -2만을 $\sqrt[3]{-8}$로 나타낸다.

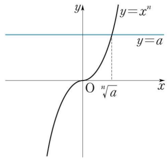
2 실근의 개수

(1) n이 홀수일 때

$y = x^n$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

그림처럼 직선 $y = a$와 오직 한 점에서 만난다.

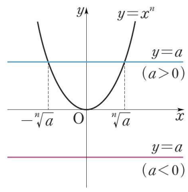
$$n : \text{홀수} \begin{cases} a > 0 \\ a = 0 \\ a < 0 \end{cases} : a\text{의 실수인 } n\text{제곱근은 } \sqrt[n]{a}\text{이다.}$$



(2) n이 짝수일 때

$(-x)^n = x^n$이므로 함수 $y = x^n$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$$n : \text{짝수} \begin{cases} a > 0 & : a\text{의 실수인 } n\text{제곱근} \to \pm\sqrt[n]{a}\text{로 두개} \\ a = 0 & : 1\text{개} \\ a < 0 & : a\text{의 실수인 } n\text{제곱근} \to \text{존재하지 않는다.} \end{cases}$$



> 2021(가) 6월/평가원 12
>
> 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? (3점)
>
> [풀이] 31
> 방정식 $x^n = -n^2+9n-18$가 음의 실근을 갖는다면,
> ① n이 홀수 이고, $-n^2+9n-18 < 0 \Rightarrow n = 7, 9, 11$
> ② n이 짝수 이고, $-n^2+9n-18 > 0 \Rightarrow n = 4$
> ①+②에 의해 정답 31

※ 거듭제곱근의 실근의 개수파악

> 실근을 물어보면 무조건 그래프를 그리자.
> 홀수차수일 때는 a가 뭐든 실근이 한 개다. 짝수차수일 때는 a값에 따라 실근이 2개, 1개, 0개가 나올 수 있다.

※ a 의 실수인 n제곱근

n이 2이상의 자연수일 때,

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

★고난도 문제풀이

① $x^n = f(n)$ 방정식의 풀이
n값에 $n = 1,\ 2,\ 3\cdots$ 차례로 대입하며
(문제에 따라 $n \ge 2$일 수 있다.)
$y = x^n$의 그래프와 $y = f(n)$직선을 그려서 파악

② 경계에 주목하자.
n이 짝수일 때 $y = x^n$의 그래프와 $y = a$직선이 접할 때 즉, $a = 0$인 순간을 경계로 교점개수를 파악하자.

3 거듭제곱근의 성질

$a > 0,\ b > 0,\ m,\ n$이 2이상의 자연수일 때

① $(\sqrt[n]{a})^n = a$

② $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

③ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

④ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

⑤ $(\sqrt[n]{a^m}) = \sqrt[nk]{a^{mk}}$

⑥ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ (단, k는 자연수)

$a > 0,\ b > 0$조건이 없을 때, 즉 밑이 양수인 조건이 없다면

⑤ $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|,\ \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$

> 다음을 간단히 하여라.
>
> 1) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}$ 2) $\sqrt[4]{32}\sqrt[4]{8}$ 3) $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2}}$ 4) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$
>
> [풀이]
> 1) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2\times5} = \sqrt[3]{10}$
> 2) $\sqrt[4]{32}\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{32\times8} = \sqrt[4]{2^5\times2^3}$
> $= \sqrt[4]{2^8} = (\sqrt[4]{2})^8 = 2^2 = 4$
> 3) $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{2}} = \sqrt[3]{4}$
> 4) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

> 다음 명제의 참 거짓은?
> 1)방정식 $x^{2n} = a^2$ 의 실근은 $+\sqrt{a}$또는$-\sqrt{a}$ 이다.
> 2)방정식 $x^{3(2n+1)} = a^3$ 의 실근은 $\sqrt[2n+1]{a}$ 이다.
>
> [풀이]
> 1) 방정식 $x^{2n} = a^2$ 의 실근은 $+\sqrt[2n]{a^2}$ 또는 $-\sqrt[2n]{a^2}$ 이다. '2'를 함부로 지워서는 안 된다. 지우려면 $a>0$조건이 있어야 한다. ∴ 거짓
> 2) 지수가 홀수일 때 편하게 약분가능 ∴ 참

★지수를 마음대로 약분하지 말자.

4 지수의 확장

(1) 0 또는 음의 정수인 지수의 정의

① $a^0 = 1$ ② $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ ($a \ne 0$, n은 정수)

③ $\left(\dfrac{b}{a}\right) = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}$ (단, $ab \ne 0$)

★ 0^0은 정의되지 않는다.

(2) 분수 지수 (유리수 지수)

$a > 0$, m은 정수, n은 2 이상의 정수일 때,

① $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ② $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

(3) 지수법칙

$a > 0,\ b > 0$이고 $m,\ n$이 실수일 때,

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$

④ $(ab)^n = a^n b^n$

⑤ $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n = \dfrac{b^n}{a^n}$

지수 x의 값의 범위	양의 정수	정수	유리수	실수
밑 a의 조건	실수	$a \ne 0$	$a > 0$	

> 틀린 부분을 찾으시오.
> $\{(-2)^2\}^{\frac{1}{2}} = (-2)^{2\times\frac{1}{2}} = -2$
>
> [풀이] $\{(-2)^2\}^{\frac{1}{2}}$ 에서 $(-2)^{2\times\frac{1}{2}}$로 넘어갈 수 없다. 지수법칙은 밑이 0보다 클 때 가능하다.

5 분수지수를 이용한 계산유형

(1) 거듭제곱근의 대소비교

① 밑을 통일 시키거나, 지수를 통일한다.

② 빼본다. ($\mathrm{A}-\mathrm{B}>0$이면 $\mathrm{A}>\mathrm{B}$이다.)

③ 나눠본다. ($\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}<1$이면 $\mathrm{A}<\mathrm{B}$, 단 $\mathrm{A}>0, \mathrm{B}>0$)

④ 산술기하 이용

⑤ 지수함수의 그래프 이용

세 수 $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{20}$의 대소 관계는?

[풀이] $5^{\frac{1}{3}}, 10^{\frac{1}{4}}, 20^{\frac{1}{6}}$ 인데, 분수지수로 바꾸고 지수를 통일하자.

$(5^4)^{\frac{1}{12}}$, $(10^3)^{\frac{1}{12}}$, $(20^2)^{\frac{1}{12}}$

⇨ $(625)^{\frac{1}{12}}$, $(1000)^{\frac{1}{12}}$, $(400)^{\frac{1}{12}}$

따라서 $\sqrt[6]{20}<\sqrt[3]{5}<\sqrt[4]{10}$ 이다.

(2) 지수식 변형 방법

① $a^x=b$ ⇨ $a=b^{\frac{1}{x}}$ 임을 이용

② $a^x=b^y=c^z$ $(=k)$ 임을 이용

③ $x+y-xy=0$꼴 ⇨ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$꼴로 변형한다!

세 실수 x, y, z에 대하여 $2^x=3^y=36^z$일 때 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{2z}$의 값은?

[풀이] $2^x=3^y=36^z=k$일 때

$2=k^{\frac{1}{x}}$, $3=k^{\frac{1}{y}}$, $36=k^{\frac{1}{z}}$ 이다.

따라서 $(2\times 3)^2=\left(k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\right)^2=k^{\frac{1}{z}}$

$k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{2z}}$ $\quad\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{2z}=0$

④ 연립의 기술

1) 지수의 모양이 주어진 식으로 맞추기 어려운 경우

⇨ 구하고자 하는 수의 지수부터 분모의 모양을 먼저 맞춰라!

2) 로그를 이용하자.

두 실수 a, b에 대하여 $15^a=2$, $15^b=3$일 때, $25^{\frac{a}{1-b}}$의 값은?

1) 구하고자 하는 수의 지수에서 분모 '$1-b$'를 만들자.

$15\div 15^b=15^{1-b}=15\div 3=5$

따라서 $15=5^{\frac{1}{1-b}}$, $15^a=5^{\frac{a}{1-b}}=2$

$\therefore 25^{\frac{a}{1-b}}=4$

2) $a=\log_{15}2$, $b=\log_{15}3$을 이용하자.

$\frac{a}{1-b}=\frac{\log_{15}2}{1-\log_{15}3}=\frac{\log_{15}2}{\log_{15}5}=\log_5 2$

따라서 $25^{\frac{a}{1-b}}=25^{\log_5 2}=4$

(3) 거듭제곱근의 변형

① $\sqrt[n]{\frac{a^m}{a^l}}=\sqrt[n]{a^m\times a^{-l}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{l}{n}}$

② $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{a}}}}}_{(n\text{개})}=a^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ (단, $a>0$)

③ $\underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{\cdots\sqrt{a}}}}}_{(n\text{개})}=a^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ (단, $a>0$)

(4) a^{-n} 이 포함된 분수식

① a^n과 a^{-n}의 관계를 이용한 인수분해를 통해 약분한다.
(분모 분자 최저차항으로 묶는다.)

[예] $\frac{a^5+a^4+a^3}{a^{-3}+a^{-2}+a^{-1}}=\frac{a^3(a^2+a+1)}{a^{-3}(1+a+a^2)}=a^6$

② 분모 분자에 a^n을 곱한 후 구조를 파악한다.

[예] $\frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}=\frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}$

③ 분수식들이 합으로 연결되어 있을 때 대칭성을 확인한다.

[예] $\frac{1}{a^{-n}+1}+\frac{1}{a^n+1}=\frac{a^n}{1+a^n}+\frac{1}{a^n+1}=1$

(5) 곱셈공식 활용

① 곱해서 상수이면 곱셈공식을 생각한다.

② 곱과 합의 구조로 파악한다.

(1) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

(2) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$

(3) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$

(4) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

(5) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=x^3-\frac{1}{x^3}-3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

6 거듭제곱근의 자연수, 정수 조건

일단, 분수지수로 바꾼다. 최종적으로 아래 3가지만 자연수가 될 수 있는 조건이다.

$(\text{자연수})^{\text{자연수}}$, $(1)^{\bigstar}$, $(\bigstar)^0$

$(\text{자연수})^{\text{자연수}}$ 형태의 판단.

① 밑이 자연수가 되도록 분수지수를 만든다.

② 지수가 자연수가 될 때와 자연수가 되지 않을 때로 나눈다.

③ 지수가 자연수가 되지 않으면
밑이 거듭제곱수 형태인지 확인한다.

※ $\sqrt[n]{x^p\times y^q}=x^{\frac{p}{n}}\times y^{\frac{q}{n}}=\text{자연수}$ (x, y는 1이 아닌 자연수)

이와 같은 상황에서는 n은 p와 q의 공약수이다.

공약수의 개수 = 최대공약수 약수의 개수

(n은 1이 아닌 자연수)

$2\le n\le 100$인 자연수 n에 대하여 $\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수를 구하시오.

[풀이]
일단 분수지수로 바꾸고, 자연수가 되는 조건을 생각하자.

$\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}$이므로 이것을 n제곱근으로 갖는 자연수를 k라 하면

$\left(3^{\frac{5}{6}}\right)^n=k$ $\quad\therefore k=3^{\frac{5n}{6}}$

이때, k가 자연수이므로 n은 6의 배수이어야 한다.

따라서 이를 만족하는 $2\le n\le 100$인 자연수 n은 6, 12, 18, $\cdots$, 96 $(=6\times 16)$의 16개다.

$1\le m\le 3$, $1\le n\le 8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는?

[풀이] 밑이 세제곱이 나오면 지수의 $\frac{1}{3}$을 극복할 수 있다.

$1\le m\le 3$, $1\le n\le 8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$ 이 자연수가 되려면

$n=A^3$꼴 또는 $m=3k$ 꼴 (A, k는 자연수)이어야 한다. <이후 생략>

$2+2+8=12$(개)

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근 을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

[풀이]

1) $x^n-64=0$ 또는 $f(x)=0$ 의 근의 개수를 찾아야 한다.

2) $x^n=64$ 에서 실근 개수는 $0, 1, 2$ 가 나올 수 있다.
$f(x)=0$에서 실근 개수는 $0, 1, 2$ 가 나올 수 있다.

3) (가)조건을 만족하기 위해서는
$x^n=64$ 실근 개수 2개
$f(x)=0$ 실근 개수 2개

$x^n=64$에서 실근개수 2개이려면 n은 짝수이다.

$x^n=64$ 에서 $x=\pm\sqrt[n]{64}$ 이다.

따라서 $f(x)=(x-\sqrt[n]{64})(x+\sqrt[n]{64})$ 이다.

$f(x)$의 최솟값은

$f(0)=-\left(\sqrt[n]{64}\right)^2=-64^{\frac{2}{n}}=-2^{\frac{12}{n}}$

(나)조건에 의해 n은 12의 약수이며 짝수이다.

$n=2, 4, 6, 12$

7 로그의 정의

(1) 새로운 지수를 정의하다.

$2^x=8$에서 x의 값은 3이다.

그렇다면 $2^x=7$일 때 x의 값은 무엇일까?

이 '무엇'을 정의한 것이 로그이다.

(2) 로그(logarithm)는 비수(比數)이다.

비율로 표현되는 지수이다.

로그의 어원은 logarithm으로 '비(比)' 를 뜻하는 logos 와 '수'를 뜻하는 arithmos 의 합성어로 비수(比數)란 표현은 가장 적절한 정의이다.

$2^x=7$에서 x는 무엇인가?

[풀이] x는 2와 7의 비율관계로 정의된 지수이다.
따라서 $x=\log_2 7$이다.

※ 로그의 의미

① 첫 번째, 지수의 확장이다.

$2^x=\bigstar$ 일 때 $x=\log_2\bigstar$ 이라고 말할 수 있다.

$\bigstar>0$ 조건만 성립한다면

x값에 모든 실수를 표현할 수 있다. 이 정의로 지수함수를 정의할 수 있다.

② 내 맘대로 밑을 바꿀 수 있다.

2×3^4

여기서 불편한 것은? 밑이 다르다.

하지만 밑을 내 맘대로 바꿀 수 있다.

$2\times 3^4=3^{\log_3 2}\times 3^4=3^{\log_3 2+4}$

라고 최종 정리할 수 있다.

8 로그의 성립조건

(1) 로그의 정의

$a>0$, $a\neq 1$일 때, 양수 N에 대하여

$a^x = \mathrm{N} \Leftrightarrow x=\log_a \mathrm{N}$

(2) 로그 $\log_a \mathrm{N}$의 성립 조건

① 밑 조건 : 밑 a는 1이 아닌 양수

⇨ $a\neq 1$, $a>0$

⇨ $0<a<1$이고 $a>1$

② 진수 조건 : 진수 N는 양수 $(\mathrm{N}>0)$

※ 로그 읽는 법

로그라 쓰고, 지수로 읽는다...

$\log_a b = x$ ⇨ 읽는 법 : a의 x제곱은 b

$\log_{■} ★ = ♥$ ⇨ 읽는 법 : ■의 ♥ 제곱은 ★

$\log_x 8=-3$을 만족시키는 x의 값은?

[풀이] 일단, 밑조건을 생각한다.

그리고 지수로 읽자. $x^{-3}=8$, 즉 $x=\frac{1}{2}$이다.

$\log_2\{\log_3(\log_4 n)\}=0$일 때, n의 값을 구하여라.

[풀이] $\log_2\{\log_3(\log_4 n)\}=0$에서

$\log_3(\log_4 n)=2^0=1$, $\log_4 n=3^1=3$

$\therefore n=4^3=64$

9 로그의 기본성질

$x>0$, $y>0$이고 $a\neq 1$, $a>0$일 때,

① $\log_a a=1$, $\log_a 1=0$

② $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$

③ $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

④ $\log_a x^n = n\log_a x$

⑤ $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ ($b>0$, m, n은 실수 $m\neq 0$)

⑥ $\log_{a^n} b^n=\log_a b$ ($b>0$, n은 0이 아닌 실수)

[증명] ②번 증명

$\log_a x=p$, $\log_a y=q$라 하면 $a^p=x$, $a^q=y$이므로

$xy=a^{p+q}$

따라서 $\log_a xy=p+q=\log_a x+\log_a y$이다.

$\log_3 6+\log_3 27-\log_3 2$의 값을 구하시오.

[풀이] $\log_3\frac{6\times 27}{2}=\log_3 3^4=4$

10 로그의 밑의 변환 공식

$a\neq 1$, $a>0$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq 1,\ c>0)$

② $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ $(b\neq 1)$

③ $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ $(c\neq 1,\ c>0)$

④ $a^{\log_a b}=b^{\log_a a}=b$

[증명] ① 번 증명

$\log_a b=x$, $\log_c a=y$로 놓으면 로그의 정의에 의하여

$a^x=b$, $c^y=a$ 이므로 지수의 성질에 의하여

$b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$이다.

즉 로그의 정의에 의하여 $xy=\log_c b$이므로

$\log_a b\times\log_c a=\log_c b$

양변 $\log_c a$로 나누면 다음과 같다.

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\frac{1}{\log_4 x}+\frac{1}{\log_9 x}=2$일 때 x의 값은?

[풀이] $\frac{1}{\log_4 x}+\frac{1}{\log_9 x}=\log_x 4+\log_x 9=\log_x 36=2$

따라서 $x=6\ (\because x>0)$

11 변형된 로그공식

a,b,c 가 1이 아닌 양수일 때

① $\log_a b\times\log_c d=\log_a d\times\log_c b$

② $\log_a b=\log_{a^2}b^2=\log_{a^3}b^3=\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}=\cdots=\log_{a^n}b^n$

(단, $n\neq 0$)

③ $\log_a b=\log_c d=\log_{ac}bd$

★ 로그의 곱에서 진수를 바꿔도 된다.

다음을 구하여라.

(1) $\log_a b\times\log_b a$

(2) $\log_a b\times\log_b c$

(3) $\log_a b\times\log_b c\times\log_c a$

[풀이] (1) 1 (2) $\log_a c$ (3) 1

$\log_a b+\log_b a$의 최솟값은? $(a>1,\ b>1)$

[풀이] $\log_a b+\log_b a\geq 2\sqrt{\log_a b\times\log_b a}=2$

※ 로그값이 양수이기 위한 조건

$\log_a b>0 \Leftrightarrow a>1$, $b>1$ 또는 $0<a<1$, $0<b<1$

12 로그의 자연수, 정수, 유리수 조건

(1) 자연수 또는 정수가 될 조건

① 지수형태로 변환한다.

② $\log_a f(n)=k$ (자연수를 k로 먼저 지정!)

③ $f(n)=a^k$

④ 이젠... 생각을 잘 하자.

(2) 유리수가 될 조건

① 지수형태로 변환한다.

② $\log_a b=\frac{q}{p}$ (p,q는 서로소인 자연수)

③ $a=c^p$, $b=c^q$ 이라 놓고 생각한다.

④ 이젠... 생각을 잘 하자.

$\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$의 값이 40이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오.

[풀이] [정답] 13

$\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}=\log_{16}4n^4-\log_{16}n$

$=\log_{16}4n^3$

따라서 $\log_{16}4n^3=k$ (단, $k\leq 40$인 자연수)이라 하면

$4n^3=16^k$ (단, $m\leq 40$인 자연수)

n의 개수를 구하는 것이깐 n을 주인공으로 정리하자.

$n=4^{\frac{2k-1}{3}}$

n은 자연수 이므로, $2k-1$은 3의 배수이다.

$k=2,5,8,\cdots 3l-1$

따라서 $3l-1\leq 40$을 만족시키는 최대 l의 값은 13

즉, k의 개수가 13개 이므로 자연수 n의 개수도 13개

13 로그 정수부분과 소수부분

$\log_a N=n+\alpha\ (0\leq\alpha<1)$

① 정수부분은 가우스 기호를 이용하여 나타낸다.

$\log_a N=[\log_a N]+\alpha$

② 정수부분은 진수의 범위를 결정한다.

$a^n\leq N<a^{n+1}$

③ 소수부분의 표현 $\alpha=\log_a N-[\log_a N]$

★정수부분이 변하기 직전의 N값에서 소수부분이 최대이다.

두 자리의 자연수 n에 대하여 $\log_9 n-[\log_9 n]$이 최대가 되는 n의 값을 구하시오.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[풀이] [정답] 80

두 자리 자연수 중 $\log_9 n$의 정수부분이 변하는 경계는 $N=81$이다. 따라서 $N=80$일 때 $\log_9 n-[\log_9 n]$의 값이 최대가 된다.

14 상용로그의 뜻

일상에서의 수는 대부분 10진법을 활용한다. 즉 10의 거듭제곱을 이용하여 표현되므로 밑을 10으로 하는 로그를 사용하면 편리한 경우가 많다.

따라서 특별히 밑을 10으로 하는 로그를 **상용로그**라 하고, 양수 N에 대하여 상용로그는 밑을 생략하여 기호로

$\log N$

과 같이 쓴다. 예를 들어 $\log_{10}2$는 간단히 $\log 2$와 같이 나타낸다.

15 상용로그표

0.01 의 간격으로 1.00 에서 9.99 까지 '한자리' 상용로그의 값을 소수점 아래 넷째 자리까지 근삿값으로 구하여 나타낸 수를 기록한 표이다.

$\log 5.26$ 의 값은?

[풀이]

수	0	1	…	6	…	9
…	…	…	…	…	…	…
5.1	.7076	.7084	…	.7126	…	.7152
5.2	.7160	.7168	…	.7210	…	.7235
5.3	.7243	.7251	…	.7292	…	.7316
…	…	…	…	…	…	…

※ 로그의 값, 정수부분과 소수부분

(1) 상용로그의 정수부분과 소수부분의 정의
양수 N에 대하여 $\log N = n + \alpha$(단, n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)로 나타낼 때
n을 $\log N$의 정수부분, α를 $\log N$의 소수부분이라 한다.

(2) 상용로그의 값이 음수인 경우, 정수부분의 표현
상용로그의 값이 음수인 경우에는 정수부분에서 1을 빼고 소수부분에 1을 더하여 소수부분을 양의 소수로 변형한 후 정수부분을 구한다.
예) $\log 0.526 = -0.2190 = -1 + 0.7210$

16 상용로그의 값의 계산

$\log N =$ (정수부분) + (소수부분)이라고 할 때,
진수 N의 정보를 (정수부분)과 (소수부분)을 통해 파악할 수 있다.

① 정수부분 $= \begin{cases} + & : 1\text{뒤에 붙은 } 0\text{의 개수} \\ - & : 1\text{앞에 붙은 } 0\text{의 개수} \end{cases}$

1) $\log N = n + \alpha$라고 할 때, N은 $n+1$자릿수 이다.
2) $\log N = -n + \alpha$라고 할 때, N은 소수점 n번째 자리에서 처음 0이 아닌 숫자가 나온다.

2^{30}은 m자리의 정수이고, $\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$은 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다. 이때 $m+n$의 값은? (단, $\log 2 = 0.3010$으로 계산한다.)

[풀이]
$\log 2^{30} = 30\log 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03 \quad \therefore m = 10$

$\log\left(\frac{1}{2}\right)^{30} = -\log 2^{30} = -10 + 0.97 \quad \therefore n = 10$

$\therefore m + n = 10 + 10 = 20$

② 소수부분은
$\log N$에서 N의 소수점을 옮겨 "진수를 한 자리"로 만든 로그값이다.
소수부분이 같은 두 상용로그의 진수는 숫자배열이 같다.

소수부분을 구하시오.
$\log 5243.2$의 소수부분 $\Rightarrow \log 5.2432$
$\log 0.0034215$의 소수부분 $\Rightarrow \log 3.4215$

※ 상용로그의 표현

(1) 두 상용로그의 소수부분이 같을 때
① $\log A - \log B =$ 정수
② $[\log A] - \log A = [\log B] - \log B$

(2) 두 상용로그의 소수부분의 합이 1일 때
① $\log A + \log B =$ 정수 (단, $\log A \ne$ 정수)
② $\log A - [\log A] + \log B - [\log B] = 1$

17 지수, 로그 실생활 활용

1. 만약 식이 주어져 있다면 식만 먼저보고 공식에 나와 있는 미지수의 의미를 파악한다.

2. 두 가지 상황이 주어지는 상황이면
① 주어진 공식이 지수형태 ⇨ 두 식을 나눠서 연립
② 주어진 공식이 로그형태 ⇨ 두 식을 빼서 연립

3. 공식이 문제에서 주어지지 않는 경우
① 일정 횟수 또는 기간마다 동일한 비율로 증가 또는 감소할 때 사용한다.
② $r\%$증가 : A ⇨ $A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$
$r\%$감소 : A ⇨ $A\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$
일정비율 증가 : A ⇨ $A \times r^n \quad (r>1)$
일정비율 감소 : A ⇨ $A \times r^n \quad (0<r<1)$

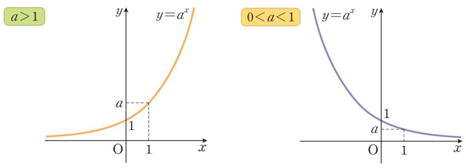
18 지수함수

지수에 미지수 x가 있는 함수를 지수함수라 한다.
$y = a^x$ (a 는 밑이라 한다.)
지수함수가 정의되려면 $a>0,\, a \ne 1$ 조건을 만족해야 한다.

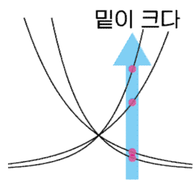
두 함수의 차이점을 비교하여라.
1) $f(x) = 3x$ 2) $g(x) = 3^x$
[풀이] 1) 밑이 변수이다. ⇨ 다항함수
2) 지수가 변수이다. ⇨ 지수함수

19 지수함수의 $y = a^x$의 개형

밑 > 1 이면 폭발적으로 증가하고, 0<밑<1 이면 그 반대이다.
지수함수는 다항함수와는 비교가 안 될 정도로 급격하게 증가하고, 급격하게 감소한다.



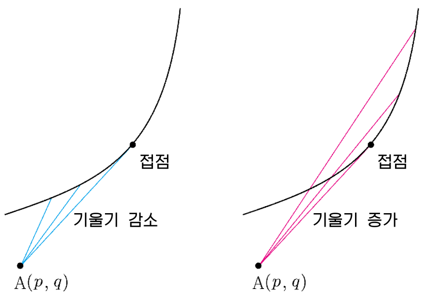
① 정의역은 실수 전체의 집합이고 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
② 기본 그래프는 두 점 $(0,\, 1)$, $(1,\, a)$를 지나고 x축$(y=0)$이 점근선이다.
③ $a>1$일 때 증가함수, $0<a<1$일 때 감소함수이다.
④ $y=a^x$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 y축에 대하여 서로 대칭이다.
(x대신 $-x$대입)
⑤ 교점을 기준으로 우측에 y축과 평행한 선을 그을 때 위쪽에 있을수록 밑이 크다.



20 두 점 사이 기울기와 그래프 개형

① 함수 $f(x)$에 대하여
$\frac{f(a)-q}{a-p}$
는 $(p,\ q)$와 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

② (p, q)가 곡선 밖일 때 기울기 변화에 '경계'가 존재



접점을 경계로 두 점 사이 기울기의 증감이 바뀐다.

③ (p, q)가 곡선 위의 점이면 볼록이 바뀌지 않는다면 기울기는 계속 증가하거나, 감소한다.

21 지수함수의 그래프의 이동

(1) 지수함수의 그래프의 평행이동

지수함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이고, 그 성질은 다음과 같다.

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 n보다 큰 실수 전체의 집합이다.

② 그래프는 점 $(m, 1+n)$을 지나고, 점근선은 $y=n$이다.

(2) 지수함수의 그래프의 대칭이동

x축 대칭	y대신 $-y$대입	$y=a^x$ ⇨ $-y=a^x$	$\therefore y=-a^x$
y축 대칭	x대신 $-x$대입	$y=a^x$ ⇨ $y=a^{-x}$	$\therefore y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$
원점 대칭	x대신 $-x$대입 y대신 $-y$대입	$y=a^x$ ⇨ $-y=a^{-x}$	$\therefore y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$

※ 지수함수의 일반형

$y=p\times a^{mx+n}+q$ 꼴이다.

① 일단 밑은 뭐지? : a^m

② p의 의미는? : x축 평행이동의 역할.
(요거 낚이지 말자!!!)

③ n은? : x축 평행이동의 역할

④ q는? : y축 평행이동

※ 지수함수 그래프 그리는 방법

$y=-3\times 2^{-3x+3}+2 \quad \cdots \quad ☆$

① 지수를 x로 만들어 밑을 찾는다.

: $-3\times 2^3\times 2^{-3x}+2$ ⇨ $-24\times\left(\frac{1}{8}\right)^x+2$

② 계수의 부호만 신경써서 지수함수를 그리자.

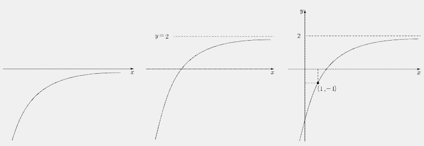
: $-\left(\frac{1}{8}\right)^x$의 그래프를 그린다.

③ 점근선을 평행이동하여 그린다. : $-\left(\frac{1}{8}\right)^x+2$

※ $24=\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_{\frac{1}{8}}24}$ 이므로

$24\times\left(\frac{1}{8}\right)^x=\left(\frac{1}{8}\right)^{x+\log_{\frac{1}{8}}24}$ 로 x축방향 평행이동

④ ☆그래프에서 딱 지날 것 같은 점을 표현하자.
(보통 지수가 0되는 지점) : $(1, -1)$



② ③ ④

22 거듭제곱꼴의 대소비교

수식으로 확인하기 어려운 대소 관계를 지수함수의 그래프를 이용하여 판단할 수 있다.

(1) 밑이 같을 때

지수함수 $y=a^x\ (a>0)$에서

① $a>1$일 때 ⇨ $m<n \rightarrow a^m<a^n$

② $0<a<1$일 때 ⇨ $m<n \rightarrow a^m>a^n$

1) 2^{-3}, $2^{\sqrt{2}}$, 2의 대소를 비교하여라.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$, $\left(\frac{1}{27}\right)^2$의 대소를 비교하여라.

[풀이]

1) 밑이 2인 지수함수의 그래프는 증가함수이기 때문에 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$-3<1<\sqrt{2}$ ⇨ $2^{-3}<2<2^{\sqrt{2}}$

2) 밑을 모두 $\left(\frac{1}{3}\right)$로 바꿀 수 있다. $\cdots\ \left(\frac{1}{27}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^6$

밑이 $\left(\frac{1}{3}\right)$인 지수함수의 그래프는 감소함수이기 때문에 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

$4<6$ ⇨ $\left(\frac{1}{3}\right)^4>\left(\frac{1}{3}\right)^6$

(2) 밑이 다를 때

지수를 같게 할 수 있는지 확인한다.

지수함수 $y=a^x\ (a>0)$에서 지수가 같다는 말은 x값이 같다는 뜻과 같다.

① $1<a<b$일 때 $m>0$이면 ⇨ $a^m<b^m$

② $1<a<b$일 때 $m<0$이면 ⇨ $a^m>b^m$

$3^{\frac{1}{4}}$, $2^{\frac{1}{3}}$의 대소를 비교하여라.

[풀이] 지수를 $\frac{1}{12}$로 통일한다.

$3^{\frac{1}{4}}=(3^3)^{\frac{1}{12}}$, $2^{\frac{1}{3}}=(2^4)^{\frac{1}{12}}$

$3^3=27 > 2^4=16$이기 때문에 $3^{\frac{1}{4}}>2^{\frac{1}{3}}$

23 지수함수의 최대와 최소

(1) 함수 $y=a^{f(x)}$의 최대와 최소

$m\le f(x)\le M$일 때, 함수 $y=a^{f(x)}$에 대하여

① $a>1$일 때 최댓값은 a^M, 최솟값은 a^m

② $0<a<1$일 때 최댓값은 a^m, 최솟값은 a^M

다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

1) $y=2^{x+2}-1\ (-1\le x\le 1)$

2) $y=3^x\times 2^{-2x+1}\ (-1\le x\le 1)$

3) $y=2^{-x^2+2x-3}$

[풀이]

1) $y=2^{x+2}-1$는 $y=2^x$의 그래프를 평행이동한 그래프이다. 증가함수이기 때문에 x값이 증가하면 y값도 증가한다. 따라서

최솟값 : $x=-1$대입 ⇨ $2^{-1+2}-1=1$

최댓값 : $x=1$ 대입 ⇨ $2^{1+2}-1=7$

2) $3^x\times 2^{-2x+1}=3^x\times 2^{2x}\times 2$

$=3^x\times\left(\frac{1}{4}\right)^x\times 2$

$=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^x$

이므로 함수 $y=2\times\left(\frac{3}{4}\right)^x$는 감소함수이기 때문에 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서,

최솟값 : $x=1$대입 ⇨ $2\times\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{3}{2}$

최댓값 : $x=-1$대입 ⇨ $2\times\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{8}{3}$

3) $-x^2+2x-3=t$라 하면 $t=-(x-1)^2-2$이므로 $t\le -2$이다.

따라서 $y=2^t$은 $t=-2$에서 최댓값 $\frac{1}{4}$를 갖는다.

(최솟값은 존재하지 않는다.)

(2) a^x의 치환

a^x이 여러 번 반복해서 나타날 때는 이를 치환하여 치환한 문자에 대한 함수의 최대와 최소를 구한다. 이때 치환한 문자의 값의 범위에 주의한다.

$a^x=t$라 할 때, x의 범위가 실수 전체이면 $t>0$이고, x의 범위가 제한되어 있으면 이에 따라 t의 범위도 제한된다.

$0\le x\le 2$에서 $y=9^x-4\times 3^x+1$로 정의된 함수의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

[풀이] $3^x=t$라 하면 $3^0\le 3^x\le 3^2$에서 $1\le t\le 9$

$9^x=(3^x)^2=t^2$ 이므로

$9^x-4\times 3^x+1=t^2-4t+1$이다.

이차함수 $y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

최댓값 : $t=9$대입 ⇨ $(9-2)^2-3=46$

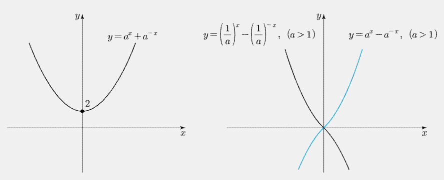
최솟값 : $t=2$대입 ⇨ $(2-2)^2-3=-3$

※ a^x+a^{-x} 또는 a^x-a^{-x}가 반복해서 나타날 때

① $a^x+a^{-x}\ge 2\sqrt{a^x\times a^{-x}}=2$ 최솟값 존재!
즉 범위 있다!

② a^x-a^{-x}는 범위 없다!! 실수전체!

※ 두 함수 $f(x)=a^x+a^{-x}$와 $g(x)=a^x-a^{-x}$의 그래프 개형을 기억하고 있는 것이 좋다~!



24 로그함수의 정의

로그함수 지수함수의 역함수이다.

지수함수 $y=a^x$ 에서 로그의 정의에 의해 $x=\log_a y$ 이고 이 때, x와 y를 서로 바꾸면 지수함수 $y=a^x$ 의 역함수

$$y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$$

를 얻을 수 있다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라 한다. 로그함수의 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

두 지수함수 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 역함수를 구해라.

[풀이]

1) $x=\log_2 y$에서 $y=\log_2 x$이다.

2) $x=\log_{\frac{1}{2}} x$에서 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$이다.

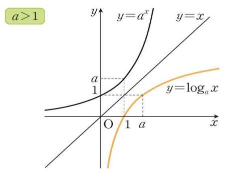
★서로 역함수관계인 지수함수와 로그함수는 밑이 같다.

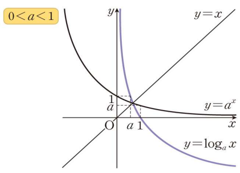
25 로그함수 $y=\log_a x$ 의 그래프 개형

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$의 그래프와 지수함수 $y=a^x$ 의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$a>1$일 때, 지수함수가 아래로 볼록하게 증가하고 로그함수는 위로 볼록하게 증가한다.

$0<a<1$일 때, 지수함수가 아래로 볼록하게 감소하고 로그함수도 아래로 볼록하게 감소한다.





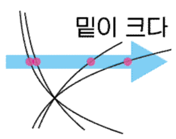
① 정의역은 양의 실수 전체집합, 치역은 실수 전체집합이다.

② 기본 그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(a, 1)$를 지나고 y축$(x=0)$이 점근선이다.

③ $(a>1)$일 때, 증가함수 $(1>a>0)$일 때, 감소함수이다.

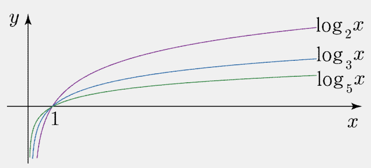
④ 로그함수 $y=\log_a x$와 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 그래프는 x축에 대하여 서로 대칭이다.

⑤ 교점을 기준으로 위쪽에 x축과 평행한 선을 그을 때 오른쪽에 있을수록 밑이 크다.



※ 밑의 크기에 따른 로그함수의 그래프 비교

$a>1$일 때 밑이 크면 축에 가깝다. (무겁다)



$0<a<1$일 때는 $\log_{\frac{1}{2}} x=-\log_2 x$로 바꿔서 x축 대칭하여 생각한다.

26 로그함수의 그래프의 이동

(1) 로그함수의 그래프의 평행이동

로그함수 $y=\log_a(x-m)+n$의 그래프는 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를 x축 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

① 정의역은 m보다 큰 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 그래프는 점 $(1+m, n)$을 지나고, 점근선은 $x=m$이다.

(2) 로그함수의 그래프의 대칭이동

x축 대칭	y대신 $-y$대입	$y=\log_a x$ ⇨ $-y=\log_a x$ ∴ $y=\log_{\frac{1}{a}} x$
y축 대칭	x대신 $-x$대입	$y=\log_a x$ ⇨ $y=\log_a(-x)$
원점 대칭	x대신 $-x$대입 y대신 $-y$대입	$y=\log_a x$ ⇨ $-y=\log_a(-x)$ ∴ $y=\log_{\frac{1}{a}}(-x)$

※ 로그함수의 일반형

$y=p\log_a(bx+c)+q$ 꼴이다.

① 일단 밑은 뭐지? : $a^{\frac{1}{p}}$ ★

② p의 의미는? : 밑을 변화시킨다.
(요거 낚이지 말자!!!)

③ b는? $y=\log_{a^{\frac{1}{p}}} b\left(x+\frac{c}{b}\right)+q$

⇨ x축 평행이동, 점근선 $x=-\frac{c}{b}$

만약 음수라면 $x=-\frac{c}{b}$ 선대칭

④ q는? y축 평행이동

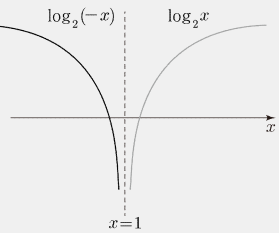
※ 로그함수 그래프 그리는 방법

$y=-\log_{\frac{1}{2}}(1-x)$

① 밑을 먼저 파악한다.
$y=-\log_{\frac{1}{2}}(1-x)=\log_2(1-x)$ 밑은 2구나!

② 점근선을 확인한다.
$y=\log_2(1-x)$ 점근선은 $x=1$

③ 대칭을 확인한다.
$y=\log_2(1-x)$ 엇 $-x$가 보인다.
y축 대칭처럼 생각 ($x=1$ 선대칭 시키자)



※ 주의!!

$y=2\log_2 x$ 와 $y=\log_2 x^2$	같은 함수가 아니다. $y=2\log_a x$ 의 정의역은 ⇨ $\{x \mid x>0\}$ $y=\log_a x^2$ 의 정의역은 ⇨ $\{x \mid x\neq 0$인 모든 실수$\}$ ※ $\log_2 x^2$와 $2\log_2\lvert x\rvert$는 같은 함수이다.
$y=\log_a x^3$ 와 $y=3\log_a x$	같은 함수이다. 정의역은 모두 $x>0$이다.

27 로그함수의 그래프를 이용한 대소관계

지수함수에서와 마찬가지로 수식으로 확인하기 어려운 대소관계를 로그함수의 그래프를 이용하여 판단할 수 있다.

로그함수 $y=\log_a x$에서

① $a>1$일 때 ⇨ $m<n \Leftrightarrow \log_a m<\log_a n$
부등식의 양변에 1보다 큰 밑을 취하거나 떼어내도 부등호 방향은 안 변한다.

② $0<a<1$일 때 ⇨ $m<n \Leftrightarrow \log_a m>\log_a n$
부등식의 양변에 1보다 작은 밑을 취하거나 떼어내면 부등호 방향은 변한다.

$\log_2 5$, $\log_4 23$, $\log_{\frac{1}{4}} 20$의 대소관계를 구하여라.

[풀이]

모두 밑을 2로 변형하면

$$\log_{2^2} 23=\frac{1}{2}\log_2 23=\log_2\sqrt{23}$$

$$\log_{2^{-2}} 20=\frac{1}{-2}\log_2 20=\log_2\frac{1}{\sqrt{20}}$$

이다. 밑이 2인 로그함수의 그래프는 증가함수이기 때문에 x값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$\frac{1}{\sqrt{20}}<\sqrt{23}<5$이므로 $\log_{\frac{1}{4}} 20<\log_4 23<\log_2 5$

28 로그함수의 최대와 최소

(1) 함수 $y=\log_a f(x)$의 최대와 최소

$m \le f(x) \le M$일 때, 함수 $y=\log_a f(x)$에 대하여

① $a>1$일 때 최댓값은 $\log_a M$, 최솟값은 $\log_a m$

② $0<a<1$일 때 최댓값은 $\log_a m$, 최솟값은 $\log_a M$

(2) $\log_a x$의 치환

$\log_a x$가 여러 번 반복해서 나타날 때는 이를 치환하여 치환한 문자에 대한 함수의 최대와 최소를 구한다. 이때 치환한 문자의 값의 범위에 주의한다.

$\log_a x = t$라 할 때, x의 범위가 양의 실수 전체이면 t의 범위는 실수 전체이고, x의 범위가 제한되어 있으면 이에 따라 t의 범위도 제한된다.

$2 \le x \le 3$일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+1)$의 최댓값을 구하시오.

[풀이]
밑이 $0<$ 밑 <1이기 때문에 감소함수이다.
x가 작을수록 값이 커진다. 따라서
최댓값 : $x=2$대입 ⇨ $\log_{\frac{1}{3}}(2+1) = -1$
최솟값 : $x=3$대입 ⇨ $\log_{\frac{1}{3}}(3+1) = -2\log 2$

$1 \le x \le 8$에서 정의된 함수 $y=(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

[풀이]
$\log_2 x = t$라 치환하면 $1 \le x \le 8$에서 $0 \le t \le 3$이다.
이때 $y=t^2-2t+3 = (t-1)^2+2$이므로
최댓값 : $t=3$대입 ⇨ $(3-1)^2+2 = 6$
최솟값 : $t=1$대입 ⇨ $(1-1)^2+2 = 2$
따라서 $M+m=8$

29 지수함수 로그함수의 관계

지수함수와 로그함수가 동시에 등장하면 둘이 서로 역함수인지 먼저 파악해봐야 한다.

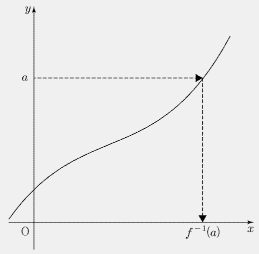
※ 역함수관계인 두 함수의 그래프 특징

① 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

② 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 (a, b)를 지나면 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점(b, a)를 지난다.
$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

③ 지수함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수인 로그함수 $y=f^{-1}(x)$의 교점을 (p, q)라 하면
$p=q$, $f(p)=p$
이다.(증가함수에서)

④ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 주어질 때, $f^{-1}(a)$의 값은 그림과 같이 점$(f^{-1}(a), a)$의 x좌표로 표시할 수 있다.



두 곡선 $y=2^x$, 4^x와 직선 $y=k(k>0)$의 교점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB의 길이를 k에 대하여 나타내시오.

[풀이] $A(\log_2 k, k)$, $B(\log_4 k, k)$이므로

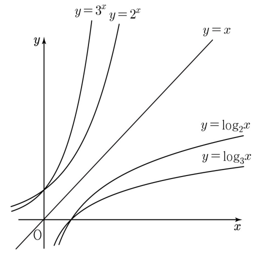
$$\overline{AB} = \log_2 k - \log_4 k = \log_2 \frac{k}{\sqrt{k}} = \log_2 \sqrt{k}$$

ex) 지수함수 $y=(\sqrt{2})^x$과 로그함수 $y=\log_{\sqrt{2}} x$의 그래프는 $y=x$에 대칭이고 두 그래프는 $x=2$와 $x=4$에서 만난다.

30 변화에 따른 역함수의 관계 파악

(1) 밑의 변화에 따른 역함수 관계파악

a가 1보다 클 때는 a의 절댓값이 커질수록 지수함수와 로그함수 모두 직선 $y=x$에 대하여 멀어진다.

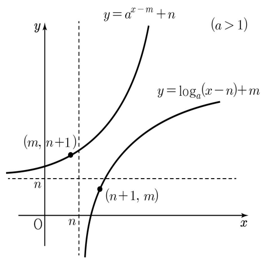


(2) 평행이동에 따른 역함수 관계파악

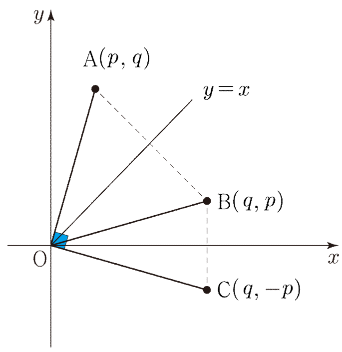
지수함수 : $y=a^{x-m}+n$

로그함수 : $y=\log_a(x-n)+m$

★ $y=x$대칭을 유지하며 평행이동 하고 있는지 확인하자.



31 지수함수와 로그함수의 대칭이동 종합

x축 대칭이동	y ➡ $-y$	① $y=a^x$에서 $-y=a^x$이므로 $y=-a^x$ ② $y=\log_a x$에서 $-y=\log_a x$이므로 $y=-\log_a x = \log_{\frac{1}{a}} x$
y축 대칭이동	x ➡ $-x$	① $y=a^x$에서 $y=a^{-x}$ ② $y=\log_a x$에서 $y=\log_a(-x)$ (정의역이 $x<0$임을 주의)
$y=x$ 대칭이동	x ➡ y y ➡ x	① $y=a^x$는 $y=\log_a x$ ② $y=\log_a x$는 $y=a^x$
원점 대칭이동	x ➡ $-x$ y ➡ $-y$	① $y=a^x$에서 $-y=a^{-x}$이므로 $y=-a^{-x}$ ② $y=\log_a x$에서 $-y=\log_a(-x)$이므로 $y=-\log_a(-x)$ (정의역이 $x<0$임을 주의)
수직 이동		'$y=x$대칭' & '축' 대칭이면 수직관계를 확인하자.  ★ $y=a^x$를 시계방향으로 90도 회전한 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$

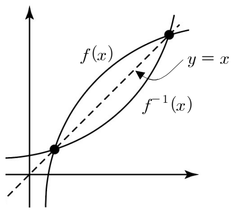
32 지수함수와 로그함수의 교점

(1) 증가함수

$y=x$ 위에서만 교점을 갖는다.

그래서 $f(x)=g(x)$ 의 교점을 찾을 때

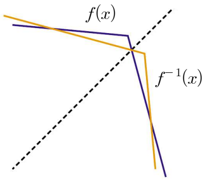
$f(x)=x$의 교점을 찾아도 된다.



(2) 감소함수

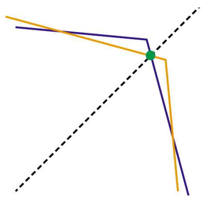
1. 역함수끼리의 교점개수가 유한개일 때

일단 아래와 같이 $f(x)$, $g(x)$가 감소함수이면서 서로 역함수 관계이다.

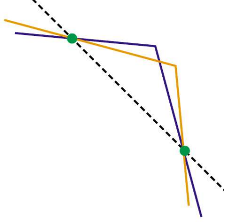


2. 이때 교점은 2가지의 특성을 나타낸다.

① $y=x$위 교점이다.



② $y=x$ 위에 있는 점이 아닌! 기울기 -1 인 직선위에 있으면 항상 짝수개로 존재하는 점이다.



따라서 이때 교점은 홀수개로 존재한다.

3. 역함수끼리의 교점개수가 무한개일 때

예제) $y=-x+3$의 역함수는?

자기자신 이다. 따라서 위와 같이 감소함수인데, 기울기가 -1 인 직선은 교점개수가 무한개이다.

33 $y=ka^x$ $y=k\log_a x$ $y=a^{kx}$ $y=\log_a(kx)$ 그래프를 바라보는 관점

(1) $y=ka^x$

① $y=a^x$에 대하여 y값을 k배한 그래프

② $y=ka^x=a^{\log_a k}\times a^x=a^{x+\log_a k}$

따라서 $y=a^x$ 의 그래프를 x축으로 $-\log_a k$만큼 평행이동한 그래프이다.

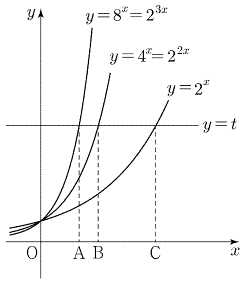
(2) $y=k\log_a x$

① $y=\log_a x$에 대하여 y값을 k배한 그래프

② $k\log_a x=\log_{a^{\frac{1}{k}}} x$이므로 $y=\log_a x$에서 밑을 변화시킨 그래프

(3) $y=a^{kx}$

① $y=a^x$에 대하여 x축으로 $\frac{1}{k}$배한 그래프



$\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{OC}}$

$\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OC}}$

(4) $y=\log_a(kx)$

① $y=\log_a(kx)=\log_a x+\log_a k$ 따라서 $y=\log_a x$의 그래프를 y축으로 $\log_a k$만큼 평행이동한 그래프이다.

k가 a일 경우 y축 방향으로 1만큼 증가한다.

② $y=\log_a x$에 대하여 x축으로 $\frac{1}{k}$배한 그래프

34 지수함수 로그함수의 기하적 관찰

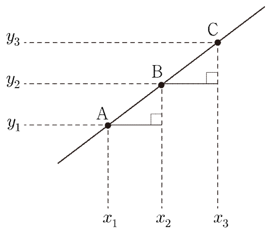
(1) 한 직선 위의 세 점

세 점 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$, $\mathrm{C}(c_1, c_2)$가 한 직선 위에 있을 때, 다음과 같은 방법을 이용한다.

① $\overline{\mathrm{AB}}$ 기울기 = $\overline{\mathrm{BC}}$ 기울기 = $\overline{\mathrm{CA}}$ 기울기

② 수선의 발을 내린 후 직각삼각형의 닮음

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=|a_1-b_1|:|b_1-c_1|=|a_2-b_2|:|b_2-c_2|$



(2) 기울기와 넓이

① $\frac{(y좌표)}{(x좌표)}$ ➡ 기울기

② $(x좌표)\times(y좌표)$ ➡ 직사각형의 넓이

1) $\frac{f(a)}{a}$ 의 기하적 의미는?

2) 직선 $y=-x+k\ (k>1)$와 두 곡선 $y=2^x$, $y=3^x$와의 교점을 각각 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{A}(x_2, y_2)$라 할 때 x_1y_1과 x_2y_2의 대소 관계를 비교하면?

[풀이]

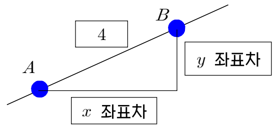
1) 원점과 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기

2) 넓이를 이용하는데, x좌표와 y좌표의 합이 일정한 상황에서 $x+y=k$ 직선 $y=x$에 가까운 점이 넓이가 크다. 따라서 $x_1y_1<x_2y_2$

(3) 좌표를 예측할 수 있는 상황들

① 기울기 좌표차 선분길이는 한 세트

선분길이와 기울기가 주어져 있다? 좌표차 생각!



$\overline{\mathrm{AB}}=4$, 기울기 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 두 점 A, B의

x 좌표차 $=2\sqrt{3}$, y 좌표차 $=2$

※ 직선 위의 임의의 두 점을 연결한 직각삼각형에서 한 변의 길이를 알면, 나머지 변의 길이를 구할 수 있다

직선의 기울기가 $\pm\sqrt{3}$, ±1, $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$으로 주어진 경우,

x축의 양의 방향과 이루는 각이 특별하다!

특히, -1인 경우에는, 역함수의 성질을 활용할 수 있지 않을까?

② 평행이동관계인 두 그래프와 직선과의 교점이 있을 때

평행이동 비율과 직선의 기울기가 같은지 확인하자.

직선 $y=-2x+5$가 두 곡선 $y=a^x+4$와 $y=a^{x-2}$와 만나는 교점을 A, B라 하자.

두 점 A와 B의 좌표를 구하여라.

[풀이]

점 A는 y축위에 있다. $\therefore \mathrm{A}(0, 5)$

곡선 $y=a^x+4$에서 곡선 $y=a^{x-2}$로 x축 방향 $+2$만큼, y축 방향 -4만큼 평행이동한다. 따라서 평행이동 비율은 $\frac{-4}{+2}=-2$ 이다.

이때 직선의 기울이는 -2이므로 평행이동비율과 직선의 기울기가 같다.

따라서 평행이동 되는 지수함수도 만족하고 직선도 만족하는 점이 된다.

그러므로 점 A를 x축 방향 $+2$만큼, y축 방향 -2만큼 평행이동하면 점 B점이 된다. $\therefore \mathrm{B}(2, 1)$

35 지수방정식

지수에 미지수를 포함하고 있는 방정식을 지수방정식이라고 한다.

지수함수 $y=a^x$는 실수 전체의 집합에서 양의 실수전체의 집합으로의 일대일대응이므로 임의의 양수 p에 대하여 지수함수 $a^x=p$는 단 한 개의 해 $x=\log_a p$를 갖는다.

$$a^{x_1}=a^{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2 \quad (a>0, a\neq1)$$

(1) 밑이 같을 때의 지수방정식

※ 지수방정식의 밑 조건

밑이 같은 방정식은 직접 계산이 가능하다.

이때는 지수함수 조건이 아니라, 지수조건이다.

즉 밑 $a=1$인 상황도 고려해야 한다.

방정식 $x^{2x+1}=x^{x+3}\ (x>0)$을 만족하는 모든 x의 값의 곱을 구하시오.

[풀이]

$x^{2x+1}=x^{x+3}$에서

$x=1$일 때, $1^3=1^4$이므로 성립

$x\neq1$일 때, $2x+1=x+3$ $\therefore x=2$ 따라서, x의 값의 곱은 $1\times2=2$

(2) 지수함수가 반복될 때 지수방정식

만약 지수가 반복된다면 치환하자 $a^x=t\ (t>0)$로 치환한다. 치환한 t에 관한 이차방정식의 근을 구한 뒤 다시 x의 값으로 변환하자.

지수방정식 $4^x - 7\times 2^{x+1} - 32 = 0$을 만족하는 x의 값을 구하시오

[풀이]

$(2^x)^2 - 14\times 2^x - 32 = 0$에서 $2^x = t\,(t>0)$로 놓으면

주어진 방정식은

$t^2 - 14t - 32 = 0$

$(t+2)(t-16) = 0 \quad \therefore t = 16\,(\because t>0)$ 즉, $x^2 = 16 = 2^4$

따라서 구하는 근은 $x = 4$

(3) 밑이 다를 때

① 지수가 0일 수 있다. ex) $3^0 = 2^0 = 1$

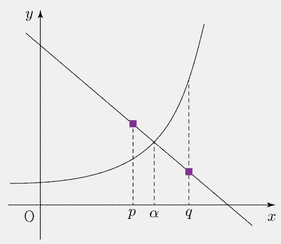
② 밑이 상수고 서로 다를 때

$\Rightarrow$ 양변에 로그를 취한다.

$a^{f(x)} = b^{g(x)} \quad \Rightarrow \log a^{f(x)} = \log b^{g(x)}$

※ 초월함수의 방정식

직접 구할 수 없는 경우가 더 많다.



α 를 직접 구할 수 없고, $p<\alpha<q$ 범위로 구해야 하는데 이때 p, q에서 대소관계의 변화가 있어야 한다.

$2^x = -x+7$의 실근을 α라 할 때, α의 범위를 구하면?

① $-1<\alpha<0$ ② $0<\alpha<1$ ③ $1<\alpha<2$
④ $2<\alpha<3$ ⑤ $3<\alpha<4$

[풀이] 정답 ④

근을 직접 구할 수 없을 때 대소관계 변화를 통해서 해의 범위를 구하자.

$x=2$일 때는 $y=-x+7$의 함수값이 $y=2^x$의 함수값보다 크므로, $y=-x+7$의 그래프가 $y=2^x$의 그래프보다 더 위에 있다.

$x=3$일 때는 $y=2^x$의 함수값이 $y=-x+7$의 함수값보다 크므로, $y=2^x$의 그래프가 $y=-x+7$의 그래프보다 더 위에 있다.

36 지수부등식

지수에 미지수를 포함하고 있는 부등식을 지수부등식이라고 한다.

(1) 밑이 같을 때

지수함수 $y=a^x\,(a>0)$에서

① $a>1$일 때 $\Rightarrow m<n \Leftrightarrow a^m<a^n$

② $0<a<1$일 때 $\Rightarrow m<n \Leftrightarrow a^m>a^n$

밑이 1보다 크면 부등호 그대로!

0 < 밑 < 1 이면 부등호 반대! 이것만 조심하자!

(2) 밑이 다를 때

로그를 씌워서 대소관계를 파악하자! 양변에 밑이 1보다 큰 로그를 취한다. (1보다 작은 로그를 양변에 취하면 부등호 방향이 반대가 된다.)

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Rightarrow \log a^{f(x)} > \log b^{g(x)}\ (a>1)$

(3) 밑이 미지수일 때

밑의 범위에 따라 분류를 한다.

$$\text{밑} = \begin{cases} a>1 \\ a=1 \\ 0<a<1 \end{cases}$$

부등식 $4^{x+4} < 2^{x^2}$의 해를 구하시오.

[풀이] 일단 밑을 같게 할 수 있는지 확인한다.

$4^{x+4} = 2^{2x+8} < 2^{x^2}$이므로 $2x+8 < x^2$이다.

$0 < x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2) \quad \therefore x<-2$

또는 $x>4$

부등식 $2^{2x-1} < 3^{x-3}$의 해를 구하시오.

[풀이] 밑을 같게 할 수 없다.

$2^{2x-1} < 3^{x-3}$의 양변에 상용로그를 취하면

$(2x-1)\log 2 < (x-3)\log 3$

$x(2\log 2 - \log 3) < \log 2 - 3\log 3$

양변을 $(2\log 2 - \log 3)$으로 나눌 때, 반드시 부호판단

$\therefore x < \dfrac{\log 2 - 3\log 3}{2\log 2 - \log 3}$

※ 치환을 이용한 부등식

① $a^x = t\,(t>0)$로 치환한다.

② 치환한 t에 관한 부등식을 해결한 뒤, ①을 이용하여 x의 범위를 구해낸다. 이때, 부등식의 해를 구할 때 $t>0$조건을 꼭 생각해야 한다.

정의역 범위가 있다면,

판별식 금지! 판별식 금지! 판별식 금지!

모든 실수 x에 대하여, 지수부등식 $4^x - 2^{x+1} - a > 0$가 성립할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

[풀이] 범위에 제한 있을 때 판별식 금지! 꼭 그래프 그리자!

$(2^x)^2 - 2\times 2^x - a > 0 \quad \cdots ①$

여기서 $2^x = t$로 놓으면 $t>0$이고,

$t^2 - 2t - a > 0 \quad \cdots ②$

$t^2 - 2t > a\ (t>0) \Rightarrow \begin{cases} y = t^2 - 2t\ (t>0) \\ y = a \end{cases}$

모든 실수 x에 대하여 $(2^x)^2 - 2\times 2^x - a > 0$가 성립하려면 $y = t^2 - 2t\ (t>0)$ 그래프가 $y=a$ 그래프보다 항상 위에 있어야 하므로

$\therefore\ a < -1$

37 로그방정식

밑 또는 진수에 미지수를 포함하고 있는 방정식을 로그방정식이라고 한다.

로그함수 $y=\log_a x$는 양의 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로 일대일대응이므로 임의의 양수 p에 대하여

로그방정식 $\log_a x = p$는 단 한 개의 해 $x = a^p$을 갖는다.

$\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad (a>0, a\neq 1)$

(1) 밑이 같도록 변형

로그방정식의 밑이 같도록 $\log_a f(x) = \log_a g(x)$꼴로 변형하여 $f(x) = g(x)$를 푼다.

이때, $f(x)>0$, $g(x)>0$ 진수조건을 주의하자.

다음을 구하여라.

1) 방정식 $\log_2|x-2| = 3$ 을 만족하는 x의 값을 구하시오.

2) 방정식 $\log_2(x-2) = \log_4 x$의 해를 구하시오.

[풀이]

1) 지수로 바꿔서 해를 구하자.

$2^3 = |x-2|\ \therefore x = 10$ 또는 -6

2) 양변의 밑을 4로 같게 하면

$\log_4(x-2)^2 = \log_4 x$이므로 $x^2 - 4x + 4 = x$

$(x-4)(x-1) \quad \therefore x=1$ 또는 $x=4$

이때 진수조건에 따라 $x-2>0$ 이므로 $x=4$이다.

(2) $\log_a x$의 치환

만약 $\log_a x$가 여러 번 반복된다면

$\log_a x = t$

로 치환하여 t에 관한 방정식의 근을 구한 뒤 다시 x의 값으로 변환하자.

이때 x의 범위가 양의 실수 전체이면 t의 범위는 실수전체이고, x의 범위가 제한되어 있다면 이에 따른 t의 범위도 제한된다.

방정식 $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$의 두 실근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

[풀이] $\log_2 x = t$로 치환하면

$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2) = 0$이므로 $t=1$또는 2이다.

이때 $t = \log_2 x = 1$또는 $t = \log_2 x = 2$이므로

$x=2$또는 $x=4$이다. $\therefore\ \alpha+\beta = 6$

※ 치환을 이용한 로그방정식에서의 근과 계수와의 관계

로그 방정식에서 $\log_a x = t$(t는 실수)로 치환하여 이차방정식을 얻었을 때, 로그방정식의 두 실근 p, q이면 이차방정식의 두 실근은 $\log_a p$, $\log_a q$이므로

$\log_a p + \log_a q = \log_a pq$

임을 이용하여 로그방정식의 두 실근의 곱 pq를 쉽게 구할 수 있다.

이때 $\log_a p + \log_a q$는 이차방정식의 두 실근의 합이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 구하면 된다.

방정식 $(\log_3 x)^2 + k\log_3 x - 6 = 0$의 두 근의 곱이 3일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

[풀이] 주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha\beta = 3$

$\log_3 x = t$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2 + kt - 6 = 0$

이 방정식의 해는 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha + \log_3\beta = -k, \qquad \log_3\alpha\beta = -k$

$\therefore\ k = -\log_3 3 = -1$

(3) 지수에 로그가 있는 로그방정식

$x^{\log_a x}$ 를 포함하고 있는 방정식은 양변에 밑이 a인 로그를 취한다.

방정식 $2^{\log_8 x}=3$을 만족하는 x의 값을 구하시오.

[풀이] $2^{\log_8 x}=3$에서 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

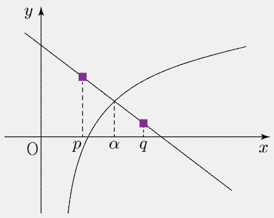
$\log_2 2^{\log_8 x}=\log_2 3$, $\log_8 x\cdot\log_2 2=\log_2 3$

$\log_8 x=\log_2 3=\log_{2^3} 3^3=\log_8 27$

$\therefore\ x=27$

※ 초월함수의 방정식

직접 구할 수 없는 경우가 더 많다.



α 를 직접 구할 수 없고, $p<\alpha<q$ 범위로 구해야 하는데 이때 p, q에서 대소관계의 변화가 있어야 한다.

$\log_2 x=-x+4$의 실근을 α라 할 때, α의 범위를 구하면?

① $-1<a<0$ ② $0<a<1$ ③ $1<a<2$
④ $2<a<3$ ⑤ $3<a<4$

[풀이] 정답 ④

근을 직접 구할 수 없을 때 대소관계 변화를 통해서 해의 범위를 구하자.

$x=2$일 때 곡선 $y=\log_2 x$의 y좌표는 1이고 직선 $y=-x+4$의 y좌표는 2이므로 직선이 곡선보다 위에 있다.

$x=3$일 때 곡선 $y=\log_2 x$의 y좌표는 $\log_2 3>1$ 직선 $y=-x+4$ y좌표는 1이므로 곡선이 직선보다 위에 있다.

따라서 실근 a가 포함된 범위는 $2<a<3$ 이다.

38 로그부등식

밑 또는 진수에 미지수를 포함하고 있는 부등식을 로그부등식이라고 한다.

(1) 밑이 같도록 변형

$\log_a f(x)>\log_a g(x)$에서

① $a>1$일 때 ⇨

$0<f(x)<g(x)\Leftrightarrow \log_a f(x)<\log_a g(x)$

부등식의 양변에 1보다 큰 밑을 취하거나 떼어내도 부등호 방향은 안 변한다.

② $0<a<1$일 때 ⇨

$0<f(x)<g(x)\Leftrightarrow \log_a f(x)>\log_a g(x)$

부등식의 양변에 1보다 작은 밑을 취하거나 떼어내면 부등호 방향은 변한다.

부등식 $\log_{\frac{1}{2}}\{\log_4(\log_3 x)\}>0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

[풀이]

진수의 조건에서 $x>0$, $\log_3 x>0$, $\log_4(\log_3 x)>0$

$\log_4(\log_3 x)>\log_4 1$에서 $\log_3 x>1$

$\therefore\ x>3$ ⋯ ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}\{\log_4(\log_3 x)\}>0$에서

$\log_{\frac{1}{2}}\{\log_4(\log_3 x)\}>\log_{\frac{1}{2}} 1$

밑이 1보다 작으므로 $\log_4(\log_3 x)<1$

밑이 1보다 크므로 $\log_3 x<4$

$\therefore\ x<81$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $3<x<81$

따라서 정수 x는 4, 5, 6, ⋯, 80의 77개다.

★ 진수조건 까먹지 말자!

(2) $\log_a x$의 치환

만약 $\log_a x$가 여러번 반복된다면

$\log_a x=t$

로 치환하여 t에 관한 방정식의 근을 구한 뒤 다시 x의 값으로 변환하자.

이때 x의 범위가 양의 실수 전체이면 t의 범위는 실수전체이고, x의 범위가 제한되어 있다면 이에 따른 t의 범위도 제한된다.

(3) 지수에 로그가 있는 로그 부등식

$x^{\log_a x}$를 포함하고 있는 방정식은 양변에 밑이 a인 로그를 취한다.

부등식 $\log_2(5-x)<\log_2(x+3)+1$의 해가 $\alpha<x<\beta$ 일 때 $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

[풀이]

밑을 같게 하면 $\log_2(5-x)<\log_2 2(x+3)$이므로

$5-x<2x+6$ ⋯ $-1<3x$ 따라서 $-\frac{1}{3}<x$

이때 진수조건에 따라 $5-x>0$이므로

$\therefore\ -\frac{1}{3}<x<5$ $\alpha+\beta=\frac{14}{3}$

임의의 양수 x에 대하여 부등식 $(\log x)^2-\log x+k>0$이 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

[풀이]

$(\log x)^2-\log x+k>0$에서 $\log x=t$로 놓으면

$t^2-t+k>0$

$x>0$에서 주어진 부등식이 성립하려면 모든 실수 t에 대하여 위의 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $t^2-t+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4k<0$ $\therefore\ k>\frac{1}{4}$

★ $x>0$이라면, $\log_a x=t$ 치환했을 때 t의 범위가 실수전체이기 때문에! 범위에 제한이 없어서 판별식 써도 된다.

※ 특수한 형태의 지수, 로그방정식

(1) $f(x)^{g(x)}=f(x)^{h(x)}$꼴 $(f(x)>0)$

① $g(x)=h(x)$

② $f(x)=1$

(2) $f(x)^{h(x)}=g(x)^{h(x)}$꼴 $(f(x)>0,\ g(x)>0)$

① $f(x)=g(x)$

② $h(x)=0$

(3) $f(x)^{g(x)}=1$꼴 $(f(x)>0)$

① $f(x)=1$

② $g(x)=0$

③ $f(x)=-1,\ g(x)=$(짝수)

(4) $x^{\log_a x}$꼴

양변에 밑이 a인 로그를 취한다.

※ 부등식이 항상 성립할 조건

(1) 항등식의 성질 이용

모든 실수 x에 대하여 $a^x+b>0$이면, $b\ge 0$이다.

(2) 판별식 이용

모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+b>0$이면, $D<0$이다.

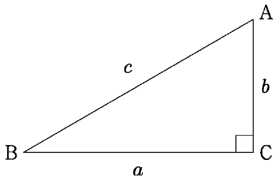
(3) 제한된 범위에서 부등식이 성립할 조건

① 함수의 최대, 최소문제로 해석한다.

② 미정계수가 있는 항을 이항시켜서 두 함수 사이의 위치관계를 판단.

39 삼각비와 삼각함수

우리는 이미 중등교과에서 직각삼각형을 통한 삼각비를 통해 sin, cos, tan의 개념을 학습하였다. 이때 삼각비로 나타낼 수 있는 각은 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$으로 한정하여 배우게 된다. 수학1 교과에서는 예각으로 한정되었던 삼각비의 정의를 각의 범위를 '실수'로 확장하여 다루게 된다. 이렇게 정의된 삼각비를 삼각함수라고 정의한다.



① $\sin B = \dfrac{\text{높이}}{\text{빗변}} = \dfrac{b}{c}$

② $\cos B = \dfrac{\text{밑변}}{\text{빗변}} = \dfrac{a}{c}$

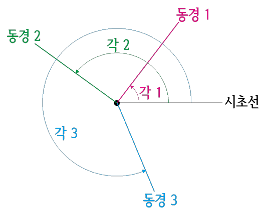
③ $\tan B = \dfrac{\text{높이}}{\text{밑변}} = \dfrac{b}{a}$

40 동경과 일반각

각은 두 반직선으로 정의되기 때문에 일반화를 위한 기준선이 필요하다. 이 기준선을 '시초선(始初線)'이라 한다. 시초선과 각을 이루는 반직선을 '동경'이라고 한다.

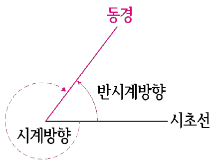
※ 동경(動徑) : 움직이는 반지름

① 각은 동경의 위치표현이다.



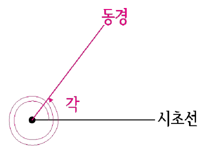
[동경1]의 위치는 [각1]로 표현된다.
[동경2]의 위치는 [각2]로 표현된다.
[동경3]의 위치는 [각3]으로 표현된다.

② 각은 부호가 있다.



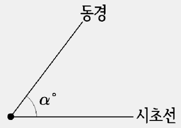
시초선을 기준으로 시계반대방향으로 회전하여 생기는 각은 +로 정의한다.
시초선을 기준으로 시계방향으로 회전하여 생기는 각은 −로 정의한다.

③ $360^\circ \times n$ 차이가 나면 같은 동경을 표현한다.



30°
$30^\circ + 360^\circ$ ⇨ 모두 같은 동경을 표현한다.
$30^\circ + 360^\circ \times 2$
⋮

※ 일반각



동경을 나타내는 각은 무한히 많을 수 있다. 이 무수히 많은 각을 통합해서 표현한 것을 일반각이라 한다.

$$\theta = \alpha^\circ + 360^\circ \times n \ (n\text{은 정수})$$

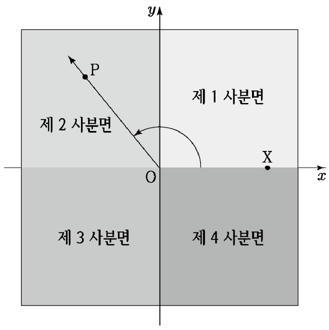
★ 일반각을 나타낼 때 각의 크기 α°는 보통 $0^\circ \leq \alpha^\circ < 360^\circ$인 각을 택한다.

다음 각의 동경을 좌표평면에 표현하고, 나타내는 일반각을 구하시오.
1) 60° 2) 400° 3) -120° 4) -380°

[풀이]
1) $60^\circ + 360^\circ \times n$ (n은 정수)
2) $40^\circ + 360^\circ \times n$ (n은 정수)
3) $240^\circ + 360^\circ \times n$ 또는 $-120^\circ + 360^\circ \times n$ (n은 정수)
4) $340^\circ + 360^\circ \times n$ 또는 $-20^\circ + 360^\circ \times n$ (n은 정수)

41 사분면의 각

좌표평면의 O에서 시초선 OX를 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 동경 OP가 좌표평면의 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있으면 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제 1사분면의 각, 제 2사분면의 각, 제 3사분면의 각, 제 4사분면의 각이라고 한다.



★ 동경이 좌표축 위에 있을 때는 어느 사분면에도 속하지 않는다.
사분면의 각은 일반각으로 표현한다.

[예] 1사분면의 각 : $0 + 360^\circ n < \theta < \dfrac{\pi}{2} + 360^\circ n$

※ 미지수를 포함하고 있는 각이 나타내는 동경의 개수
1) $n = 1, 2, 3, \cdots$ 차례로 대입하여 단위원에 동경을 표시하고 주기성을 찾는다.
2) 동경의 일치조건 이용

정수 n에 대하여 $170^\circ \times n + 10^\circ$를 나타내는 서로 다른 동경의 개수를 구하시오.

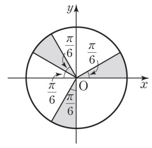
[해설]
10°를 나타내는 동경과 $170^\circ \times n + 10^\circ$를 나타내는 동경이 일치한다고 하면
$170^\circ \times n + 10 = 360^\circ \times m + 10^\circ$ (m은 정수)
$\therefore n = \dfrac{36}{17}m$
즉 구하는 서로 다른 동경의 개수는 위의 식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값과 같으므로 36이다.

제k사분면의 각 θ에 대하여 3θ가 제1사분면의 각이고 4θ는 제3사분면의 각이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

[해설]
3θ가 제1사분면의 각이므로

$$2n\pi < 3\theta < 2n\pi + \frac{\pi}{2} \ (\text{단, } n\text{은 정수})$$

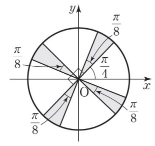
$\dfrac{2n}{3}\pi < \theta < \dfrac{2n}{3}\pi + \dfrac{\pi}{6}$이고 θ를 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.



4θ는 제3사분면의 각이므로

$$(2m-1)\pi < 4\theta < (2m-1)\pi + \frac{\pi}{2} \ (\text{단, } m\text{은 정수})$$

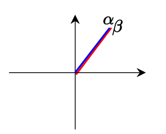
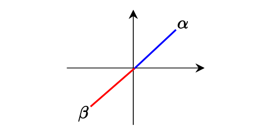
$\dfrac{m}{2}\pi - \dfrac{\pi}{5} < \theta < \dfrac{m}{2}\pi - \dfrac{\pi}{8}$이고 θ를 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



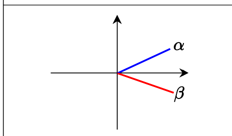
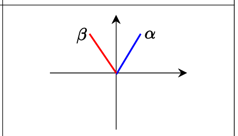
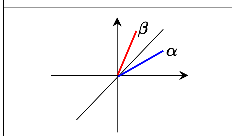
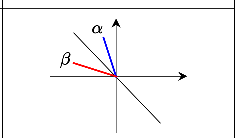
위 그림을 통해 겹치는 부분의 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이므로 모든 k의 값의 합은 $2+3=5$

42 동경의 위치관계

① 두 동경이 일직선 위 ⇒ 두 각의 차를 이용

㉠ 일치한다.	㉡ 일직선상에 있고 방향이 반대
	
$\alpha - \beta = 2n\pi$	$\alpha - \beta = 2n\pi + \pi$

② 두 동경이 선대칭 ⇒ 두 각의 합을 이용

㉠ x축에 대칭	㉡ y축에 대칭
	
$\alpha + \beta = 2n\pi$	$\alpha + \beta = 2n\pi + \pi$
㉢ $y = x$축에 대칭	㉣ $y = -x$축에 대칭
	
$\alpha + \beta = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$	$\alpha + \beta = 2n\pi + \dfrac{3\pi}{2}$

③ $y = \tan\theta x$에 대해 선대칭 ⇨ $\alpha + \beta = 2\theta + 2\pi n$

★$y = \sqrt{3}x$처럼 특수각을 이용한 직선에 대해 선대칭이면

$\alpha + \beta = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$

처럼 나타내면 된다.

제2사분면의 각 θ에 대하여 각 θ가 나타내는 동경과 각 3θ가 나타내는 동경이 직선 $y=\sqrt{3}x$에 대하여 대칭일 때, $\sin^2\theta+\cos\theta$의 값은?

[해설]

각 θ가 나타내는 동경과 각 3θ가 나타내는 동경이 직선 $y=\sqrt{3}x$에 대하여 대칭이므로

$$\theta+3\theta=\frac{2}{3}\pi+2n\pi\ (n\text{은 정수})$$

$$4\theta=\frac{2}{3}\pi+2n\pi \qquad \therefore\ \theta=\frac{1}{6}\pi+\frac{n}{2}\pi$$

θ는 제2사분면의 각이므로 $n=\cdots\ -3,\ 1,\ 5,\ \cdots$

이때 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

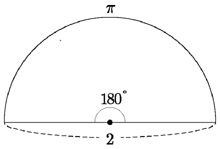
$$\sin^2\theta+\cos\theta=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

43 호도법

호의 길이를 이용해서 도(각)를 타내는 방법이다. 방법은 180°를 π라고 생각한다.

$180^\circ=\pi\quad\cdots$ (※)

마치 위 식이 등식처럼 쓰여 있지만 사실은 비례식이다.



$180^\circ=\pi\times(1\text{라디안})$

위 등식이 정확한 표현이다.

하지만 문제 상황에서 직관적으로 180°를 π로 연동하여 사용하는 것이 편리하기 때문에 (※)처럼 알고 있는 것이 유용하다.

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{라디안},\quad 1\text{라디안}=\frac{180^\circ}{\pi}\fallingdotseq 57.325^\circ$$

★ 라디안(radian)은 반지름을 의미하는 radius와 각을 의미하는 angle의 합성어이다.

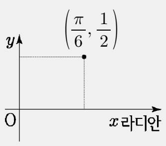
★ 육십분법 : 1회전(360°)를 360등분하여 나타낸 각의 단위

※ 호도법의 탄생이유

뜬금없지만 효율 때문이다.

$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$이기 때문에 곡선 $y=\sin x^\circ$는 점$\left(30,\frac{1}{2}\right)$을 지난다. 이를 좌표평면에 나타내면 아래처럼 좌우상하 밸런스가 비효율적이다.

그런데 만약 호도법을 이용하면 곡선 $y=\sin x$는 점 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$을 지나는데, $30^\circ=\frac{\pi}{6}\approx\frac{3.14}{6}\approx 0.52$이므로 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$을 좌표평면에 나타내면 아래와 같이 밸런스가 좋다!



44 부채꼴의 호의 길이와 넓이

(1) 부채꼴 호의 길이와 넓이

육십분법으로 각이 주어지면 꼭 라디안으로 바꿔서 계산하자!

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의길이를 l, 넓이를 S라 하면

① $l=r\theta$

② $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

③ 부채꼴의 둘레의 길이$=2r+l$

반지름의 길이 4, 중심각의 크기가 30°인 부채꼴의 호의 길이 l과 넓이 S를 구하시오.

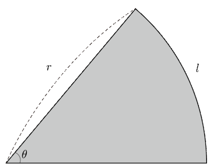
[풀이] 정답 $l=\frac{2}{3}\pi$, $S=\frac{4}{3}\pi$

$30^\circ=30\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$이므로

$$l=4\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi,\quad S=\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$$

(2) 둘레의 길이가 a인 부채꼴의 넓이의 최대

유형1. 온전한 부채꼴



둘레의 길이 $2r+l=a$일 때

넓이는 $S=2rl=2r(a-2r)$이므로

$r=\frac{a}{4}$

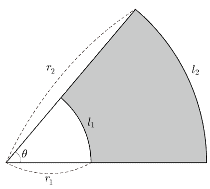
일 때 넓이 S가 최대이다. 따라서

넓이의 최댓값은 $\frac{1}{16}a^2$이고 이때의

호의 길이 $l=a-2r=a-2\cdot\frac{1}{4}a=\frac{1}{2}a$

중심각 $\theta=\frac{l}{r}=2$ (이거 외우면 됨)

유형2. 부채꼴 중 일부



둘레의 길이 $2(r_2-r_1)+l_1+l_2=a$ 일 때,

색칠된 부분의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\left(r_2^2\theta-r_1^2\theta\right)=\frac{1}{2}\theta(r_1+r_2)(r_2-r_1)$$

$$=\frac{1}{2}(l_1+l_2)\left\{\frac{a-(l_1+l_2)}{2}\right\}$$

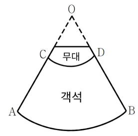
이므로 $l_1+l_2=\frac{a}{2}$ (이거 외우면 됨)일 때, 최대이다. 따라서

넓이의 최댓값은 $\frac{1}{16}a^2$

넓이의 최댓값만 구하는 문제는 둘레길이 4로 나누고 제곱하면 됨!!

$$\text{넓이의 최댓값}=\left(\frac{\text{둘레길이}}{4}\right)^2$$

부채꼴 OAB와 부채꼴 OCD를 이용하여 그림과 같은 모양의 공연장을 만들려고 한다. 이 공연장의 객석 부분인 도형 ABDC의 둘레의 길이를 60m로 할 때, 도형 ABDC의 넓이의 최댓값은? (단, 넓이의 단위는 m^2이다.)



[해설] 둘레의 길이가 60이므로

$$\text{넓이의 최댓값}=\left(\frac{60}{4}\right)^2=15^2=225$$

★ 호도법을 이용하는 문제에서 도형을 대하는 자세

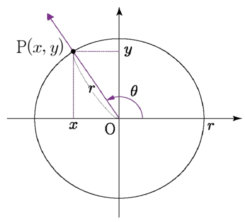
① 원은 중심과 연결

② 이등변은 중선

③ S_1-S_2구조의 식 : 각각의 넓이를 구하기 어려울 때 공통영역(C)을 포함하고 있는 영역이 있는지 관찰하여 $S_1-S_2=(S_1+C)-(S_2+C)$의 형태로 계산한다.

45 삼각함수의 뜻

오른쪽 그림과 같이 좌표평면의 원점 O에서 양의 방향을 시초선으로 하고, 일반각의 크기 θ가 나타내는 동경 OP가 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원과 만나는 점을 $\text{P}(x,y)$라 할 때



$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

의 값은 r의 값에 관계없이 θ의 값에 따라 결정된다.

따라서 $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$ 는 θ에 관한 함수라 할 수 있다.

이 함수를 차례로 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 부르며

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$

로 나타낸다.

위에서 정의한 함수들을 θ에 대한 삼각함수라고 한다.

★ 단위원 : 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원

※ 삼각함수의 의미

삼각함수는 원 위의 함수이다.

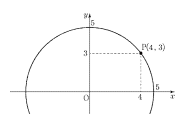
① 단위원으로 만든다. ⇨ ② $\cos\theta$: x좌표를 읽는다.
$\sin\theta$: y좌표를 읽는다.
$\tan\theta$: 기울기를 읽는다.

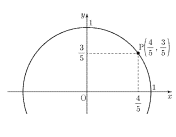
원점 O와 점 $\text{P}(4,3)$을 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때 다음 구하시오.

1) $\cos\theta$ 2) $\sin\theta$ 3) $\tan\theta$

1) [해설]

중심이 O이고 $\text{P}(4,3)$을 지나는 원을 먼저 그린다. 단위원을 만들기 위해 모두 5로 나누자!
그리고 좌표와 기울기를 읽어주면 된다.





46 극좌표

중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 점 $P(x, y)$의 좌표를 삼각함수를 이용하여 간편하게 나타낼 수 있다.
동경 OP가 나타내는 각이 θ일 때, $\overline{OP}=r$이므로

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r}$$

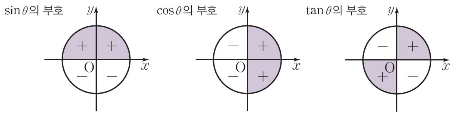
이다. 따라서 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$이므로

$P(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 이다.

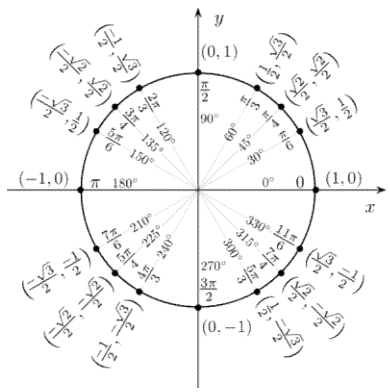
좌표평면 위의 점 $P(-2, 2\sqrt{3})$을 극좌표로 나타내어라.
(단, 동경 OP의 일반각은 둔각이다.)

[풀이] $P\left(4\cos\frac{2\pi}{3}, 4\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

47 삼각함수의 부호



※ 단위원에서의 특수각을 갖는 삼각함수 값과 부호



48 삼각함수의 관계

(1) 역수 관계

① $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ② $\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(2) 제곱 관계

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ⇨ $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$
⇨ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

② $\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$ (①식에서 양변 $\cos^2\theta$로 나눈다.)

(3) $\sin\theta\pm\cos\theta$ 또는 $\sin\theta\cos\theta$의 값이 주어지는 경우

① $\sin\theta+\cos\theta=k$이면 $\sin\theta\cos\theta=\frac{k^2-1}{2}$

② $\sin\theta-\cos\theta=k$이면 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1-k^2}{2}$,

③ $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{2}{1-k^2}$

★ $\sin\theta+\cos\theta=k$의 양변을 제곱하면
$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=k^2$, $1+2\sin\theta\cos\theta=k^2$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{k^2-1}{2}$

※ 삼각함수값 간단히 구하기

① 단위원을 그린다.
② cos은 x좌표, sin은 y좌표, tan는 기울기를 단위원에 표현한다.
③ 단위원에서 좌표를 찾는다.

θ가 제 3사분면의 각이고 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$일 때, $\cos\theta+\tan\theta$의 값을 구하시오.

[풀이]

① y좌표가 $-\frac{4}{5}$

② $x^2+y^2=1$이므로 $x^2=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

③ 3사분면 이므로
$x=\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y}{x}=\frac{4}{3}$

49 각의 변환

삼각함수 각 변환은 $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$ (n은 정수)꼴로 바꾼 뒤

① $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$에서

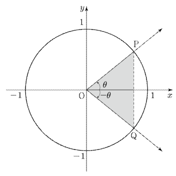
n이 홀수라면 ⇨ sin → cos, cos → sin, tan → $\frac{1}{\tan}$

n이 짝수라면 ⇨ sin → sin, cos → cos, tan → tan

② $\frac{n}{2}\pi\pm\theta$를 사분면에 위치시킨 후 원래 함수 기준 ±부호를 판단한다. (θ는 예각취급)

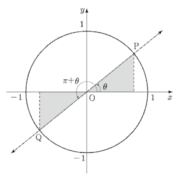
(1) $-\theta$의 삼각함수 (음각공식)

① $\sin(-\theta)=-\sin\theta$
② $\cos(-\theta)=\cos\theta$
③ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

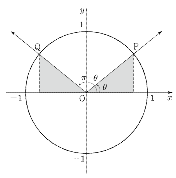


(2) $\pi\pm\theta$의 삼각함수 (보각공식)

① $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$
② $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$
③ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

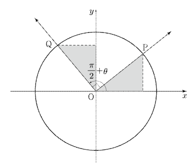


① $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$
② $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$
③ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

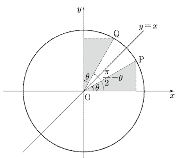


(3) $\frac{\pi}{2}\pm\theta$의 삼각함수 (여각공식)

① $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$
② $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$
③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$



① $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$
② $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$
③ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$



(4) $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$일 때

① $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$ ($\because\ \sin\alpha=\cos\beta$)
② $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$ ($\because\ \cos\alpha=\sin\beta$)
③ $\tan\alpha\times\tan\beta=1$ ($\because\ \tan\alpha=\frac{1}{\tan\beta}$)

50 삼각함수의 합

① 일차식 구조의 삼각함수의 합
⇨ 두 각의 합 또는 차가 $n\pi$임을 이용
[예] $\theta=\frac{\pi}{5}$일 때, $\cos\theta+\cos6\theta=0$

② 이차식 구조의 삼각함수의 합
⇨ 두 각의 합 또는 차가 $\frac{(2n-1)\pi}{2}$임을 이용
[예] $\theta=\frac{\pi}{10}$일 때, $\sin^2\theta+\sin^2 4\theta=1$

③ tan의 연속적인 곱
⇨ 두 각의 합 또는 차가 $\frac{(2n-1)\pi}{2}$임을 이용
[예] $\theta=\frac{\pi}{10}$일 때, $\tan\theta\times\tan4\theta=1$

다음 식의 값을 구하여 보자.
(1) $\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{2}{19}\pi+\cdots+\cos\frac{18}{19}\pi+\cos\frac{19}{19}\pi$
(2) $\sin^2\frac{\pi}{18}+\sin^2\frac{2}{18}\pi+\cdots+\sin^2\frac{7}{18}\pi+\sin^2\frac{8}{18}\pi$

[풀이]
(1) $\cos(\pi-x)=-\cos x$이고 $\cos x+\cos(\pi-x)=0$ 이므로
(주어진 식)
$=\left(\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{18}{19}\pi\right)+\left(\cos\frac{2}{19}\pi+\cos\frac{17}{19}\pi\right)$
$+\cdots+\left(\cos\frac{9}{19}\pi+\cos\frac{10}{19}\pi\right)+\cos\pi$
$=0+0+\cdots+0+(-1)=-1$

(2) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos^2x$이고
$\sin^2x+\cos^2x=\sin^2x+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$이므로
(주어진 식)
$=\left(\sin^2\frac{\pi}{18}+\sin^2\frac{8}{18}\pi\right)+\left(\sin^2\frac{2}{18}\pi+\sin^2\frac{7}{18}\pi\right)$
$+\left(\sin^2\frac{3}{18}\pi+\sin^2\frac{6}{18}\pi\right)+\left(\sin^2\frac{4}{18}\pi+\sin^2\frac{5}{18}\pi\right)$
$=1+1+1+1=4$

51 주기와 대칭

주기 : 동일한 위상이 반복되는 지점까지의 거리

함수 f 의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여

$f(x+p)=f(x)$

를 만족하는 최소의 양수 p를 주기라 한다.

① $f(x)$는 주기 p인 함수

⇨ $f(x)=f(x+p)=f(x+2p)=\cdots=f(x+np)$

② $f(p)=f(0)$

함수 $f(x)=\dfrac{\sin 4x+\cos 2x+1}{3\sin x+4}$의 주기를 p라 할 때,

$f(2p)+f(4p)+f(6p)+\cdots+f(20p)$

의 값을 구하시오.

[풀이]

함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=f(x+np)$ (n은 정수)

$\therefore\ f(0)=f(2p)=f(4p)=\cdots=f(20p)$

따라서 주어진 식의 값은

$f(2p)+f(4p)+f(6p)+\cdots+f(20p)$

$=10f(0)$

$=10\cdot\dfrac{\sin 0+\cos 0+1}{3\sin 0+4}$

$=10\cdot\dfrac{2}{4}=5$

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$자체가 다음 등식이 성립할 때

① $f(x+p)=f(x)$ ⇨ 독해 : $f(x)$는 주기가 p인 함수

(정확히는 주기가 $\dfrac{p}{n}$ 이다.)

$f(x-p)=f(x+p)$ ⇨ 독해 : $f(x)$는 주기 $2p$인 함수

② $f(a-x)=f(a+x)$ ⇨ 독해 : $f(x)$는 $x=a$선대칭 함수

$f(2a-x)=f(x)$ ⇨ 독해 : $f(x)$는 $x=a$선대칭 함수

③ $f(2a-x)+f(x)=2b$ ⇨ 독해 : $f(x)$는 (a,b)점대칭 함수

④ $f(x+a)+f(x)=b$ ⇨ 독해 : $f(x)$는 주기 $2a$인 함수

① $f(x+p)=f(x)$에서 주기는 p라고 읽어도 무방한 문제가 대부분이다. 하지만, 정확히 주기는 $\dfrac{p}{n}$로 풀어야 하는 문제도 존재한다. 일단, 주기는 p라 생각하고 풀다가 막히면 주기는 $\dfrac{p}{n}$으로 다시 세팅하고 풀자.

(2) 헷갈리지 말자! 아래의 표현은 두 함수의 관계이다.

① $y=f(x)$와 $y=f(x+p)$

주기함수가 아니라 그냥 평행이동 관계의 두 함수야!

② $y=f(a-x)$와 $y=f(a+x)$

주의주의! $x=a$선대칭 아니다! 두 함수는 y축 대칭

③ $y=f(2a-x)$와 $y=f(x)$

두 함수가 $x=a$선대칭 관계이다.

(3) 대칭 + 대칭 ⇨ 대칭 + 주기

대칭조건이 2개 나오면 대칭과 주기로 바꿀 수 있는지 확인한다.

$f(x)=f(-x)$, $f(x)=f(4-x)$

⇨ $f(x)=f(-x)$이므로 $f(4-x)=f(x-4)$

따라서 $f(x)=f(x-4)$

최종적으로 $f(x)=f(-x)$ & $f(x)=f(x-4)$

(4) $f(kx)$의 주기성

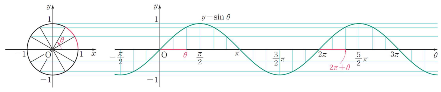
함수 $f(x)$의 주기가 p일 때, 함수 $f(kx)$의 주기는 $\dfrac{p}{|k|}$ 이다.

52 삼각함수의 그래프

(1) 사인함수의 그래프

각 θ를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하는 반지름 1인 원과의 교점을 $P(x,y)$라면 $\sin\theta=\dfrac{y}{1}=y$이 된다.

그러므로 $\sin\theta$ 의 값의 변화는 점 P의 y좌표의 값의 변화를 조사하면 된다.



함수 $y=\sin x$의 그래프와 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.

② 모든 실수 x에서 연속이다.

③ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $\sin(-x)=-\sin x$

④ 주기가 2π인 주기함수이다.

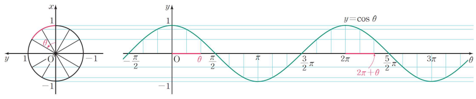
즉, $\sin(2n\pi+x)=\sin x$ (단, n은 정수)

⑤ $y=\sin ax$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|a|}$이다.

(2) 코사인함수의 그래프

각 θ를 나타내는 동경과 원점을 중심으로 하는 반지름 1인 원과의 교점을 $P(x,y)$라면

$\cos\theta=\dfrac{x}{1}=x$가 된다. 그러므로 $\cos\theta$의 값의 변화는 점 P의 x좌표의 값의 변화를 조사하면 된다.



함수 $y=\cos x$의 그래프와 성질

① 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.

② 모든 실수 x에서 연속이다.

③ 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉, $\cos(-x)=\cos x$

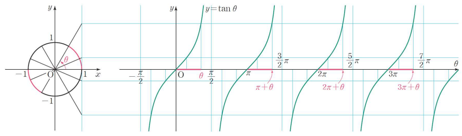
④ 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, $\cos(2n\pi+x)=\cos x$

(단, n은 정수)

⑤ $y=\cos ax$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|a|}$이다.

⑥ $\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$이므로, $y=\cos x$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프를 x축 방향으로 $-\dfrac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

(3) 탄젠트함수의 그래프



함수 $y=\tan x$의 그래프와 성질

① 정의역은 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$(n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

② 정의역의 모든 실수 x에서 연속이다.

③ 점근선은 직선 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

④ 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $\tan(-x)=-\tan x$

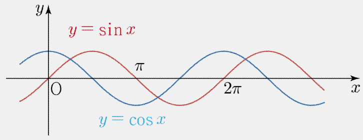
⑤ 주기가 π인 주기함수이다. 즉, $\tan(n\pi+x)=\tan x$

(단, n은 정수)

⑥ $y=\tan ax$의 주기는 $\dfrac{\pi}{|a|}$이다.

※ $y=\sin x$ vs $y=\cos x$

$\sin x$와 $\cos x$의 그래프는 평행이동 관계이다.

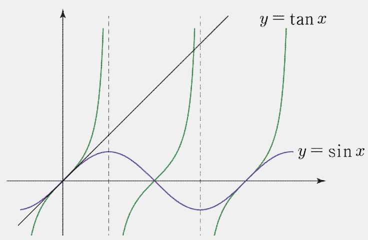


$0\le x<\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}<x\le 2\pi$: $\sin x<\cos x$

$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{5\pi}{4}$: $\sin x>\cos x$

※ $y=\sin x$ vs $y=\tan x$

$\sin x$와 $\tan x$는 원점에서 접한다.



★ 두 그래프는 특수각이 아닌 삼각함수의 대소비교를 할 때 활용한다.

[예] $\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{2}$이다. 따라서 $\cos 1<\sin 1<\tan 1$

삼각함수의 대칭성

$y=\sin x$, $y=\cos x$의 대칭성

① 모든 x축과 만나는 교점에 대하여 점대칭이다.

② 극점에서 그은 y축에 평행한 모든 직선에 대하여 선대칭이다.

$y=\tan x$의 대칭성

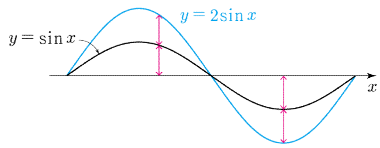
① 모든 x축과 만나는 교점에 대하여 점대칭이다.

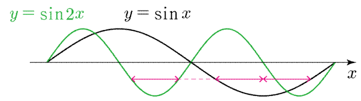
② 점근선이 x축과 만나는 모든 점에 대하여 점대칭이다.

53 삼각함수 그래프 배율관계

곡선 $y=a\sin bx$에서 $|a|$는 진폭을 결정하고 $|b|$는 주기를 결정한다.

예를 들어 $y=\sin x$에 비해 $y=2\sin x$는 위아래로 2배만큼 커지고 $y=\sin 2x$는 $y=\sin x$에 비해 2배만큼 촘촘해 진다.





※ 주기변화에 따른 그래프 개형의 파악

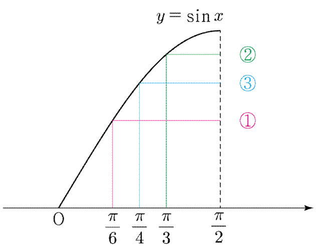
x대신 kx가 대입되어 있다면

$\dfrac{\text{본래주기}}{k}$: 본래주기 안에 k개의 싸이클이 있다.

"k를 개수로 인식해야 한다."

54 삼각함수 비율관계

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서



① 정의역의 삼등분점 중 변곡점에 가까운 점은 y값 비율이

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) : f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 : \frac{1}{2}$

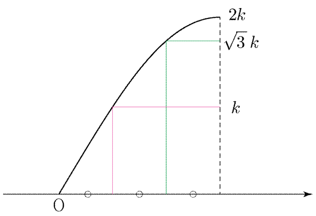
② 정의역의 삼등분점 중 극값에 가까운 점은 y값 비율이

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) : f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2}$

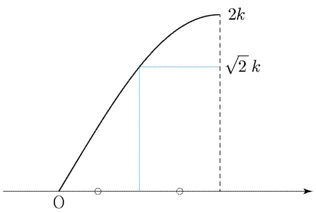
③ 정의역의 이등분점 y값 비율이

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) : f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 : \frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 아래처럼 기억하자.



구간을 삼등분 하면, y값 비율이 $2:1$ 또는 $2:\sqrt{3}$



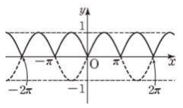
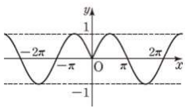
구간을 이등분 하면, y값 비율이 $2:\sqrt{2}$

양의 실수 a에 대하여 $y=2\cos ax\left(0 \le x \le \frac{2\pi}{a}\right)$ 와 $y=\sqrt{2}$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=6$일 때, a의 값은?

[해설]
y값 비율이 $2:\sqrt{2}$이다. 따라서 삼각함수 비율관계에 따라 $\overline{\mathrm{AB}}=\frac{3}{4}\times\frac{2\pi}{a}=6$이므로 $a=\frac{\pi}{4}$

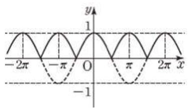
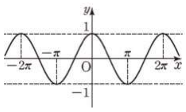
55 절댓값 기호가 포함된 삼각함수의 그래프

(1) $y=|\sin x|$, $y=\sin|x|$의 그래프

	$y=\|\sin x\|$	$y=\sin\|x\|$
그래프		
정의역	실수 전체의 집합	실수 전체의 집합
치역	$\{y \mid 0 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
주기	π	없다.
대칭성	y축에 대하여 대칭	y축에 대하여 대칭

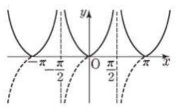
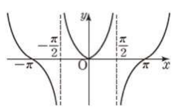
★ $y=\sin|x|$는 주기함수가 아니다.

(2) $y=|\cos x|$, $y=\cos|x|$의 그래프

	$y=\|\cos x\|$	$y=\cos\|x\|$
그래프		
정의역	실수 전체의 집합	실수 전체의 집합
치역	$\{y \mid 0 \le y \le 1\}$	$\{y \mid -1 \le y \le 1\}$
주기	π	2π
대칭성	y축에 대하여 대칭	y축에 대하여 대칭

★ $y=\cos|x|$와 $y=\cos x$의 그래프는 일치한다.

(3) $y=|\tan x|$, $y=\tan|x|$의 그래프

	$y=\|\tan x\|$	$y=\tan\|x\|$
그래프		
정의역	$n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합	$n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합
치역	$\{y \mid y \ge 0\}$	실수 전체의 집합
주기	π	없다.
대칭성	y축에 대하여 대칭	y축에 대하여 대칭

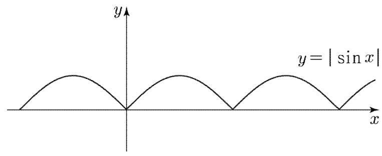
★ $y=\tan|x|$는 주기함수가 아니다.

★ 절댓값 기호가 포함된 삼각함수는 주기성과 대칭성이 변할 수 있으므로, 반드시 그래프를 그려서 확인한다!!

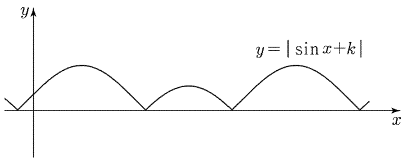
(4) 절댓값이 포함된 삼각함수의 주기성

① $y=|a\sin(px)+b|$ 또는 $y=|a\cos(px)+b|$

$b=0$: 주기 반땡

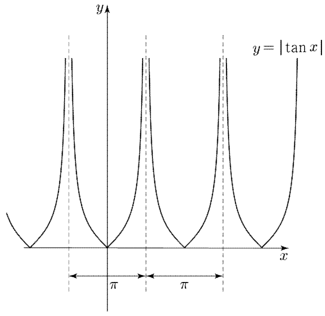


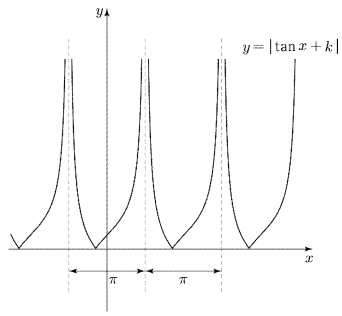
$b \ne 0$: 주기 그대로



② $y=|a\tan(px)+b|$의 주기

⇨ tan 의 주기는 점근선이 결정한다. 주기 그대로!





56 삼각함수의 최대 최소와 미정계수 결정

(1) $y=a\sin(bx+c)+d$, $y=a\cos(bx+c)+d$의 꼴

① a, d : 최댓값과 최솟값을 결정
함숫값을 이용하여 결정

② b : 주기를 이용하여 결정

③ c : x축의 방향으로의 평행이동을 결정

(2) $y=a\tan(bx+c)+d$

① a, c : 함숫값을 이용하여 결정

② b : 주기를 이용하여 결정

★ $y=a\tan(bx+c)+d$의 점근선

$\Rightarrow x=\frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2}-c\right)+\frac{n\pi}{|b|}$ (n은 정수)

삼각함수	최댓값	최솟값	주기
$y=a\sin(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\cos(bx+c)+d$	$\lvert a\rvert+d$	$-\lvert a\rvert+d$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$
$y=a\tan(bx+c)+d$	없음	없음	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$

※ 삼각함수 그래프 그리기 종합

$y=a\sin(bx+c)+d$, $y=a\cos(bx+c)+d$

① 주축부터 그린다. $y=d$

② 진폭을 나타낸다. 주축을 기준으로 $\pm|a|$

③ 주기 $\frac{2\pi}{|b|}$를 이용하여 그래프를 나타낸다.

④ 삼각함수가 주축과 만나는 교점의 x좌표를 대칭성과 주기성을 이용하여 나타낸다.

$y=a\tan(bx+c)+d$

① 주축부터 그린다. $y=d$

② 점근선을 나타낸다. 첫 번째 점근선은 괄호안이 $\frac{\pi}{2}$ 되는 순간이다.

첫 번째 점근선 : $bx+c=\frac{\pi}{2}$

③ 나머지 점근선을 주기 $\frac{\pi}{|b|}$를 이용하여 나타낸다.

나머지 점근선

나머지 점근선 : $x=\frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2}-c\right)+\frac{n\pi}{|b|}$ (n은 정수)

④ 점근선들 사이에 한 주기 함수를 그린다.

57 삼각함수의 최대 최소

1. 일차식

① 종류가 통일되는 삼각함수의 합 : 각 변환 이용

예) $y=2\sin x-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-1$

② 종류가 통일되지 않는 삼각함수 : 단위원 이용

예) $\sin x+\cos x$ 의 범위는 $\cos x=X$, $\sin x=Y$

$\begin{cases} X^2+Y^2=1 \\ X+Y=k \end{cases}$ 를 이용

③ 절댓값이 포함된 삼각함수 : 치환 후 절댓값 함수로

예) $y=2\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|+1=2\left|t-\frac{1}{2}\right|+1$

2. 분수식

① 삼각함수 한 종류 : 치환 후 유리함수로

예) $y=\frac{-\sin x+2}{\sin x+3}=\frac{-t+2}{t+3}$

② 삼각함수 두 종류, 상수 없음 : 분모분자 $\cos x$로 나누자.

예) $y=\frac{4\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}=\frac{4\tan x-1}{\tan x+2}$

③ 삼각함수 두 종류, 상수 있음 : 두 점사이 기울기로

예) $y=\frac{\sin x-1}{\cos x-2}$

단위원 위 $(\cos x, \sin x)$와 $(2, 1)$ 두 점 사이 기울기

3. 이차식

① 두 각의 차가 $\alpha\pm\beta=n\pi$

$y=3\sin^2(\pi-x)-\cos x-1$

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$를 이용

② 두 각의 차가 $\alpha\pm\beta=\frac{2n-1}{2}\pi$

$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$

$x-\frac{\pi}{4}=t$ 치환하면 $x-\frac{3}{4}\pi=t-\frac{\pi}{2}$

$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$에 대하여 함수

$$y=\frac{2\sin\theta-\cos\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\cos\theta}$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $9M\times m$의 값을 구하시오.

[해설]

$y=\frac{2\sin\theta-\cos\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\cos\theta}=\frac{2\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}$에서 분모분자에

$\cos\theta$로 나누면 $y=\frac{2\tan\theta-1}{\tan\theta+2}$이다. 이때, $\tan\theta=X$로

치환하면 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$이므로 $0\le X\le 1$

따라서 $m=-\frac{1}{2}$, $M=\frac{1}{3}$이다.

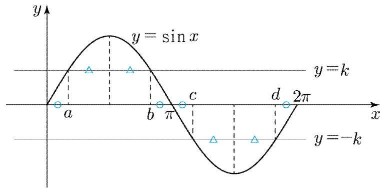
$\therefore\ 36(M-m)=36\times\frac{5}{6}=30$

58 대칭성, 주기성을 이용한 교점 찾기

대칭성이 있는 교점의 x좌표의 합은 평균(센터) × 항의개수

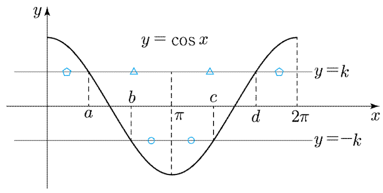
(1) $f(x)=\sin x$에서

$0\le x<\pi$이고 $f(a)=f(b)=k$이면 $a+b=\pi$
(단, $a\ne b$)
$\pi\le x<2\pi$이고 $f(c)=f(d)=k$이면 $c+d=3\pi$
(단, $c\ne d$)



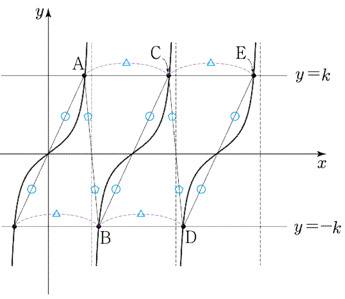
(2) $f(x)=\cos x$에서

$0\le x<2\pi$이고 $f(a)=f(b)=k$이면 $a+b=2\pi$
(단, $a\ne b$)



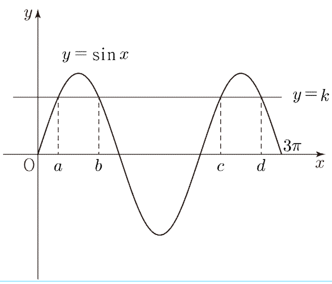
(3) $f(x)=\tan x$

$f(x)$의 x절편, 점근선의 x절편에 대해 점대칭이다.



★ 위의 삼각함수 그래프의 대칭성은 주기, 평행이동의 변화와 관계없이 성립한다.

그림과 같이 $0\le x\le 3\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=k$ $(0<k<1)$와 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례로 a, b, c, d라 할 때, $a+b+c+d$의 값은?



[해설]

주어진 그래프에서

두 점 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$은 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore\ a+b=\pi$

두 점 $(c,\ 0)$, $(d,\ 0)$은 직선 $x=\frac{5}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{c+d}{2}=\frac{5}{2}\pi$ $\quad\therefore\ c+d=5\pi$

$\therefore\ a+b+c+d=\pi+5\pi=6\pi$

59 삼각방정식

1. 삼각방정식

$\sin x = \sin\frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ 가 성립 하는가?

성립하지 않는다. 그 이유는 삼각함수는 주기성과 대칭성이 있기 때문이다. 주기성 때문에 $2n\pi$를 더해 줘야하고, 대칭성 때문에 $x = \frac{5}{6}\pi$인 상황도 생각 해야한다.

따라서 $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ or $\frac{5}{6}\pi + 2n\pi$

① 삼각함수 사이의 관계식과 각변환 공식을 이용하여 한 종류의 삼각함수로 통일한다.

② 두 그래프의 교점의 x좌표를 구한다.

※ 해가 여러개인 경우, 삼각함수 그래프의 대칭성과 주기성을 활용한다.

③ $\sin x = a$ 꼴이 아니고 $\sin f(x) = a$ 꼴일 때는 $f(x) = \theta$로 치환하면 그래프의 이동을 생각할 필요가 없다.

2. 한 종류로 변형이 어려운 삼각방정식

① 각각의 함수의 그래프를 그려서 교점을 찾는다.
[예] $\tan x = \sin 2x$ $(0 \le x \le 2\pi)$
⇨ $y = \tan x$, $y = \sin 2x$의 그래프로 교점을 찾는다.

② 한 종류의 삼각함수로 통일하기 어려운 경우, 두 동경의 위치관계를 활용한다.
[예] $\sin x = \sin 7x$ $(0 \le x \le 2\pi)$
1) 동경이 일치할 때 $7x - x = 2n\pi$
2) 대칭상황 $x + 7x = \pi + 2n\pi$

③ 삼각함수의 정의를 이용하여 구할 수 있다.
[예] $\sin x = \sqrt{3}(1+\cos x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$
1) 양변 제곱한다. (**이때, 제곱하기전 부호를 먼저 체크**)
2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$을 이용하여 종류를 통일시키자.

$0 \le x < 2\pi$에서 방정식 $2\cos^2 x + \sin x = 1$의 모든 근의 합을 구하시오.

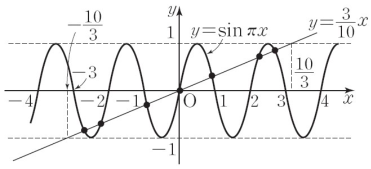
[풀이]
$2\cos^2 x + \sin x = 1$에서
$2(1-\sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$ ∴ $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
$\sin x = t$로 놓으면 $0 \le x < 2\pi$에서 $-1 \le t \le 1$이고,
주어진 방정식은 $2t^2 - t - 1 = 0$, $(2t+1)(t-1) = 0$
∴ $t = -\frac{1}{2}$ 또는 $t = 1$
(ⅰ) $t = -\frac{1}{2}$, 즉 $\sin x = -\frac{1}{2}$일 때, $0 \le x < 2\pi$ 이므로
$x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$
(ⅱ) $t = 1$, 즉 $\sin x = 1$일 때, $1 \le x < 2\pi$ 이므로
$x = \frac{\pi}{2}$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 근의 합은
$\frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{2}\pi$

방정식 $\sin \pi x = \frac{3}{10}x$의 실근의 개수는?

[해설]
식이 더 이상 정리되지 않는 방정식 $\sin \pi x = \frac{3}{10}x$의 실근의 개수는 두 함수 $y = \sin \pi x$, $y = \frac{3}{10}x$의 그래프의 교점의 개수와 같다.
이때, **주기함수의 치역의 경계를 기준으로 교점개수를 파악한다. 즉, 직선이 $y = 1$또는 $y = -1$이 되는 점을 먼저 구한다.**

$$y = \frac{3}{10}x = \pm 1$$

$\left(\frac{10}{3}, 1\right)$과 $\left(-\frac{10}{3}, 1\right)$을 먼저 찍어놓고 직선을 그려서 교점 파악한다.



따라서 두 함수 $y = \sin \pi x$, $y = \frac{3}{10}x$의 그래프의 교점은 7개이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 7이다.

$0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식
$$\sin x = \sqrt{3}(1+\cos x)$$
의 모든 해의 합은?

[해설]
$\sin x = \sqrt{3}(1+\cos x)$의 양변을 제곱하면
$1 - \cos^2 x = 3(1+\cos x)^2$
$2(1+\cos x)(2\cos x + 1) = 0$
이때! 제곱하기 전 부호를 먼저 생각한다.
$1 + \cos x \ge 0$이므로 $\sin x \ge 0$을 만족하는 해를 찾아야 한다.
(ⅰ) $\cos x = -1$일 때, $x = \pi$
(ⅱ) $\cos x = -\frac{1}{2}$일 때, $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$
그런데 이때, $\sin\frac{4}{3}\pi < 0$이므로 $\frac{2}{3}\pi$만 합격
(ⅰ), (ⅱ)에서 방정식의 모든 해의 합은 $\frac{5}{3}\pi$이다.

3. 합성함수 방정식

① 절댓값 함수의 해석
$|\sin x - a| = b$
$\begin{cases} y = |\sin x - a| \text{의 그래프를 그린다.} \\ \sin x = \pm b + a \text{ 변경후 } y = \sin x \text{ 를 그린다.} \end{cases}$

② $\sin x = t$치환 ⇨ 다항함수 방정식처럼
(단, **범위는 조심하자.**)

③ $f(g(x)) = k$ ⇨ **겉함수와 속함수를 분리하자.**

60 삼각 부등식

1. 삼각부등식

$f(x) < g(x) \rightarrow \sin f(x) < \sin g(x)$ 가 성립하는가?

성립하지 않는다. 삼각함수는 주기함수이고 $\sin x$가 최대가 나오는 정의역은 정해져 있다. $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$에 가까울수록 삼각함수의 값이 커질 것이다.

$0 \le x \le 2$에서 $f(x) = \sin\left(\frac{x^2+1}{4}\right)\pi$의 최댓값이 나오는 순간의 x좌표를 구하시오.

[풀이] $\frac{x^2+1}{4} = t$라 할 때, $\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4}$이다. 따라서 $t = \frac{\pi}{2}$일 때 , 즉 $x = 1$일 때 최댓값이 나온다.

2. 삼각부등식 풀이법

① 삼각함수 사이의 관계식과 각변환 공식을 이용하여 한 종류의 삼각함수로 통일한다.
$\sin x > a$ $(|a| \le 1)$
$\cos x > a$ $(|a| \le 1)$
$\tan x > a$

② 두 그래프의 대소관계를 이용해 부등식의 범위를 구한다.

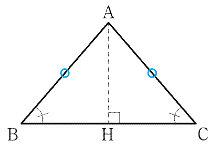
③ $\sin x > a$ 꼴이 아니고 $\sin f(x) > a$ 꼴일 때는 $f(x) = \theta$로 치환하면 그래프의 이동을 생각할 필요가 없다.

삼각 부등식은 교점을 찾아 부등식 영역을 구하는 것이다.
따라서 **삼각 부등식은 결국 삼각방정식이다.**

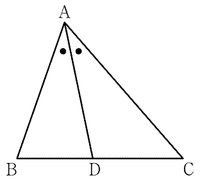
61 중등기하 총정리

(1) 이등변삼각형

① 이등변은 중선을 생각하자.
② 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직 이등분한다.
⇨ 삼각비 또는 피타고라스정리를 이용한다.



(2) 삼각형 내각의 이등분선



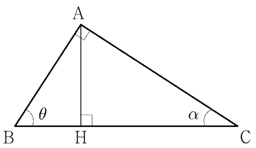
$\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분선과 변 BC의 교점을 D라고 하면

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

이다. 삼각함수활용 단원에서 미지수의 비율을 나타내는데 주로 쓰인다.

$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AD} \times \overline{AC} - \overline{BD} \times \overline{DC}}$

(3) 직각삼각형



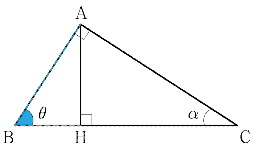
그림과 같이 '수직수직' 직각삼각형에서 '등비수열'을 생각하자.

각 θ를 기준으로 보았을 때, 세 변

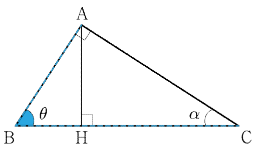
$\overline{BH}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$

는 등비수열을 이룬다.

① $\overline{BH}$에서 $\overline{AB}$로 증가



② $\overline{AB}$에서 $\overline{BC}$로 증가



따라서

$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BH}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ ⇨ $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$

같은 원리로

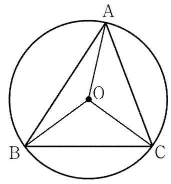
$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CH}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ ⇨ $\overline{AC}^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$

$\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}} = \dfrac{\overline{HC}}{\overline{AH}}$ ⇨ $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \times \overline{CH}$

이다.

(4) 삼각형의 외심

좌표평면에서 한 직선 위에 있지 않은 세 점을 지나는 원은 반드시 존재한다.
따라서 각각의 삼각형마다 외접원이 오직 하나 존재한다. 이때 외접원의 중심을 '외심'이라 한다.



① 삼각형에서 각각의 변들은 외접원에서 현이다.
⇨ 따라서 외심에서 세 변에 수선의 발을 내리면 각각의 변을 수직 이등분한다.

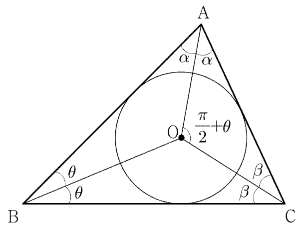
② 외심을 발견하는 것이 중요하다.
⇨ 한 점으로부터 같은 거리에 있는 세 점을 발견한다면, 외접원을 생각하자.

③ 외심의 위치
예각삼각형 : 삼각형의 내부에 있다.
직각삼각형 : 빗변의 중점에 있다.
둔각삼각형 : 삼각형의 외부에 있다.

(5) 삼각형의 내심

모든 삼각형은 세 변에 동시에 접하는 원이 존재하고, 이 원의 중심을 '내심'이라 한다.

① 삼각형에서 내접원을 생각할 때,
첫째는 '각'이다.
각각의 꼭짓점을 내심과 연결하면 각이 이등분된다.



$2(\theta+\alpha+\beta)=\pi$ 이므로

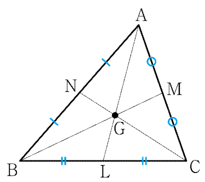
$\theta+\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ ⇨ $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

② 삼각형 ABC의 세 변의 길이가 a, b, c 이고 내접원의 반지름의 길이가 r 일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 다음과 같다.

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} r\,(a+b+c)$

이 단원에서 위 식은 반지름 r을 찾는데 주로 쓰인다.

(6) 삼각형의 무게중심

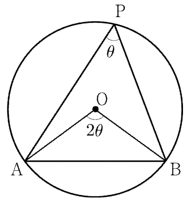


① 삼각형의 세 중선은 한 점에서 만나고, 그 교점인 무게중심 G는 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 나눈다.

$\overline{AG} : \overline{GL} = \overline{BG} : \overline{GM} = \overline{CG} : \overline{GN} = 2 : 1$

② 세 중선에 의하여 삼각형의 넓이는 6등분된다.

(7) 원주각과 중심각

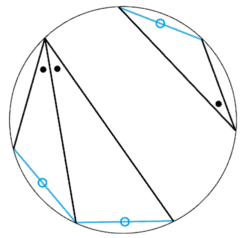


한 호 AB에 대한 원주각 $\angle APB$의 크기는 점 P의 위치에 관계없이 일정하고 그 크기는

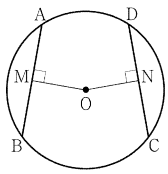
중심각 $\angle AOB$의 크기의 $\dfrac{1}{2}$이다.

$\angle APB = \dfrac{1}{2} \angle AOB$

① 각이 같으면 현이 같고
② 현이 같으면 각이 같다.



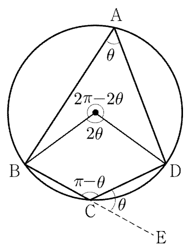
(8) 현의 길이



① 한 원의 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 서로 같다.
$\overline{OM} = \overline{ON}$ ⇒ $\overline{AB} = \overline{CD}$

② 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.
$\overline{AB} = \overline{CD}$ ⇒ $\overline{OM} = \overline{ON}$

(9) 원에 내접하는 사각형



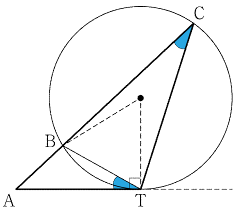
① 대각의 크기의 합은 180° 이다.
$\angle A + \angle C = 180^\circ$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$

② 원에 내접하는 사각형의 한 외각의 크기는 그 내대각의 크기와 같다.
$\angle DAB = \angle DCE$

(10) 접선과 현이 이루는 각

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다. 즉,

$\angle ATB = \angle ACT$



따라서 삼각형 ATB와 삼각형 ATC는 닮음이다.

이때, 각 $\angle A$를 기준으로 두 삼각형의 길이를 바라보면

$\dfrac{\overline{AT}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AT}}$

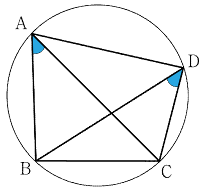
이다. 따라서 $\overline{AT}^2 = \overline{AB} \times \overline{AC}$

(11) 네 점이 한 원 위에 있을 조건

① 두 점 A, D가 직선BC에 대하여 **같은 쪽**에 있고

$\angle BAC = \angle BDC$

이면 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.

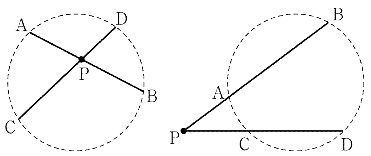


만약 $\angle BAC = \angle BDC = \dfrac{\pi}{2}$이면 $\overline{BC}$가 지름이다.

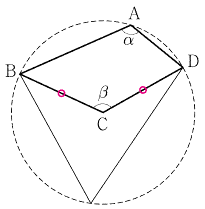
② 두 선분 AB, CD 또는 그 연장선이 한 점 P에서 만나고

$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

이면 네 점 A, B, C, D는 한 원 위에 있다.



① 대각의 합이 $\alpha + \dfrac{\beta}{2} = \pi$이고 $\overline{BC} = \overline{CD}$이등변 조건이 있으면 점 C가 원의 중심이다.



62 삼각형의 결정조건

삼각형은 미지수가 3개로 결정된다.

삼각형 $\triangle ABC$의 구성요소는

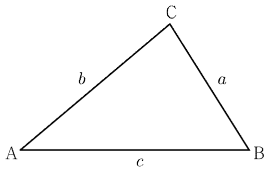
세 내각 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$

세 변 a, b, c

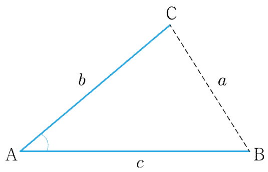
으로 6개이다. 이 중 **세 변 a, b, c를 결정할 수 있다면 단 하나의 삼각형으로 결정**된다.

따라서 삼각형의 결정 조건은

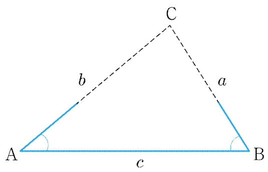
① 세 변의 길이를 알 때



② 두 변과 끼인각을 알 때 ⇨ 나머지 한 변을 결정할 수 있다.



③ 한 변과 그 양 끝 각을 알 때 ⇨ 나머지 두 변을 결정할 수 있다.

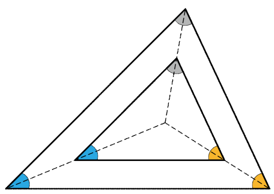


63 단 하나의 삼각형으로 결정되지 않을 때

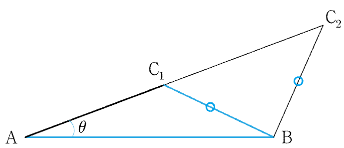
세 변의 길이를 결정할 수 없을 때이다.

1. 삼각형의 구성요소 6개 중 3개를 알고 있음에도 삼각형이 결정되지 않는 경우는 다음과 같다.

① 세 각을 알고 있을 때



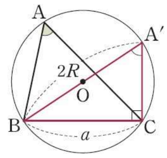
② 두 변과 끼인각이 아닌 다른 각을 알고 있을 때



2. 삼각형의 구성요소 6개에서 2개 이하로 알고 있을 때, 당연히 하나의 삼각형으로 결정되지 않는다.
이때 의미 있는 구성은 **한 변과 그 대각을 알고 있는 경우**이다.

64 사인법칙

일정한 것을 찾아야 한다.



대각이 정해져 있고, 대변의 길이가 정해져 있는 상황이다. 즉, 각 A와 변 a는 일정하다. 변 a를 현의 길이로 고정하면 각 A는 원주각 성질에 따라 항상 일정하다.

이때, 지름을 지나도록 삼각형을 설정할 때 $\angle A = \angle A'$으로 각의 크기는 변화 없지만 각 $\angle C = 90^\circ$로 설정할 수 있다.

이때 외접원의 반지름을 R이라고 한다면

$$\sin A' = \sin A = \frac{a}{2R}$$

마찬가지로,

$\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$이 성립한다.

이때, 좀 더 이쁘게 $2R$로 묶어주면

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

와 같이 표현할 수 있다.

삼각형이 결정되어 있지 않을 때 쓸 수 있다면 삼각형이 결정되어 있을 땐 당연히 쓸 수 있는 공식이다.

식 변형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

① $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$

② $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{a}{\sin(B+C)} = 2R$ ($\because$ $A+B+C=\pi$)

③ $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$

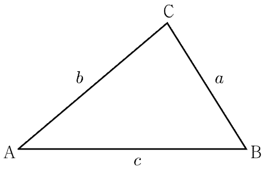
④ $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

⑤ $A : B : C \neq a : b : c$

⑥ 원주가 원주 위의 점 A, B, C 에 의하여 나눠지고, 호 $\overset{\frown}{AB}$ 에 대한 중심각을 θ_1, $\overset{\frown}{CB}$ 에 대한 중심각을 θ_2, 호 $\overset{\frown}{AC}$ 에 대한 중심각을 θ_3 라 하면 ⇨ $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{BC} : \overset{\frown}{CA} = \theta_1 : \theta_2 : \theta_3$

65 코사인 법칙

삼각형이 '결정되어 있을 때', 또는 '결정되어 있다.' 가정할 때



삼각형 ABC에서 길이를 삼각함수를 이용해 나타내면

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

삼각형 ABC에서 각을 삼각함수를 이용해 나타내면

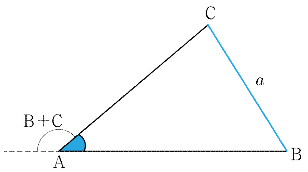
$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

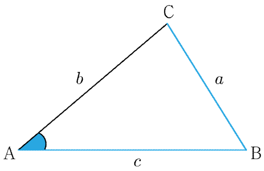
66 사인법칙 사용의 대표적인 상황

① 대변과 대각이 주어진 경우에 사용 (★외각 활용 주의)



$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{a}{\sin(A+B)}=2R$

② 두 변과 끼인각이 아닌 다른 한 각이 주어지는 경우



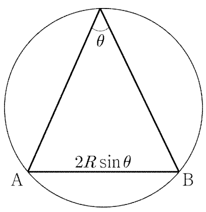
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

위 식에서 목적은, $\sin C$를 구하는 것이다.

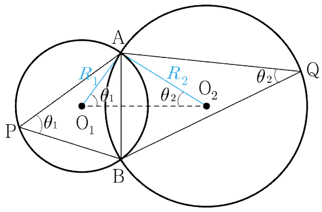
주어진 정보 : a, c A

구하고자 하는 정보 :$\sin C$

③ 외접원의 반지름(R)과 한 각을 알고 있을 때 대변의 길이를 반지름(R)을 이용하여 표현할 수 있다.



④ 공통현을 가진 두 원



① 공통현 이용하여 두 원의 반지름 길이비 구하기

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta_1}=2R_1$, $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta_2}=2R_2$

② 코사인법칙 이용하여 두 원의 중심 사이 거리 구하기

$\overline{O_1O_2}^2=R_1^2+R_2^2-2R_1\times R_2\times\cos(\pi-(\theta_1+\theta_2))$

67 코사인법칙 사용의 대표적 상황

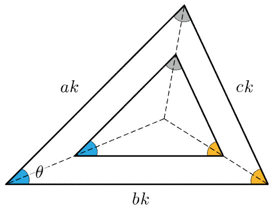
① 두 변과 끼인각에서 남은 한 변 길이 구하기

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

② 세 변을 알고 있으면 세 내각을 구할 수 있다.

$\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

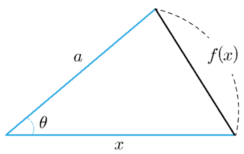
③ 세 변의 길이 비가 주어진 삼각형의 내각을 구할 때 활용



$\cos\theta=\dfrac{(ak)^2+(bk)^2-(ck)^2}{2(ak)(bk)}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

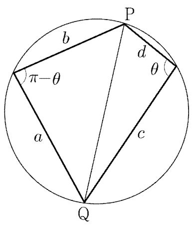
비율만 알아도 코사인값은 구할 수 있다.

④ 나머지 한 변의 길이를 미지수로 두고 코사인법칙 사용



$\{f(x)\}^2=a^2+x^2-2ax\cos\theta$

⑤ 원에 내접하는 사각형에서 코사인법칙 두 번 써서 연립하기

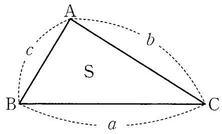


$\overline{PQ}^2=a^2+b^2-2ab\cos(\pi-\theta)$

$=c^2+d^2-2cd\cos\theta$

68 삼각형의 넓이

① 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어진 경우



$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$

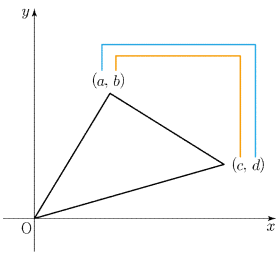
② 헤론의 공식

$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(단, $s=\dfrac{a+b+c}{2}$)

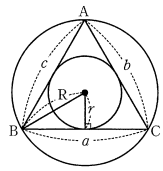
③ 세 점 $O(0,0)$, $P(a,b)$, $Q(c,d)$에 대하여 삼각형 OPQ의 넓이는

$S=\dfrac{1}{2}\times|ad-bc|$



④ 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 R이 주어진 경우

$S=\dfrac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

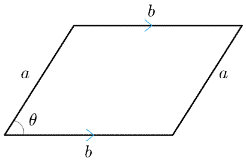


⑤ 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이 r이 주어진 경우

$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

69 사각형의 넓이

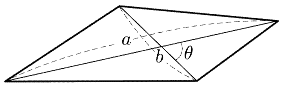
① 평행사변형의 넓이



이웃하는 두변의 길이가 각각 a, b이고 끼인각이 θ 알 때

$$S = ab\sin\theta$$

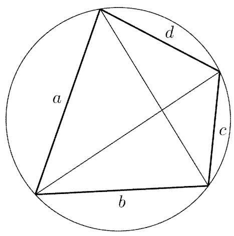
② 사각형의 넓이



두 대각선의 길이가 각각 a, b이고 끼인각의 크기가 θ 일 때

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

③ 원에 내접하는 사각형의 모든 변의 길이를 알 때
: 브라마굽타 공식

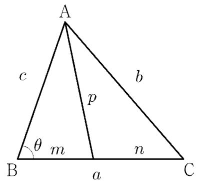


원에 내접하는 사각형 ABCD의 넓이

$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ (단, $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ 이다.)

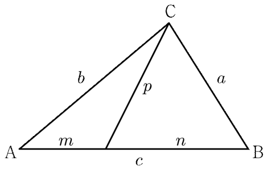
70 내분선 구하기

① 코사인법칙 연립



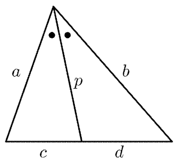
$$\cos\theta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{m^2+c^2-p^2}{2mc}$$

② 스튜어트 정리



$$ma^2 + nb^2 = (m+n)(p^2+mn)$$

③ 각의 이등분선일 때



1) $p = \sqrt{ab-cd}$
(이때 c, d는 실제 변의 길이이다.)

2) 특수각 일 때, 넓이공식 활용

$$\frac{1}{2}ab\sin 2\theta = \frac{1}{2}ap\sin\theta + \frac{1}{2}bp\sin\theta$$

71 일반항의 정의

수의 진행을 관찰한다. ⇨ 규칙성을 확인한다.

이때 첫 번째로 배열된 수를 a_1 이라 하고 n번째 배열한 수를 a_n이라고 한다.

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$$

a_1을 첫째항 또는 초항이라 하고, a_n을 제 n항 또는 일반항이라 한다.

수열의 각항은 그 항의 번호에 대응하여 정해지므로 수열은 정의역이 자연수 전체의 집합 N이고 공역은 실수 전체의 집합 R인 함수로 생각할 수 있다.

일정한 규칙 없이 수를 나열한 것도 수열이지만 교육과정상 규칙성이 있는 수열만 다룬다.

※ 일반항의 정의

a_{2n}은 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 아니다.

a_n ⇨ $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\ \cdots$ (자연수 전체)

a_{2n} ⇨ $a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8\ \cdots$ (짝수만 부분)

★ $a_{2n} = f(n)$이 주어져 있을 때 $\frac{n}{2}$을 대입하여 a_n을 찾는 행위는 주의해야 한다.

72 등차수열의 정의

1. 등차수열은 더하는 규칙성이다.

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \cdots \quad a_{n-1} \quad a_n$$
$$+d \quad +d \quad +d \quad \quad +d$$

첫째항부터 일정한 수를 더하여 만든 수열이며, 일정하게 더하는 수를 공차라고 한다. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서 제 n항 a_n에 공차 d를 더하면 제 $(n+1)$항 a_{n+1}이 되므로 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$a_{n+1} = a_n + d \ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

일반항은 미지수가 2개이다. 따라서 조건이 2개가 주어지면 일반항을 구할 수 있다.

2. 등차수열 항 사이의 차이는 공차의 개수

등차수열에서 항 사이의 관계는 몇 항 차이인지 주목해야 한다.

$$a_k - a_l = (k-l)d,\ \ a_k = a_l + (k-l)d$$

3. 등차중항

세 수 $a,\ x,\ b$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, x를 a와 b의 등차중항이라 하고,

$$2x = a+b$$

가 성립한다.

세 수 $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}$가 이 순서대로 등차수열을 이루면

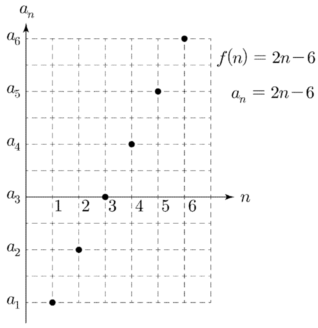
① $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$

② $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$

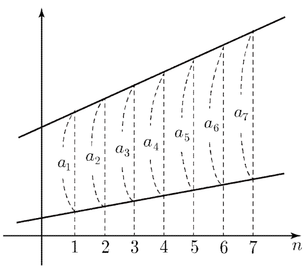
73 등차수열의 함수적 해석

1. 등차수열은 정의역이 자연수인 일차함수이다.

등차수열의 공차는 일차함수의 기울기가 된다.
등차수열 $a_n = 2n-6$ 을 좌표평면에 표현하면 다음과 같다.



2. 두 함수의 차의 결과가 1차 함수일 때



이미 언급했듯이 등차수열은 일차함수로 바라볼 수 있으며 일차함수에서도 등차수열을 떠올릴 수 있다. 따라서 위 그래프에서 a_n은 등차수열이다.

74 등차수열의 재구성

1. 등차수열의 대칭성

문제에서 "세 수가 등차수열을 이룰 때~", "혹은 네 수가 등차수열을 이룰 때~" 라는 표현을 보기 쉽다. 이처럼 몇 개의 수가 등차수열을 이룬다는 정보를 줄 때, 미지수는 다음과 같이 도입하자.

① 세 수가 등차수열 : $a-d$, a, $a+d$
② 네 수가 등차수열 : $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$
③ 다섯 수가 등차수열을 : $a-2d$, $a-d$, a, $a+d$, $a+2d$

이처럼 a를 기준으로 대칭으로 미지수를 잡으면 조건을 통해 문제가 쉽게 해결된다.

2. 등차수열의 재구성

등차수열에서 일정한 간격으로 항을 뽑아도, 묶어도 여전히 등차수열이 된다.

$a_1, a_2, a_3, \cdots$ 이 등차수열 일 때,

$a_1, a_3, a_5, \cdots$, $a_2, a_5, a_8, \cdots$

등도 여전히 등차수열이다. 다만,
(새로운 공차) = (공차)×(항의간격)으로 조정된다.

일차식 $f(x), g(x)$에 대하여 $mf(x) \pm ng(x)$도 일차식이다.
따라서 (등차수열)±(등차수열)도 여전히 등차수열이다.

[예] 공차가 d_1인 등차수열 $\{a_n\}$과 공차가 d_2인 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여 수열 $\{pa_n \pm qb_n\}$은 공차가 $pd_1 \pm qd_2$인 등차수열이다.

① $a_n \pm b_n$은 등차수열이다.
② a_1+a_2, a_3+a_4, a_5+a_6, $\cdots$
$\{a_{2n-1}+a_{2n}\}$은 등차수열이다.
③ a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, $\cdots$
$\{a_n+a_{n+1}\}$은 등차수열이다.

75 등차수열의 합

1. 수열의 합의 정의

첫 항부터 n번째 항까지의 합을 S_n이라 정의한다.
(무조건 첫 항부터 더한다.)

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n = S_n$

① $a_1 = S_1$
② $S_n - S_{n-1} = a_n \ (n \ge 2)$

2. 등차수열은 마주보는 항들의 합이 일정하다.

a_1, a_2, a_3, $\cdots$ a_{n-2}, a_{n-1}, a_n

⇩

$a_1+a_n = a_2+a_{n-1} = a_3+a_{n-2} = \cdots$
따라서 평균을 구하기 쉽다.

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n}{n} = \frac{a_1+a_n}{2} = \frac{a_2+a_{n-1}}{2}$$
$$= \frac{a_3+a_{n-2}}{2} = \text{평균}$$

따라서 수열의 합은 초항(a)과 끝항(l)만 알면 쉽게 구할 수 있다.

$$S_n = \frac{a+l}{2} \times n = \frac{\text{초항}+\text{끝항}}{2} \times (\text{항의 개수})$$

3. 등차수열 합의 일반 공식

또한 앞서 배운 공식에서 초항(a_1)부터 n번째 항(a_n)까지의 합을 구해보면

$$S_n = \frac{a+l}{2} \times n = \frac{a_1+a_n}{2} \times n$$

이때, $a_n = a_1 + (n-1)d$이므로,

$$S_n = \frac{(2a_1+(n-1)d)}{2} \times n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n$$

$\left(n^2\text{의 계수가 } \frac{d}{2}\text{인 것을 주목하자.}\right)$

의 형태를 확인할 수 있다.

76 등차수열의 합 (2)

1. 상수항이 존재하는 이차함수

㉠ $S_n = 2n^2 + n$과 ㉡ $S_n = 2n^2 + n + 1$의 차이를 살펴보자.

㉠ 은 $S_n - S_{n-1} = 4n-1$이므로 a_n은 등차수열이다.
㉡ 역시 같은 식이 나오는데, 주어진 식에 1을 대입하면 4이고 $a_1 = 3$이므로 ㉡ 식에서는 $S_1 \neq a_1$이 된다.

따라서 ㉡식은 첫 항을 제외한 나머지가 등차수열임을 인식하자.

$S_1 = a_1 = 4$
$S_2 = a_1 + a_2 = 11 \Rightarrow a_2 = 7$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 22 \Rightarrow a_3 = 11$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 37 \Rightarrow a_4 = 15$
$\vdots$

따라서 a_2부터 등차수열인 것을 확인할 수 있다.

2. 이차함수로 보는 등차수열의 합

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 다음과 같을 때,

$S_n = An^2 + Bn + C$ (단, A, B, C 는 상수)

① $C=0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등차수열을 이룬다.
첫째항 $a_1 = S_1$

② $C \neq 0$이면 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등차수열을 이룬다.
첫째항 S_1

77 등차수열의 함수적 해석 _ 1

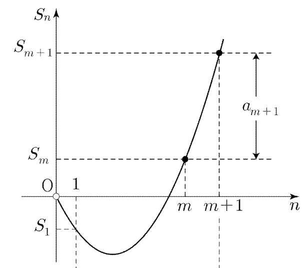
이차함수로 나타내는 등차수열의 합

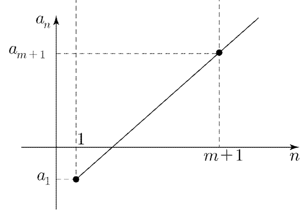
$$S_n = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2} = \frac{2an+n(n-1)d}{2}$$
$$= \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n = An^2 + Bn$$

이므로 상수항이 없는 이차함수는 등차수열 합의 일반항이다.

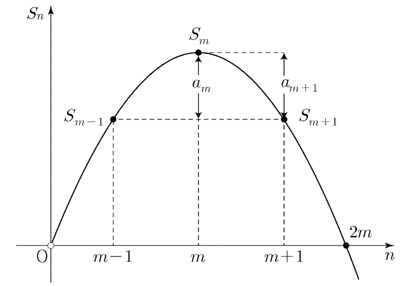
⇨ $S_n = n(An+B)$은 원점$(0,0)$을 지난다.

일반항은 $a_n = 2An + (B-A)$



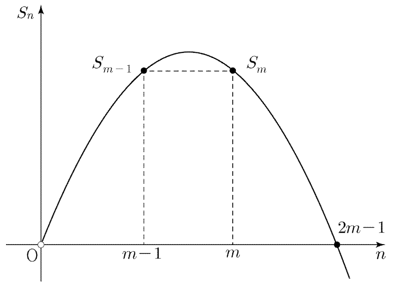


78 등차수열의 합 함수적 해석 _ 2



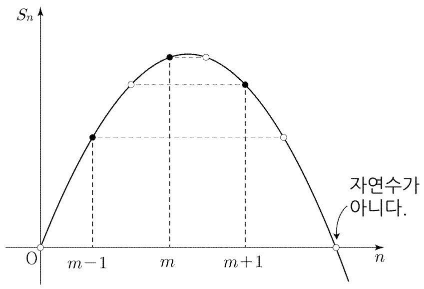
일반항 조건 : $|a_m| = |a_{m+1}|$를 만족하는 m이 존재

S_m에서 최댓값



일반항 조건 : $a_m = 0$을 만족하는 m이 존재

$S_{m-1} = S_m$에서 최댓값



임의의 두 자연수 p, q에 대하여

$|a_p| \neq |a_q|$

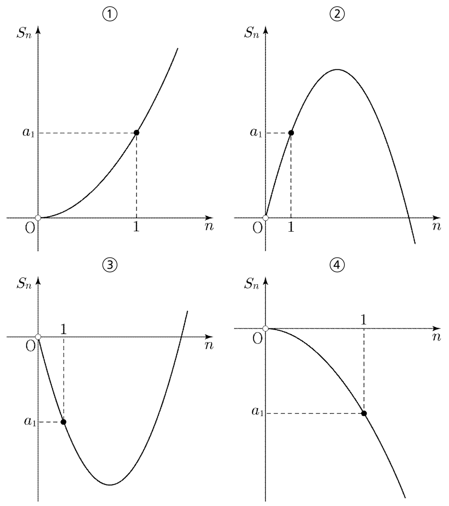
$S_p \neq S_q$

대칭축에 가까울 때 최댓값

79 등차수열의 합 함수적 해석 _ 5

최대최소를 가질 조건

구분	초항	공차	최대	최소
①	+	+	X	a_1
②	+	−	존재	X
③	−	+	X	존재
④	−	−	a_1	X



80 등비수열의 정의

1. 등비수열은 곱하며 진행한다.

a_1 a_2 a_3 a_4 $\cdots$ a_{n-1} a_n

$\times r$ $\times r$ $\times r$ $\times r$

첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만든 수열을 등비수열이라 하고, 곱하는 일정한 수를 공비라고 한다. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 제 n항 a_n에 공비 r를 곱하면 제$(n+1)$항 a_{n+1}이 되므로 다음과 같은 관계가 성립한다.

① $a_{n+1} = r \cdot a_n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

② $a_n = a_1 r^{n-1}$

일반항의 미지수는 2개이다. 2개의 식을 찾아야 한다.

2. 등비수열 항 사이의 차이는 공비의 개수 제곱

등비수열의 항 사이의 관계는 몇 항 차이인지에 주목

$\dfrac{a_k}{a_l} = r^{k-l},\ a_k = a_l r^{k-l}$

81 등비중항

1. 등비중항

(1) 세 수 $a,\ x,\ b$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, x를 a와 b의 등비중항이라 하고

$x^2 = ab$가 성립한다.

(2) 세 수 $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}$가 이 순서대로 등비수열을 이루면

① $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$

② $(a_{n+1})^2 = a_n a_{n+2}$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

2. 등비수열의 대칭성

(1) 세 수가 등비수열을 : $\dfrac{a}{r}$, a, ar (공비 r)

(2) 네 수가 등비수열을 : $\dfrac{a}{r^3}$, $\dfrac{a}{r}$, ar, ar^3 (공비 r^2)

(3) 다섯 수가 등비수열을 : $\dfrac{a}{r^2}$, $\dfrac{a}{r}$, a, ar, ar^2 (공비 r)

이처럼 a를 기준으로 대칭적으로 미지수를 잡으면 조건을 통해 문제가 쉽게 해결되는 경우가 있다.
항의 곱이 상수항이 나오는 문제에서
이 같은 미지수의 구성에 이점이 있다.

82 등비수열의 재구성

1. 등비수열의 재구성

등비수열에서 일정한 간격으로 항을 뽑아도, 묶어도 여전히 등차수열이 된다.

$a_n = a(r_a)^{n-1}$, $b_n = b(r_b)^{n-1}$일 때, 성질을 살펴보자.

① $a_1 + a_2$, $a_3 + a_4$, $a_5 + a_6$, $\cdots$ 모두 등비수열이다.

② $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 + a_4$, $\cdots$ 모두 등비수열이다.

③ $a_n b_n$: 공비가 $r_a r_b$인 등비수열이다.

④ $\dfrac{a_n}{b_n}$: 공비가 $\dfrac{r_a}{r_b}$인 등비수열이다. (단, $r_b \neq 0$)

2. 등차수열과 등비수열의 관계

① 등차수열 a_n에 대하여 수열 c^{a_n}은 등비수열이다.

② 등비수열 b_n에 대하여 $\log(b_n)$은 등차수열이다.

(단, $b_n > 0$)

83 등비수열의 합

1. 등비수열의 합 공식

첫째항 a, 공비 r, 항의 수 n, 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n

① $r \neq 1$이면 $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

② $r = 1$이면 $S_n = na$

<증명>

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ … ㉠

$rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$ … ㉡

㉠ − ㉡ $(1-r)S_n = a(1-r^n)$

$r \neq 1$일 때, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 1$일 때 ㉠에서, $S_n = a + a + a + \cdots + a = na$

2. 등비수열의 합의 특징

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a}{r-1}(r^n-1)$$
$$= \frac{a}{r-1}r^n - \frac{a}{r-1}$$
$$= Ar^n - A$$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이

$S_n = Ar^n + B$ ($r \neq 1$, A, B는 상수)일 때

① $A + B = 0$
이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 등비수열을 이룬다.
($S_0 = 0$으로 생각)

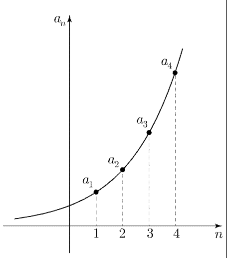
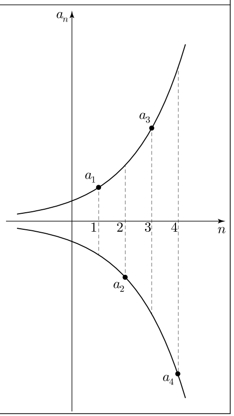
② $A + B \neq 0$
이면 수열 $\{a_n\}$은 둘째항부터 등비수열을 이룬다.

84 등비수열의 함수적 해석

① 초항 양수, 공비 양수인 등비수열은 정의역이 자연수인 지수함수이다.

② 초항 양수, 공비 음수인 등비수열은 홀수 번째 항은 $y = a^x$, 짝수 번째 항은 $y = -a^x$ 위에 있다.

[예]

공비 양수	공비 음수
	

85 등비수열의 곱

등비수열의 곱의 최대 최소

모든 항이 양수인 등비수열에서 등비수열의 곱의 최대와 최소를 생각해 보자.

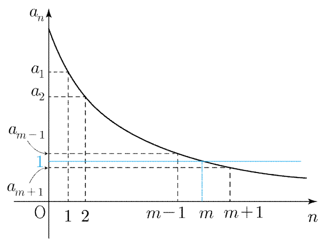
① 등비수열의 곱에서 최댓값이 존재할 때?
⇨ 공비가 $0 < r < 1$

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_m \times a_{m+1} \times \cdots$

위 수열에서 m번째 항까지의 곱이 최대라면

$a_m \geq 1$, $a_{m+1} \leq 1$

을 만족해야 한다. 즉 1보다 큰 값을 곱해서 값이 증가할 것이다.



② 등비수열의 곱에서 최솟값이 존재할 때? ⇨ 공비가 $r > 1$

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_m \times a_{m+1} \times \cdots$

위 수열에서 m번째 항까지의 곱이 최소라면

$a_m \leq 1$, $a_{m+1} \geq 1$

을 만족해야 한다. 즉 1보다 작은 값을 곱해서 값이 감소할 것이다.

86 등비수열의 부호

1. 공비의 부호

① 공비가 양수 ⇨ 초항의 부호가 수열 전체의 부호를 결정

② 공비가 음수 ⇨ 홀수 번째 항, 짝수 번째 항끼리 부호같음

초항이 양수 : + − + − + − + −

초항이 음수 : − + − + − + − +

2. 이웃한 항들의 곱

① 3개항 이웃

곱이 양수 : − + − 또는 + + +

곱이 음수 : + − + 또는 − − −

② 4개항 이웃의 곱은 무조건 양수

− + − + 또는 + − + − 또는

+ + + + 또는 − − − −

87 등비수열 도형활용

회차별 발생하는 도형의 닮음비를 찾는다.

1. 닮음비를 찾기 위해서는 다음 1회, 2회 발생도형의 선분길이를 찾아야한다.

① 이때 표시할 수 있는 길이, 넓이, 각 등은 미지수로 모두 표기한다.

② 위에 표시하고 남은길이 또한 미지수로 표현한다.

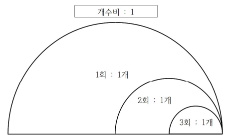
2. 일정한 비율로 회차별로 발생하는 도형의 개수가 증가하면

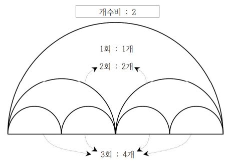
(최종적인 길이관련 공비)

$$= \frac{\text{두번째도형길이비}}{\text{첫번째도형길이비}} \times \text{(개수비)가 된다.}$$

(최종적인 넓이관련 공비)

$$= \left(\frac{\text{두번째도형길이비}}{\text{첫번째도형길이비}}\right)^2 \times \text{(개수비)가 된다.}$$





3. 초항을 구하고, 등비수열의 합 공식을 이용한다.

88 시그마의 정의와 기본성질 _ 1

1. $\sum$ 의 도입

S_n은 무조건 첫째항부터 n항까지의 합. 시작을 바꿀 수가 없다. 그래서 $\sum$ 기호가 탄생한 것이다.

$$a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{17}=\sum_{k=3}^{17}a_k=\sum_{k=1}^{15}a_{k+2}$$

일반항에 변화를 주면 시작 항과 끝항의 번호도 변한다.

① $\sum_{k=1}^{n}a_k$ 에서 k는 변수이다. k를 대신하여 $\sum_{l=1}^{n}a_l$, $\sum_{i=1}^{n}a_i$와 같이 나타 낼 수 있다.

② $\sum_{k=1}^{n}f(k)g(l)$ 에서 $g(l)$은 상수취급한다.

[예] $\sum_{k=1}^{n}f(k)g(l)=f(1)g(l)+f(2)g(l)+f(3)g(l)+\cdots+f(n)g(l)$

2. $\sum$ 의 표현법

① $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

② $\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=S_n-S_{n-1}=a_n$ $(n\ge 2)$

③ $\sum_{k=m}^{n}a_k=S_n-S_{m-1}$

3. $\sum$ 의 기본 성질

① $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 k와 관계없는 상수)

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\pm\sum_{k=1}^{n}b_k$ (단, 복호동순)

③ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

④ $\sum_{k=1}^{n}(a_k\pm c)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\pm 2c\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}c^2$ (단, c는 상수)

★주의!

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\ne\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k,\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k}\ne\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}$$

89 시그마의 정의와 기본성질 _ 2

$\sum$ 의 기본 연산

① $\sum_{k=1}^{n}c=c+c+\cdots+c=cn$

② $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

③ $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{(2n+1)}{3}$$

④ $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

⑤ $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

$$=(1+2+3+\cdots+n)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$$

⑥ $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

⇨ 홀수의 합은 완전제곱수와 같다.

⑦ $\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$: 등비수열은

등비수열의 합 공식으로!

90 수열의합과 일반항

① 나열된 수에서 규칙성을 이용하여 일반항을 찾아야 한다.

⇨ k번째 항 'a_k'를 찾아야 한다.

마지막 나열된 a_n은 일반항이 아니다. 따라서 n번째 항 a_n에 $n=k$를 대입하여 a_k를 찾아서는 안된다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

② 수열의 합에서 일반항 찾기

⇨ 수열의 합은 n에 관한 함수이다.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=f(n)$$

따라서 일반항을 n번째 항 'a_n'으로 찾아야 한다.

$\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=f(n)-f(n-1)=a_n$ (단, $n\ge 2$)

★ 일반항이 복잡해 보이면 통으로 치환하자.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k+b_k}{c_k}=f(n)$$

와 같은 수열의 합 에서 a_n을 찾을 때, $\dfrac{a_k+b_k}{c_k}=g(k)$로 치환하여

$$\sum_{k=1}^{n}g(k)-\sum_{k=1}^{n-1}g(k)=S_n-S_{n-1}$$

$$=f(n)-f(n-1)=\frac{a_n+b_n}{c_n}\quad(n\ge 2)$$

임을 이용하여 a_n을 찾자.

91 이항분리 _ 1

1. 한 단계 차이 : 앞에 1개 뒤에 1개 남는다.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})$$

$$=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_{n+1})$$

※ $a_{k+1}-a_k$로 나와 있으면 $-(a_k-a_{k+1})$로 바꾼다.

① $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{a_{k+1}-a_k}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$

② $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$

③ $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}(-\sqrt{k}+\sqrt{k+1})$

$$=-\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})=-(1-\sqrt{n+1})$$

④ $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$

⑤ $\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log\dfrac{k+1}{k}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\{\log k-\log(k+1)\}=\log(n+1)$$

참고 부분분수분해

(1) $\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}\times\mathrm{B}}=\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}-\mathrm{A}}\left(\dfrac{1}{\mathrm{A}}-\dfrac{1}{\mathrm{B}}\right)$

(2) $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}\times\mathrm{B}\times\mathrm{C}}=\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}-\mathrm{A}}\left(\dfrac{1}{\mathrm{AB}}-\dfrac{1}{\mathrm{BC}}\right)$

92 이항분리 _ 2

2. 두 단계 차이 : 앞에 2개 뒤에 2개 남는다.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+2})=a_1+a_2-a_{n+1}-a_{n+2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+2})$$

$$=(a_1-a_3)+(a_2-a_4)+(a_3-a_5)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_{n+1})$$

① $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)=\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

② $\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{2}\right)$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$$

3. 주의

$a_1=5$ 이고 $-\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-(a_1-a_{n+1})=3n+1$

일 때,

$a_{n+1}=3n+1+5=3n+6$

이라서

$a_n=3n+3$

이라고 하면 안 된다.

$a_n=3n+3$ $(n\ge 2)$ 이다. 정의역 범위 조심하자.

93 특수형태

핵심은 이항(二項)분리이다. 아래는 공식이 아닌 유형 연습으로 다른 형태의 문제가 나오더라도 당황하지 말고
1) 잘 쪼갤 수 있는지 2) 나열하면 규칙성이 나오는지 확인하고 문제를 풀자.

① $\sum_{k=1}^{n} k\times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k!$

$= \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)!-k!\}$

② $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right\}$

③ $\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+1)k! = \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)(k+2)-1\}k!$

$= \sum_{k=1}^{n}\{(k+2)!-k!\}$

④ $\sum_{k=1}^{n}(-1)^n(a_n+a_{n+1}) = -(a_1+a_2)+(a_2+a_3)-(a_3+a_4)+(a_4+a_5)-\cdots$

⑤ $\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n}\{ka_k-(k+1)a_{k+1}+a_{k+1}\}$

$= a_1-(n+1)a_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}$

⑥ 합이 일정한 수열

$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=k$ ⇨ 주기가 4인 수열

⑦ $a_n+a_{n+1}=f(n)$

1) $f(n)$이 등차수열

(i) $a_n+a_{n+1}=f(n)$ (ii) $a_{n+1}+a_{n+2}=f(n+1)$

⇨ $a_{n+2}-a_n=f(n+1)-f(n)$

2) $f(n)$이 등차수열 아니면 나열해서 규칙성 찾기

94 수열의 귀납적 정의

(1) 수열의 귀납적 정의

수열은 두 가지로 표현할 수 있는데,

하나는 일반항이고 또 다른 표현은 귀납적 정의

라는 표현이다. 가장 일반적인 수열의 표현은 역시나 일반항이다. 일반항을 구하게 되면, 함숫값을 구하듯이 n에 원하는 자연수를 대입함으로써 편하게 n번째 항의 값을 구할 수 있다. 일반항 외에도 수열을 표현하는 방식이 있는데 이를 귀납적 정의라고 한다.

귀납적 정의란?

귀납적 정의란 수열을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 항 사이의 관계식으로 정의하는 것을 말한다. 일반적으로 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$a_n = \begin{cases} \text{첫째항 } a_1 \text{ 의 값} \\ \text{이웃하는 두 항 } a_n,\ a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ \cdots) \text{ 사이의 관계식} \end{cases}$

(2) 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의

등차수열 : $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$

등비수열 : $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n r\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$

※ Named 점화식과 New 점화식

등차수열과 등비수열을 나타내는 점화식

(1) 등차수열을 나타내는 점화식

① $a_{n+1}=a_n+d$ ⇔ $a_{n+1}-a_n=d$

⇨ 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열

② $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ ⇔ $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$

(2) 등비수열을 나타내는 점화식

① $a_{n+1}=ra_n$ ⇔ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=r$

⇨ 수열 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열

② ${a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}$ ⇔ $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$

만약 항들과의 관계를 모르면 방법은 하나 뿐이다.

"잘 나열해서 규칙성 찾는다."

※ 수열의 합과 일반항의 혼합

a_n과 S_n이 점화식으로 같이 나와 있으면 "종류통일"을 먼저 생각한다. 이때 판단은 S_n-S_{n-1} 을 a_n으로 쓸지와 a_n을 S_n-S_{n-1}로 바꿀지 판단해야한다.

이때 조심해야 하는 것은 정의역의 범위이다.
주어진 수열에서 정의역은 자연수 범위이다.

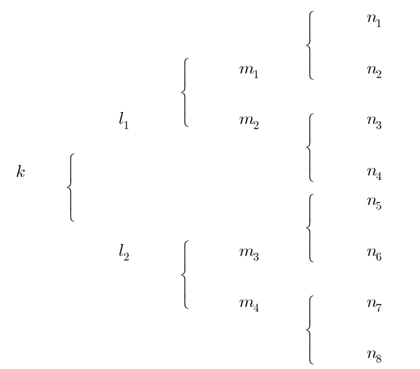
$S_n-S_{n-1}=a_n\ (n\geq 2)$

95 귀납적으로 정의된 수열의 문제 풀이

① 행 나열 ⇨ 보통 항의 개수가 5개 이하

Case분류가 많을 때 우측 방향으로 수형도를 그리며 나열

a_1 ⇨ a_2 ⇨ a_3 ⇨ a_4



② 열 나열 ⇨ 보통 항의 개수를 10개 이상

Case분류가 없거나 적은 경우, 나열하여 주기성을 찾는 문제

$a_1=k$
⇩
$a_2=l$
⇩
$a_3=m$
⇩
$a_4=n$
⇩
$a_5=k$ 주기 4

③ 역방향 나열

1) 역방향으로 나열할 것이 적으면 방정식으로 푼다.

$a_{n+1} = \begin{cases} f_1(a_n) & (\text{조건}1) \\ f_2(a_n) & (\text{조건}2) \end{cases}$

⇨ $a_{n+1}=f_1(a_n)$ 또는 $a_{n+1}=f_2(a_n)$

2) 역방향 나열 메카니즘을 찾는다.

$a_{n+1} = \begin{cases} f_1(a_n) & (\text{조건}1) \\ f_2(a_n) & (\text{조건}2) \end{cases}$ ⇨ $a_n = \begin{cases} f_1(a_{n+1}) & (\text{조건}1') \\ f_2(a_{n+1}) & (\text{조건}2') \end{cases}$

그 외는 용기를 갖고 나열한다.

96 수학적 귀납법

1. 수학적 귀납법은 도미노다.

도미노를 하려면
① 첫 번째 블록을 넘어뜨려야 한다.
② 각 블록사이의 간격이 연쇄반응을 일으킬 수 있어야 한다.

마찬가지로 수열이 증명되려면
① $n=1$일 때 성립함을 보여야 하고
② n번째가 참일 때 $n+1$번째가 참이 될 수 있어야 한다.

모든 자연수 n에 대하여 등식
$f(n)=g(n)$이 성립함을 증명하려면
① $f(1)=g(1)$임을 보인다.
② $f(k)=g(k)$가 성립한다고 가정 후
좌변이 $f(k+1)$이 되도록 양변에 같은 식을 더하거나 곱하고
우변이 $g(k+1)$이 됨을 보인다.

2. 빈출유형 판단 순서

단계	등식	부등식	배수증명
step 1	$n=1$일 때 성립 확인		
step 2	$n=k$성립가정 주어진 식에 $n=k$대입하고 식을 쓴다.		
	$f(k)=g(k)$	$f(k)>g(k)$	$f(k)=m\times l$
step 3	양변에 같은 수를 더하거나 곱한다.		주어진식에 $n=k+1$을 직접 대입한다.
	$f(k)+C=g(k$	$f(k)+C>g(k)+C$	
step 4	좌변과 우변을 계산하면 $n=k+1$번째가 나온다.	$f(k)+C=f(k+1)>$ $g(k)+C>g(k+1)$ 의 증명이 필요함.	$f(k+1)=pf(k$ 로 만들어야 한다.
	$f(k)+C=g(k$ $f(k+1)=g(k$	$f(k+1)>g(k)+C>$ 이므로 $f(k+1)>g(k+1)$	$f(k)$는 m의 배수 q가 m의 배수가 나온다.

1 수학Ⅱ 관심 Point

키워드는 '변화' 이다.

x를 통해 y를 보고자하는 것이 함수이다. 이때 x값은 정해져 있을 수도 변화할 수도 있다. 이에 따라 y값은 일정할 수도 변화할 수도 있다. 수학Ⅱ이전 교육과정에서 정해진 x값에 따른 y값을 구했다면, 이제는 변화에 초점을 맞춰야 한다. 수학Ⅱ에서 우리가 할 것은 x값 변화에 따른 y값 변화의 관찰이다.

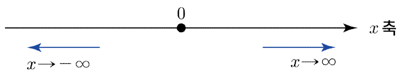
2 독립변수의 변화

변화는 동적 개념이다

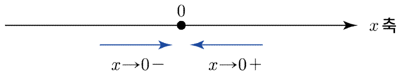
수직선상에서 ① 한없이 오른쪽으로 가거나 ② 한없이 왼쪽으로 가거나 ③, ④ 처럼 특정 값을 향해 갈 수 있다.

① $x\to\infty$: 수직선상 무한히 오른쪽으로 가는 상태

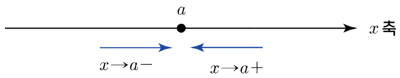
② $x\to-\infty$: 수직선상 무한히 왼쪽으로 가는 상태



③ $x\to0$: 0을 향해가는 2가지 방향의 상태



④ $x\to a$: a를 향해가는 2가지 방향의 상태



$x\to a+$ 의 의미는 다음과 같이 해석할 수 있다.

① '절대 a가 아님'

② 'a보다 큼'

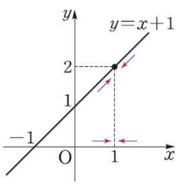
3 종속변수의 변화

관찰대상은 y값이다.

$$\lim_{x\to a}f(x)=b$$

⇨ $\lim_{x\to a}(b+ \text{ or } b- \text{ or } b)=b$(목적지의 y값)

⇨ $\lim_{x\to a}$(상태변화 관찰) = 상태변화가 아닌 상수값



함수 $f(x)=x+1$에서 x가 1보다 큰 값에서 점점 1로 가까워 지면 $x+1$은 2보다 큰 값에서 2로 가까워질 뿐 절대 2는 아니다. $x+1$에 $\lim$를 씌우면 비로소

$$\lim_{x\to1+}(x+1)=2$$

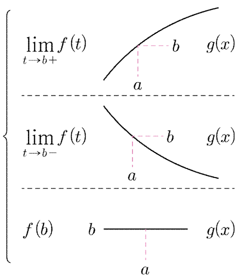
가 된다. $\lim$의 결과는 상태를 따지는 것이 아니라 목적지의 y값만을 표기한다.

4 그래프를 이용한 극한 계산

1. 합성함수의 극한

속함수 y값의 상태를 파악하자

$$\lim_{x\to a+}f(g(x))=$$



2. 유리함수가 합성되어 있을 때 극한 계산

① 분자의 차수를 낮춰서 극한으로 보내자.

$$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{4t+5}{t+1}\right)=\lim_{t\to\infty}f\left(4+\frac{1}{t+1}\right)=\lim_{x\to4+}f(x)$$

② ∞로 가는 문자에 1000 정도 대입해서 유추

$$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{4t+5}{t+1}\right)=f\left(\frac{4005}{1001}\right)=f\left(4+\frac{1}{1001}\right)=\lim_{x\to4+}f(x)$$

3. 대칭성을 이용한 극한값 계산

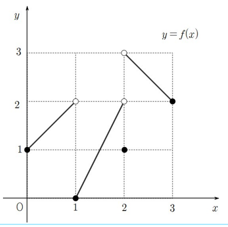
주어진 그래프를 그대로 이용하자.

① $f(-x)$의 극한 ⇨ $\lim_{x\to-a-}f(-x)=\lim_{x\to a+}f(x)$

② 우함수 : $\lim_{x\to-a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(-x)=\lim_{x\to a+}f(x)$

기함수 : $\lim_{x\to-a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(-x)=\lim_{x\to a+}\{-f(x)\}$

$f(-x)=-f(x)$이다. $\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to-2-}f(x)$ 의 값은?



원점대칭 그래프를 그리지 말고 대칭성을 이용해서 식 계산을 하자.

$$\lim_{x\to-1+}f(x)+\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to1-}f(-x)+\lim_{x\to2+}f(-x)$$
$$=\lim_{x\to1-}\{-f(x)\}+\lim_{x\to2+}\{-f(x)\}$$
$$=-(2+3)=-5$$

5 정형과 부정형

$\lim$는 제한되는가? 의 물음이다.

그 물음의 답은 크게 3가지이다.

① 제한된다.
② 제한되지 않는다.
③ 알 수 없다.

이때, ①과 ②를 우리는 '정형'이라고 하며 ③은 '부정형'이라고 한다. 정형은 알 수 있는 것이다. 다시 말해 직관적으로 생각할 수 있고 ③은 알 수 없기에 직관적인 영역보다는 논증적인 영역이 더 필요하다. 그 중에서 ①처럼 특정한 수로 제한될 때 '수렴한다.' 라고 표현한다. 수렴이 아니면 '발산' 또는 '수렴하지 않는다.' 라고 말한다.

함수가 바뀌는 곳, 분모=0 인 곳은 특별하다.

좌극한, 우극한, 함숫값이 다를 수 있다. 이런 특별한 곳에서 문제의 핵심이 있을 것이다.
만약,

$$f(\alpha)+\lim_{x\to\alpha+}f(x)=4$$

와 같이 주어지면 두 가지로 분류를 하자.

① $f(\alpha)=\lim_{x\to\alpha+}f(x)$

② $f(\alpha)\neq\lim_{x\to\alpha+}f(x)$

이 때, 생각을
① 일반적인 상황
② 특별한 상황
으로 인지하면서 문제를 풀어나가자.

6 함수의 극한 기본성질

수렴하는 함수끼리는 수렴한다. 그 외는 모른다.

$\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}g(x)$가 모두 수렴할 때

❶ $\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x)=k\alpha$ (단, k는 상수)

❷ $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=\alpha+\beta$

❸ $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=\alpha-\beta$

❹ $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\beta$

❺ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta\neq0$)

함수의 극한에 대한 성질은 수렴하는 함수라면

$x\to a+,\ x\to a-,\ x\to\infty,\ x\to-\infty$

일 때도 모두 성립한다.

ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$의 값이 각각 존재하면 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값이 존재한다.

ㄷ. $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$이면 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다.

ㄱ. 각각 존재하면, $\lim$같이 써도 된다.

$$\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\times\frac{g(x)}{f(x)}\right\}$$

따라서 $\lim_{x\to a}g(x)$존재하고

$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재한다.

ㄴ. 나눌 때 제발! '0' 아니라는 조건 있는지 확인하자. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$이면, $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$이다.

따라서 존재하는 $\lim_{x\to a}f(x)$와 존재하는 $\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$를 이용해서 판단한다.

$$\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\times\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=\alpha\times0=0$$

7 함수의 극한 기본성질을 이용한 계산

1. 각각의 함수의 수렴과 발산을 먼저 체크한다.

함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to0}\{xf(x)-(x^2+2)\}=1$ 을 만족시킨다.

$\lim_{x\to0}(x^2+2)=2$이므로 $\lim_{x\to0}\{xf(x)\}=3$이다.
이거 그냥 수렴하는 것. 괜히 어렵게 생각하지 말자.

2. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}=\alpha$ (α는 상수)
조건이 주어진 경우 $f(x)$로 묶어서 극한식을 판단한다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\{g(x)-f(x)\}=4$
이다.

$$\lim_{x\to\infty}\{g(x)-f(x)\}=\lim_{x\to\infty}f(x)\times\left\{\frac{g(x)}{f(x)}-1\right\}=4$$

이므로 $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{g(x)}{f(x)}-1\right\}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=1$ 이다.

3. 주인공이 누구인지 판단하자.
어떤 함수의 정보가 더 많은지 생각해서 모르는 함수를 잘 아는 함수로 나타내자.
즉, 모르는 함수를 주인공으로 세팅한다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$xf(x)-f(x)g(x)+g(x)=0$
이다.
(나) $\lim_{x\to0}f(x)=1$

이때 주인공은 $g(x)$이다.
$$g(x)=\frac{xf(x)}{f(x)-1}$$
알고 있는 $f(x)$의 정보로 $g(x)$를 추론할 수 있다.

8 극한값의 존재

1. 좌극한과 우극한이 같지 않다.
$$\lim_{x\to a-}f(x)\neq\lim_{x\to a+}f(x)$$
좌극한, 우극한의 값은 각각 존재하지만 서로 다르다.

2. 좌극한고 우극한이 같다.
$$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$$
좌극한, 우극한의 값은 각각 존재하고 서로 같다.

함수 $f(x)$가 $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ 일 때,
$\lim_{x\to1-}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to1+}f(x)=\infty$
이지만
$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$
인 것은 아니다. 물론
$\lim_{x\to1-}f(x)\neq\lim_{x\to1+}f(x)$
인 것도 아니다. ∞는 존재 하지 않는 것으로
$\infty=\infty$, $\infty\neq\infty$, $\infty<\infty$
등은 엄밀하게 따지면 모두 틀리다.

3. 부정형의 극한값 존재

① 발산 ± 수렴 = 발산

② 발산 × 수렴
발산의 조건을 확인한다.
(1) 좌극한과 우극한은 있지만 극한값이 없는 발산
⇨ 수렴하는 함수의 극한값이 0이면 최종수렴
(2) 좌극한 또는 우극한이 존재하지 않는다.
⇨ 직접 좌극한, 우극한을 구해본다.

③ 발산 × 발산 : 모른다. 직접 좌극한, 우극한을 구해본다.

두 함수
$$f(x)=x^2-x-6,\ g(x)=\begin{cases}-x & (x\le a)\\ x-4 & (x>a)\end{cases}$$
에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$의 값이 존재하도록 하는 a의 값의 합은?

$g(x)$를 기준으로 분류하자.
① $g(x)$가 $x=a$에서 극한값이 존재할 때
: $a=2$
② $g(x)$가 $x=a$에서 극한값이 존재하지 않을 때
수렴하는 함수 $f(x)$의 극한값이 0이면 된다.
$f(a)=a^2-a-6=(a-3)(a+2)=0$
: $a=3$ 또는 $a=-2$

4. $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^k}{|x-a|}$의 극한이 존재하기 위한 자연수 k의 최솟값은 2이다.

$$① \lim_{x\to a}\frac{1}{|x-a|}=\begin{cases}\lim_{x\to a+}\frac{1}{x-a}=\infty\\ \lim_{x\to a-}\frac{1}{-(x-a)}=-\infty\end{cases}$$

$$② \lim_{x\to a}\frac{x-a}{|x-a|}=\begin{cases}\lim_{x\to a+}\frac{x-a}{x-a}=1\\ \lim_{x\to a-}\frac{x-a}{-(x-a)}=-1\end{cases}$$

$$③ \lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{|x-a|}=\begin{cases}\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)^2}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{x-a}{1}=0\\ \lim_{x\to a-}\frac{(x-a)^2}{-(x-a)}=\lim_{x\to a-}\frac{x-a}{-1}=0\end{cases}$$

9 유형별 극한값의 계산

유형을 먼저 파악하자.

함수의 극한은 부정형인지 아닌지, 부정형이라면 어떤 꼴인지 파악하는 습관을 들여야 한다. 대표적인 네 가지 부정형의 꼴을 알아보자.

1. $\frac{0_{ing}}{0_{ing}}$ 꼴

❶ $f(x)$, $g(x)$가 다항함수일 때
➡ $f(x)$ 또는 $g(x)$를 인수분해한 후 공통인수는 약분한다.
❷ $f(x)$ 또는 $g(x)$가 무리함수일 때
➡ $f(x)$ 또는 $g(x)$의 무리함수를 유리화한 후 약분한다.

수렴상황 : 분모가 약분완료
발산상황 : 분모 덜 약분 됨

2. $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴

[방법1] 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 동시에 나눈다.
[방법2] 분자 $f(x)$와 분모 $g(x)$ 각각에서 최고차항만을 비교한다.

3. $\infty-\infty$ 꼴

① 근호가 없는 다항함수
최고차항으로 묶어
$\infty\times a$(단, $a\neq0$인 상수) 꼴로 변형하여 극한값 계산한다.
$a>0$이면 ∞, $a<0$이면 $-\infty$

② 근호가 있을 때
유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 극한값 계산한다.
또는
$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2차식}-\sqrt{2차식})=$ 수렴
상황이라면 근사적 다항식을 이용할 수 있다.

① 의 방법과 같이 근호가 없는 다항함수의 경우 직관적인 풀이를 하는 것이 효율적이다.

② 의 경우 수렴하려면 최고차항의 차수와 계수가 모두 같아야 한다. 예를 들어 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+1}-x)$의 경우 최고차항만 생각하면 $\lim_{x\to\infty}(2x-x)=\lim_{x\to\infty}x=\infty$이다.

$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{4x^2+4x+1}-(ax+b)\}=0$일 때, $a+b$의 값은?

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2차식}-\sqrt{2차식})$이 수렴하는 상황이다. 따라서 이차식의 최고차항 계수가 같아야 한다. $a=2$

(방법 1) 유리화
$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{4x^2+4x+1}-(2x+b)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{(4-4b)x+1-b^2}{\sqrt{4x^2+4x+1}+(2x+b)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{(4-4b)x+1-b^2}{2x+2x}\right\}=0$$
따라서 $b=1$

(방법 2) 근사적 다항식
$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{(2x+1)^2+★}-(ax+b)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\{(2x+1)-(ax+b)\}=0$$
$a=2$, $b=1$

4. $0_{ing}\times\infty$ 꼴

$f(x)$, $g(x)$가 모두 다항함수이고
$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ 또는
$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a}g(x)=0$일 때,
$\lim_{x\to\infty}f(x)g(x)$, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)$의 함수의 극한은 다음과 같이 계산한다.

통분 또는 유리화하여 $\frac{0_{ing}}{0_{ing}}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

5. 부정형의 간접계산

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)

일 때, 함수 $h(x)$에 대하여

$f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\alpha = \beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$-x^2+x \le f(x) \le x^2+x$

를 만족시킬 때, 극한값 $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\{f(x)\}^2}{x\{2x+f(x)\}} = \dfrac{q}{p}$라 하자.

최종적으로 구하는 $x\to 0+$일 때의 상황에서 주어진 부등식이 수렴할 조건을 먼저 예측하자. 부등식을 x로 나눠야 $x\to 0+$ 상황에서 수렴하는 값을 써먹을 수 있다.

$\dfrac{-x^2+x}{x} \le \dfrac{f(x)}{x} \le \dfrac{x^2+x}{x}$ ⇨ $\lim_{x\to 0+} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

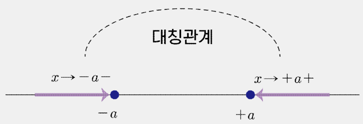
따라서 $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}^2}{\dfrac{x}{x}\left\{\dfrac{2x}{x}+\dfrac{f(x)}{x}\right\}} = \dfrac{1}{3}$

10 치환, 대칭의 형태 총정리

① $x \to -\infty$ ⇨ $x = -t$ 치환

음의 무한으로 가는 상황은 직관적이지 않아 실수할 수 있다. 음의 무한대로 가면 무조건 치환하여 양의 무한대로 가는 상황으로 바꾸자.

② $f(-x)$의 극한



$f(-x)$가 주어져 있을 때 $f(x)$로 바꿔 문제를 푸는 것이 용이할 때가 많다.

$\lim_{x\to a+} f(-x) = \lim_{x\to -a-} f(x)$

③ $\lim_{x\to\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ⇨ $\dfrac{1}{x} = t$ 치환

④ $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x-a)}{x-a}$ ⇨ $x-a = t$ 치환

11 함수의 극한과 미정계수의 결정

$\dfrac{(\star)}{0_{ing}}$, $\dfrac{0_{ing}}{(\star)}$, $(\star)\times\infty$, $0_{ing}\times(\star)$

α가 상수일 때 다음이 성립한다.

❶ $\dfrac{(\star)}{0_{ing}} = \alpha$에서 $(\star)$의 극한이 0이어야 수렴할 수 있다.

❷ $\dfrac{0_{ing}}{(\star)} = \alpha$에서 $(\star)$의 극한이 0이어야 α의 값이 0이 아닌 값으로 수렴할 수 있다.

❸ $(\star)\times\infty = \alpha$에서 $(\star)$의 극한이 0이어야 수렴할 수 있다.

❹ $0_{ing}\times(\star) = \alpha$에서 $(\star)$의 절댓값이 양의 무한대로 발산해야 α의 값이 0이 아닌 값으로 수렴할 수 있다.

12 다항함수의 결정

1. $\dfrac{0}{0}$꼴에서 다항함수의 결정

① $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = \alpha$ ⇨ $f(x) = (x-a)^n \times g(x)$

해석 : (1) $\alpha \ne 0$이면 $f(x)$는 $(x-a)^n$을 인수로 갖는다.

(2) $\alpha = 0$이면 $f(x)$는 $(x-a)^m$을 인수로 갖는다. 이때 $m > n$

(3) 특히 $n=1$일 때,

$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x-a} = \alpha$ ⇨ $\begin{cases} f(a) = 0 \\ f'(a) = \alpha \end{cases}$

② $\lim_{x\to a} \dfrac{(x-a)^n}{f(x)} = 0$ ⇨ $f(x) = (x-a)^m \times g(x)$, $m < n$

해석 : 분자에 인수가 남아서 0된다.

③ $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{ax^n} = k$ ⇨ $f(x) = \cdots + kax^n$

해석 : 최저차항 결정

④ $f(a) = 0$이고, $f'(a) = 0$ ⇨ $f(x) = (x-a)^2 \times g(x)$

해석 : $f(x)$는 x축에 접한다.

⑤ $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{(x-a)^n} = \infty$ ⇨ $f(x) = (x-a)^m \times g(x)$일 때,

$m < n$, $n-m =$ 짝수

해석 : 분모가 덜 약분된다. 그리고 $\pm\infty$가 아닌 ∞가 나오려면 짝수차수여야 한다.

2. $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴에서 다항함수의 결정

① $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{ax^n+\cdots} = k$ $(k \ne 0)$ ⇨ $f(x) = kax^n + \cdots$

해석 : 최고차항 결정

② $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^n+\cdots} = p$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^m} = q$

⇨ $f(x) = px^n + \cdots + qx^m$ $(m < n)$

③ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^n+\cdots} = p$, $\lim_{x\to k} \dfrac{f(x)}{(x-k)^m} = q$

⇨ $f(x) = p(x-k)^n + \cdots q(x-k)^m$ $(m < n)$

④ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^n+\cdots} = \infty$ ⇨ $f(x) = ax^m + \cdots$일 때,

$n < m$, $a > 0$

3. 부등식에서 다항함수의 결정

$g(x) \le f(x) \le h(x)$

① 방정식 $g(x) = h(x)$을 통해 경계가 되는 두 함수의 위치관계 파악

② 두 함수 $g(x)$, $h(x)$의 차수 파악

$ax^p + \cdots \le bx^n + \cdots \le cx^q + \cdots$

(1) $p < q$이면 $f(x)$가 n차 다항함수이면 $p \le n \le q$

(2) $p = q$이면 $a \le b \le c$

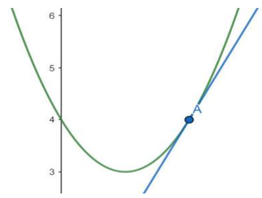
다항함수 $f(x)$가 다음조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $2x \le f(x) \le x^2-2x+4$

[정답] 10

두 함수 $y=2x$, $y=x^2-2x+4$의 그래프는 $x=2$에서 접한다.



(가) 조건에 의해 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{2}$인 이차함수

$f(x)$가 $x=2$에서 $y=2x$그래프와 접해야 한다.

⇨ $f(2) = 4$, $f'(2) = 2$

따라서 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2$이다. $f(4) = 10$

13 함수의 극한 활용문제

좌표를 t에 관해 표현하자.

1. 방정식의 교점

① 이차방정식이면 근의 공식 쓸 준비

② 혹시 근과 계수와의 관계를 쓰는 것이 유리한지 판단

2. 길이의 표현

① 특수각인지 확인하자.

⇨ 기울기가 ± 1, $\pm\sqrt{3}$, $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이면 특수각이다.

② 그 외는 점과 점 사이 거리

3. 넓이의 표현

① 밑변의 연장선에 수선의 발을 내리자. (등적삼각형 원리)

② 한 번에 구하기 어려우면 나눠서 구하자.

② 점 직선 공식을 이용하여 수선의 발의 길이를 구하자.

③ 신발끈 공식 이용

4. 이등변 삼각형

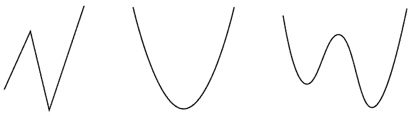
① 중선은 대변을 수직 이등분한다.

② 피타고라스 정리

14 함수의 연속의 정의

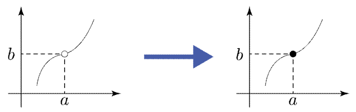
연속은 '잘 연결'

연속함수 직관적인 느낌은 아래 그림처럼 펜을 한 번도 떼지 않고 그릴 수 있는 그래프이다.



링 연결된 곳에 함숫값을 색칠한다 생각하자.

왼쪽의 그래프는 끊어져 있지 않고 '링'으로 연결되어 있다. 즉 극한값이 존재한다. 이 '링'에 함숫값으로 색칠해주면 연속함수가 된다.



$$\lim_{x \to a} f(x) = l = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = l = f(a)$$

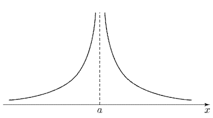
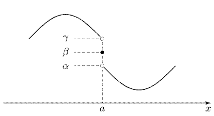
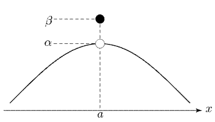
좀 더 쉽게 말하면 좌극한, 우극한, 함숫값이 같은 상태이다.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$$

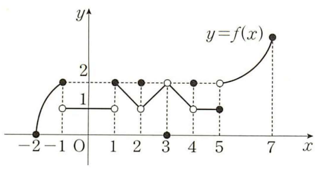
(좌극한) = (우극한) = (함숫값)

15 불연속의 정의와 표현

연속조건	불연속 조건
❶ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있다.(함숫값 존재) ❷ 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다. ❸ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$	❶ ~ ❸ 중 하나라도 성립하지 않으면 불연속

구분	함수의 그래프	불연속 사유와 불연속 표현
A		❶ 함숫값이 없다. 함숫값이 있어도 ❷ 조건에 의해 불연속이다. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
B		❷ 조건에 의해 불연속이다. $\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$
C		❸ 극한값과 함숫값이 다르다. $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

▪ 닫힌구간 $[-2,\ 7]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다.



두 집합 A, B에 대하여

$$A = \left\{ a \,\middle|\, \lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x),\ a\text{는 실수} \right\}$$

$$B = \left\{ b \,\middle|\, \lim_{x \to b} f(x) \neq f(b),\ b\text{는 실수} \right\}$$

$\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$의 표현은 좌극한과 우극한이 서로 달라서 극한값이 없다는 것이다. 따라서 집합 A는

$A = \{-1,\ 1,\ 5\}$

이다.

$\lim_{x \to b} f(x) \neq f(b)$의 표현은 극한값이 존재하지만 함숫값과 다르기 때문에 불연속이다. 따라서 집합 B는

$B = \{2,\ 3,\ 4\}$

이다.

16 구간이란?

두 실수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 다음 실수의 집합

$\{x|a \le x \le b\}$, $\{x|a < x < b\}$

$\{x|a \le x < b\}$, $\{x|a < x \le b\}$

를 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$[a,\ b]$, $(a,\ b)$, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$

로 나타낸다.

$[a, b]$를 닫힌구간, (a, b)를 열린구간이라 말한다.

실수 a에 대하여 다음 실수의 집합

$\{x|x \le a\}$, $\{x|x < a\}$

$\{x|x \ge a\}$, $\{x|x > a\}$

도 구간이라고 하며, 이것을 각각 기호로

$(-\infty,\ a]$, $(-\infty,\ a)$, $[a,\ \infty)$, $(a,\ \infty)$

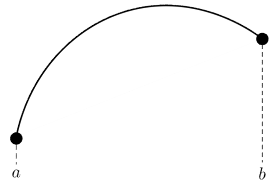
로 나타낸다.

특히, 실수 전체의 집합을 기호 $(-\infty,\ \infty)$로 나타낸다.

17 구간에서 연속

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라 한다.

특히, 함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족할 때, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이라 한다.



❶ 열린구간 $(a,\ b)$에서 연속이다.

❷ $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

18 구간별로 정의된 함수의 연속

1. 분할된 함수

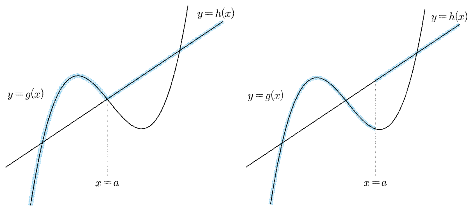
연속이려면 교점에서 나눠야 한다.

두 연속함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여 함수 $f(x)$를 아래와 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x<a) \\ h(x) & (x \ge a) \end{cases}$$

① 함수 $f(x)$가 연속이기 위한 실수 a는 방정식 $g(x)=h(x)$의 근이다.

② 함수 $f(x)$가 연속이기 위한 실수 a의 개수는 방정식 $g(x)=h(x)$의 실근의 개수와 같다.



$f(x)$는 연속　　$f(x)$는 불연속

▪ 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)+g(-1)$의 값을 구하시오.

(가) $f(x)+g(x)=x^2+2x$
(나) $f(x)g(x)=2x^3$
(다) $f(x) \ge g(x)$

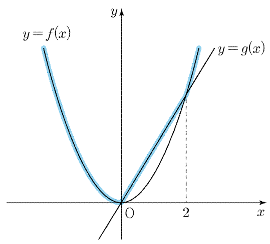
[정답] 7

$f \times g = f \times (x^2+2x-f) = 2x^3$

$f^2-(x^2+2x)f+2x^3 = \left\{f(x)-x^2\right\} \times \left\{f(x)-2x\right\} = 0$

따라서 $f(x)=x^2$ 또는 $f(x)=2x$이다.

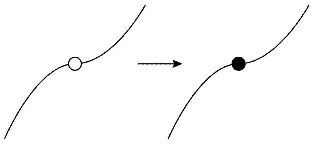
이때, (다) 조건을 만족시키기 위해서는 아래 그림과 같다.



$f(3)=3^2=9$, $g(-1)=-2$ 따라서 $f(3)+g(-1)=7$

2. 점 정의함수

연속이려면 링값과 함숫값이 같아야 한다.



함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-a)g(x)}{x-a} & (x\neq a)\\ b & (x=a)\end{cases}$$

가 $x=a$에서 연속이면

① $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=b$

② $f(x)$는 사실 $g(x)$였다.

함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1)\\ a & (x=1)\end{cases}$ 가 연속일 때, a의 값과 $f(x)$의 실체를 구하면?

$\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2=a$이고 $f(x)$는 사실 $f(x)=x+1$이다.

19 조건 항등식을 이용한 연속함수의 정의

누가 주인공인지 확인하자!

연속함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)$가

$(x-a)f(x)=g(x)$

를 만족시킬 때, 함수 $f(x)$가 연속이라면

① 양변에 $x=a$를 대입하면, $g(a)=0$임을 알 수 있다.

② 양변을 $(x-a)$로 나눠서

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x-a} & (x\neq a)\\ f(a) & (x=a)\end{cases}$$

이므로 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ 즉

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=f(a)$$

20 함수의 연속을 판단하는 기준

함수의 연속에서는 연속성에 대한 끊임없는 물음이 제시된다. 이때 크게 다음과 같은 두 가지 상황으로 나누어 판단해 볼 수 있다.

❶ $x=a$에서 연속함수
⇨ $x=a$에서 좌극한, 우극한, 함숫값을 조사하면 된다.

❷ 구간에서 연속하는 함수,
실수 전체 집합에서 연속하는 함수
⇨ 우선, 구간 안에서 함수의 불연속 지점을 파악하고
불연속이 의심되는 지점들에 대해서
좌극한, 우극한, 함숫값을 파악해준다.
불연속 의심점은
" 함수 바뀌는 곳 "
" 분모=0 되는 곳"

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & (x\le 2)\\ x-3 & (x>2)\end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(4)$의 값을 구하시오.

$x\neq 1$, $x\neq 3$일 때, $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$이다.

[정답] 6

$h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$에서 불연속 의심점은 $f(x)$때문에 발생한다.

$f(x)=0$이 되는 곳 $x=1$, $x=3$

$f(x)$함수가 바뀌는 곳 $x=2$

에서 $g(x)$가 모두 0을 찍어줘야 한다.

$g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

따라서 $h(4)=\dfrac{g(4)}{f(4)}=\dfrac{6}{1}$

21 연산에 대한 함수의 연속성

연속끼리는 연속 단, 나누기 조심!

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 모두 $x=a$에서 연속이다.

❶ $cf(x)$ (단, c는 상수)
❷ $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$
❸ $f(x)g(x)$
❹ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

※ 사칙연산에 대해 연속함수의 성질은 보존된다.
단, 나눗셈일 경우 (분모=0)을 주의한다.

어떤 구간에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속이면 $cf(x)$ (단, c는 상수) $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(x)\neq 0$)도 모두 그 구간에서 연속이다.

두 함수

$$f(x)=\begin{cases}2ax+1 & (x<1)\\ x^2-a^2 & (x\ge 1)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2+a^2 & (x<2)\\ x^2+x & (x\ge 2)\end{cases}$$

에 대하여 두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

[정답] $a=-2$

두 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이므로 두 함수

$$f(x)=\frac{\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}}{2},$$

$$g(x)=\frac{\{f(x)+g(x)\}-\{f(x)-g(x)\}}{2}$$

모두 연속이다. (이하생략)

22 절댓값 함수의 연속성

$|f(x)|$가 $x=a$에서 연속일 때,

① $f(x)$자체가 연속

② $x=a$에서 좌극한과 우극한의 부호가 달라야 한다.

좌극한 $=-$ 우극한

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}x^2+a & (x<-2)\\ x & (x\ge -2)\end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 모든 실수 a의 값의 곱은?

[정답] 12

$|f(x)|$가 연속이므로

① $x=-2$에서 연속
$4+a=-2$ ⋯ $a=-6$
② $4+a=2$ ⋯ $a=-2$

모든 a값의 곱은 12

23 분수꼴 함수의 연속성

1. 약분된다고 연속인건 아니다.

함수 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 일 때, 마음대로 $f(x)=x+2$라고 생각하면 안 된다. 0이 아닐 때만 나눌 수 있다.

$f(x)=x+2$ $(x\neq 2)$ 이므로 현재 $f(x)$는 $x=2$에서 함숫값을 정의할 수 없다.

이때 함수 $f(x)$를 연속으로 만들고 싶다면 구간을 나눠 정의해줘야 한다.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & (x\neq 2)\\ 4 & (x=2)\end{cases}$$

이때는 연속이라 말할 수 있다.

2. 분수함수가 연속이려면 분모가 0이 되면 안 된다.

함수 $f(x)=\dfrac{x^2+ax+9}{x^2+2ax+10a}$에 대하여 함수 $\dfrac{1}{f(x)}$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 정수 a값의 합을 구하시오.

[정답] 15

$\dfrac{1}{f(x)}$이 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이어야 한다. 따라서

$x^2+2ax+10a\neq 0$이므로

$D/4: a^2-10a=a(a-10)<0$ ⋯ $0<a<10$

또한 $f(x)\neq 0$ 이므로

$x^2+ax+9\neq 0$

$D: a^2-36=(a-6)(a+6)<0$ ⋯ $-6<a<6$

따라서 $0<a<6$이므로 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5 이다.
모든 정수 a의 합은 15

24 주기함수의 연속성

구간내 연속, 구간끼리 연속

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$가 다음조건을 만족시킨다.

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & (0\le x<a)\\ g(x) & (a\le x<b)\end{cases},\quad h(x)=h(x+b)$$

함수 $h(x)$가 연속함수라면 아래조건을 만족시킨다.

① 구간 내 연속 : $f(a)=g(a)$

② 구간끼리 연속 : $h(0)=h(b)$ ⇨ $f(0)=g(b)$

25 연산에 대한 연속성 판단

$$f(x)\times g(x),\ f(x)\pm g(x),\ \frac{g(x)}{f(x)}$$

1. 두 개의 함수가 주어지면 가장 먼저 각각의 연속성을 먼저 판단해야 한다.

2. $f(x)\pm g(x)$

① (연속)±(연속)은 무조건 연속이다.

② (연속)±(불연속)은 무조건 불연속이다.

③ (불연속)±(불연속)은 좌우함을 확인해봐야 한다.

3. $f(x)\times g(x)$, $\dfrac{g(x)}{f(x)}$

① 좌극한, 우극한, 함숫값을 구해서 비교한다.

② 연속×불연속의 상황이라면 테크닉적인 풀이가 가능하다. 그 외는 ①의 방법으로 우직하게 밀고 간다.

$0<x<4$에서 함수 $f(x)=x-[x]$가 불연속이 되는 x의 값의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다.)

[정답] 3개
x는 잘못 없다. $[x]$가 불연속인 점에서 $f(x)$가 불연속일 것이다.

26 (불연속)X(연속)

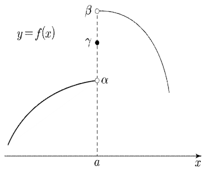
연속인 함수가 불연속인 함수를 도와주자!

1. **(수렴불연속)X(연속)=(연속)**

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고 불연속이다.
이때 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

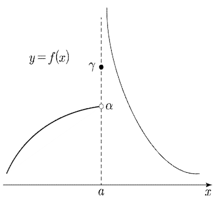
❶ $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속 $\Rightarrow$ $g(a)=0$

❷ $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속
$f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한과 우극한이 각각 존재
[수렴 불연속] $\Longleftrightarrow$ $g(a)=0$



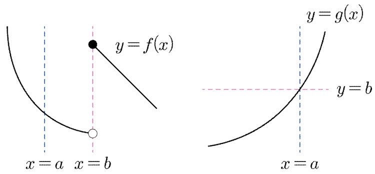
2. **(발산불연속)X(연속)=(연속)**

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고 불연속이다.
함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
$f(x)=\dfrac{1}{(x-a)^k}$ $(x>a)$일 때, $g(x)=(x-a)^{k+1}$이면
$f(x)\times g(x)$는 연속이다.



27 합성함수의 연속 (1)

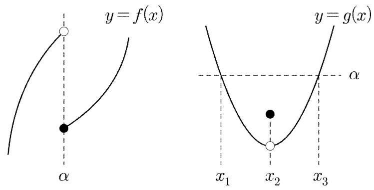
1. $f(x)$와 $g(x)$가 모두 $x=a$에서 연속이라 해도 $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이라 할 수 없다.



다만 모든 실수에서 $f(x)$와 $g(x)$가 연속이면 $f(g(x))$도 모든 실수에서 연속이다.

2. 특정 함숫값에서 $f(g(x))$ 의 연속성을 물어보면 좌, 우, 함 3번 식을 쓴다.

3. 구간에서 $f(g(x))$ 연속성을 물어보면



① $g(x)$불연속점 x_2 을 확인하고
$f(x)$의 불연속점 α에 대하여 합성함수에서
$f(x)$의 정의역이 $g(x)$이므로

② 방정식 $g(x)=\alpha$ 의 두 근 x_1 , x_3 를 확인해야 한다.

함수
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le 1) \\ -x+4 & (x>1)\end{cases}$$
에 대하여 $g(x)=f(f(x))$라고 할 때, $g(x)$가 불연속인 x의 값을 구하여라.

① 속함수 $f(x)$의 불연속점 $x=1$에서 연속성을 확인한다.

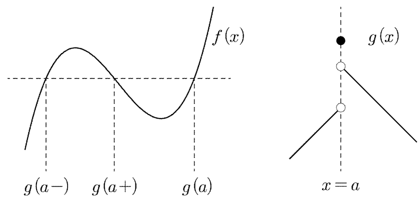
② 겉함수 $f(x)$는 $x=1$에 대하여
속함수 $f(x)$가 방정식 $f(x)=1$를 만족시키는 x값
$x=0,\ 3$에 대하여 연속성을 확인한다.

28 합성함수의 연속 (2)

함수 $h(x)=f(g(x))$ 가 연속일 때

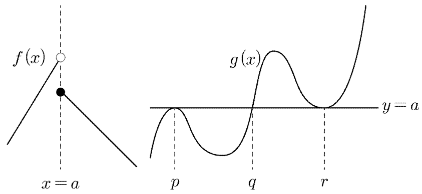
1. **겉함수 연속, 속함수 불연속**

속함수 불연속 지점의 y 값이 겉함수의 x 값으로



2. **겉함수 불연속, 속함수 연속**

겉함수 불연속 지점의 x 값이 겉함수의 y 값으로



겉함수 $f(x)$가 $x=a$에서 함숫값과 우극한값이 같기 때문에 속함수 $g(x)$의 y값이 $y\ge a$ 일 때 연속이다.

$h(x)=f(g(x))$

① $x=p$에서 극한값은 존재하지만 불연속
② $x=q$에서 극한값 없음
③ $x=r$에서 연속
그 외는 연속이다.

함수
$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<2) \\ -x+5 & (x\ge 2)\end{cases}$$
와 이차함수 $g(x)=x^2-4x+a$가 다음조건을 만족시킬 때, a의 최솟값을 구하시오.

모든 실수 x에 대하여 $f(g(x))$는 연속이다.

겉함수가 불연속, 속함수가 연속인 상황이다.
겉함수 $f(x)$가 구간 $[2,\infty)$에서 연속이므로
속함수 $f(g(x))$가 연속이기 위해선 $g(x)\ge 2$를 만족해야한다. ($\because g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이다.)
모든실수 x에서 $g(x)-2=x^2-4x+a-2\ge 0$이므로
$D/4=4-(a-2)\le 0$이므로 a의 최솟값은 6이다.

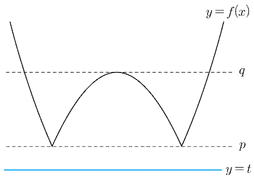
29 새 변수로 정의된 함수

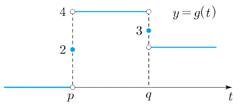
경계를 파악하자.

경계 : 접하는 곳, 함수의 극값, 교점

1. $y=f(x)$와 $y=t$

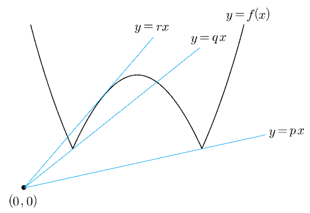
$f(x)=t$ 실근 개수를 $g(t)$라 하자.

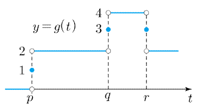




2. $y=f(x)$와 $y=tx$

$f(x)=tx$ 실근 개수를 $g(t)$라 하자.

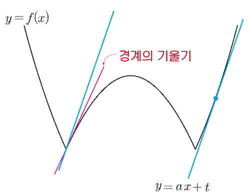


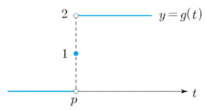


3. $y=f(x)$와 $y=ax+t$

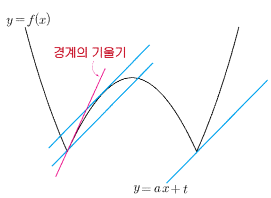
$f(x)=ax+t$ 실근 개수를 $g(t)$라 하자.

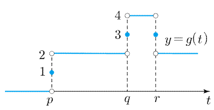
① 경계의 기울기 $\leq a$





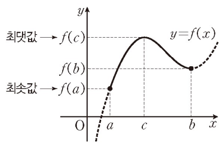
② 경계의 기울기 $> a$





30 최대, 최소정리

확신할 수 있으려면 연속이어야 한다.



함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

※ 역은 성립하지 않는다.

❶ 닫힌구간이 아닌 구간에서 정의된 연속함수는 최댓값과 최솟값을 가질 수도 있고 갖지 않을 수도 있다.

❷ 함수 $y=f(x)$가 연속이 아니면 닫힌구간에서도 최댓값과 최솟값을 갖지 않을 수 있다.

31 사잇값 정리

부호변화가 있어야 해를 갖는다 생각할 수 있다.

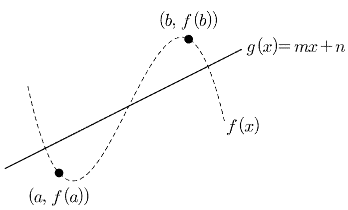
실근 존재는 부호변화가 핵심이다.

사잇값 정리는 연속인 함수의
실근의 존재 여부를 확인하는 것이다.

❶ 주어진 함수가 구간에서 연속인지 파악한다.
❷ $f(x)=0$의 꼴로 정리한다. $(f(x)=g(x)-h(x)=0)$
❸ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(a)f(b)<0$임을 확인한다.

사잇값 정리 문제적용

1. 부호변화가 바로 보일 때

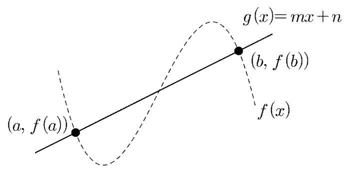


$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면,

$$\{f(a)-g(a)\}\times\{f(b)-g(b)\}=h(a)\times h(b)<0$$

구간 (a,b)에서 방정식 $h(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재한다.
따라서 $f(x)=g(x)$의 교점이 적어도 하나 있다.

2. 부호변화가 바로 안보일 때



$f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)$이다. $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$$\{f(a)-g(a)\}\times\{f(b)-g(b)\}=h(a)\times h(b)=0$$

이기 때문에 교점을 확신할 수 없다.
이때는

$$\{f'(a)-g'(a)\}\times\{f'(b)-g'(b)\}=h'(a)\times h'(b)>0$$

기울기의 부호가 같으면 구간 (a,b)에서 $h(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재한다. 따라서 $f(x)=g(x)$의 교점이 적어도 하나 있다.

32 미분의 의미

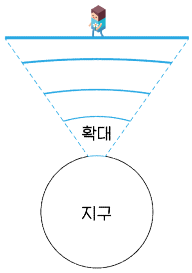
미분의 영어식 표기는 ' Differentiation '으로 변화율 뜻한다. 변화율이란, x값의 변화에 따른 y값의 변화의 비율로

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{y\text{값의 변화}}{x\text{값의 변화}}=\text{기울기}$$

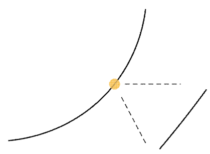
이다. 따라서 미분의 직관적 의미는 기울기이다.

미분은 미분이다.

우리는 지구에서 미세하게 나눠져 직선처럼 보이는 지표면 위에서 살고 있다. 곡선을 미세하게 나누면 직선화 되어있다는 사실을 우리는 살아가면서 느끼고 있는 것이다.



곡선을 무한히 확대하면 직선처럼 보인다.



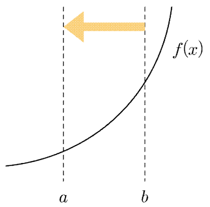
미세하게 나눠진 부분을
확대하면 직선화되어 있다.

33 미분의 방법

'분' 하고 '미' 하자.

② 범위를 좁힌다.

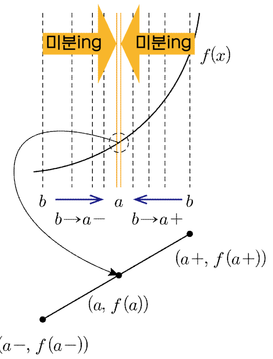
$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



① 먼저 그냥 나눈다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

미세하게 나눠지는 과정을 동영상처럼 기억하자



구간을 a부터 b까지 나누는 '분' 의 과정에서 관찰할 것은 변화율, 즉 기울기이다.

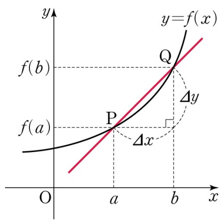
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$: 평균변화율, 두 점사이 기울기

이 때, '미'의 과정에서 $b\to a$ 하는 과정은, a를 고정하고 b의 값을 두 가지 방향에서 한없이 a에 가까이 보내는 것이다. 따라서

* $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 식은 미분계수의 정의이지만
* $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 식은 미분계수 정의가 아니다.
* $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}$ 식은 $a+$ 한가지 방향만확인할 수 있어서 미분계수의 정의가 아니다.

34 평균변화율

평균변화율은 두 점 사이 기울기이다.



함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

평균변화율의 기하학적 의미

x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를
지나는 직선의 기울기와 같다. 여기서 어떤 함수의 평균변화율이란 그냥 직선의 기울기가 아니라
그 그래프 '위'의 두 점을 지나는 직선의 기울기임을 확실히 해두자.
이때, 일차함수의 평균변화율은 일차항의 계수, 즉 그 그래프의 직선의 기울기와 같다.

35 미분계수 (순간변화율)

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

미분계수 $f'(a)$의 여러 가지 표현

함수 $y=f(x)$에서 $x=a$에서의 미분계수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

※ $a+\Delta x=x$로 놓으면 $\Delta x=x-a$이고 $\Delta x\to 0$일 때, $x\to a$이므로 $f'(a)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이다.

36 미분계수의 기하적 의미

미분계수는 접선의 기울기이다.

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

$f'(a)$의 의미

$f'(a)$는 다음과 같은 세 가지 의미를 가진다.

❶ 함수 $f(x)$의 $x=a$에서 미분계수

❷ 함수 $f(x)$의 $x=a$에서 순간변화율

❸ 함수 $f(x)$의 $x=a$에서 접선의 기울기

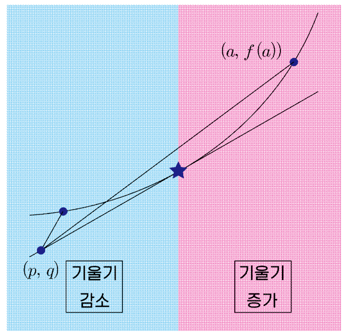
37 두 점 사이 기울기와 그래프 개형

① 함수 $f(x)$에 대하여

$$\frac{f(a)-q}{a-p}$$

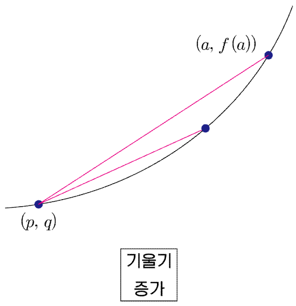
는 $(p,\ q)$와 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 기울기와 같다.

② (p,q)가 곡선 밖일 때 기울기 변화에 '경계'가 존재



접점을 경계로 두 점 사이 기울기의 증감이 바뀐다.

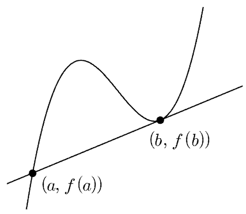
③ (p,q)가 곡선 위의 점이면 볼록이 바뀌지 않는다면 기울기는 계속 증가하거나, 감소한다.



④ 곡선위 두 점사이 기울기와 같은 접선기울기.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(b)$$

두 점 $(a,f(a))$, $(b,f(b))$을 지나는 직선이 $x=b$ 에서 $f(x)$의 접선의 방정식이 된다.



38 미분계수와 평균변화율의 극한값

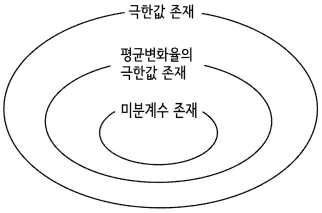
(1) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=$ 미분계수

(2) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=$평균변화율의 극한값

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=$존재 ⇨ $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=$존재

평균변화율의 극한값과 미분계수의 차이

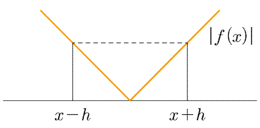
미분계수란 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 의 값이다. h의 값이 $0+$, $0-$의 값을 취할 수 있어야 하고 h의 변화에 따른 a의 변화는 없어야 한다. 따라서 평균변화율의 극한값이 미분계수의 정확한 정의라 할 수 없다.



특히, 미분가능한 $f(x)$에 대해서 $|f(x)|=g(x)$ 라 하면,

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}=\begin{cases}g'(x) & (g(x)\text{가 미분가능할때})\\ 0 & (g(x)\text{가 미분 불가능할때})\end{cases}$$

$g(x)$가 미분 불가능할 때는 $|f(x)|$가 미분 불가능할 때이므로



$\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}$는 무조건 0이다.

39 미분계수의 값 계산

우선 평균변화율 구조를 만들자.

1. 순수한 미분계수의 정의

① $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$, $\lim\limits_{\bigstar\to a}\dfrac{f(\bigstar)-f(a)}{\bigstar-a}=f'(a)$

[예] $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(3x^2-2x)-f(1)}{(3x^2-2x)-1}=f'(1)$

② $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$, $\lim\limits_{\bigstar\to0}\dfrac{f(a+\bigstar)-f(a)}{\bigstar}=f'(a)$

[예] $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h^2+2h)-f(1)}{h^2+2h}=f'(1)$

2. 미분계수의 변형식

$$\lim_{\blacksquare,\blacktriangle\to\bigstar}\frac{f(\blacksquare)-f(\blacktriangle)}{\blacksquare-\blacktriangle}=f'(\bigstar)$$

① $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+q\times h)-f(a)}{p\times h}=\dfrac{q}{p}\times f'(a)$

② $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a\times f(x)-f(a)\times x}{x-a}=a\times f'(x)-f(a)$

③ 치환형태 $\lim\limits_{x\to\infty}x\times\left\{f\left(a+\dfrac{k}{x}\right)-f(a)\right\}=k\times f'(a)$

[풀이] $\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면 $x\to\infty\Rightarrow t\to0+$이 된다.

$\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{1}{t}\times\{f(a+kt)-f(a)\}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(a+kt)-f(a)}{t}=k\times f'(a)$

※ $f(\ )$의 괄호안에 역수형태가 주어지면 그 역수를 치환할 것.

④ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=k\Rightarrow\begin{cases}f(a)=0\\ f'(a)=k\end{cases}$

[풀이] $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=k$ 에서 분수형태의 극한값이 존재하고, (분모)$\to0$이면 (분자)$\to0$이 되므로 $f(a)=0$이 된다.
이 때

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-0}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=k$

⑤ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)+p}{x-a}=k\Rightarrow\begin{cases}f(a)=-p\\ f'(a)=k\end{cases}$

[풀이] $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)+p}{x-a}=k$에서 분수형태의 극한값이 존재하고, (분모)$\to0$이면 (분자)$\to0$ 이 되므로 $f(a)+p=0$이 된다.

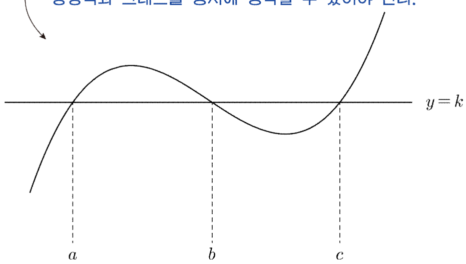
이 때, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)+p}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=k$
$(\because f(a)+p=0)$

40 다항함수 인수정리

1. x에 관한 삼차식 $f(x)$가 $f(a)=f(b)=f(c)=0$을 만족하면
⇒ $f(x)=p(x-a)(x-b)(x-c)$

2. x에 관한 삼차식 $f(x)$가 $f(a)=f(b)=f(c)=k$을 만족하면
⇒ $f(x)=p(x-a)(x-b)(x-c)+k$

방정식과 그래프를 동시에 생각할 수 있어야 한다.



3. 접할 때 식 세우기

$f(x)=g(x)$ 의 방정식은 빼서 식을 세운다.

접점을 알 때 함수식 만들기

1) $y=f(x)$가 $x=a$에서 x축에 접하면
⇨ $f(x)=(x-a)^2\times g(x)$

2) $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=a$에서 서로 접하면
⇨ $f(x)-g(x)=(x-a)^2\times h(x)$

3) $y=f(x)$와 $y=mx+n$ 이 $x=a$에서 서로 접하면
⇨ $f(x)-(mx+n)=(x-a)^2\times h(x)$

4) 다항함수 $f(x)$가 $f(a)=f'(a)=0$을 만족시키면
⇨ $f(x)=(x-a)^2\times g(x)$

41 도함수의 정의

도함수는 '기울기 함수' 이다.

1. 도함수의 정의

어떤 구간에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$에 대하여 $f'(x)$를 x에 관한 y의 도함수라 하고

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$

등의 기호를 써서 나타낸다.

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

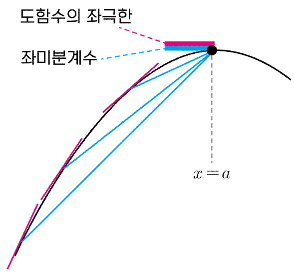
$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

도함수 $f'(x)$는 곡선 $y=f(x)$위의 임의의 점에서의 접선의 기울기를 나타내는 함수이다.

2. 미분계수와 차이점

함수 $f(x)$기 미분가능하면, 좌미분계수와 도함수의 좌극한은 같다. 하지만 과정이 다르다.

좌미분계수는 $(a, f(a))$와의 연결로 $f'(a)$라는 결과를 나타내고 도함수의 좌극한은 $f'(x)$가 변화하며 즉, 접선의 기울기가 $x\to a-$ 상황에서 변화하며 $f'(a)$라는 결과를 얻는다.



42 미분법

① $f(x)=x^n$ (n은 양의 정수)이면 ➡ $f'(x)=nx^{n-1}$

② $f(x)=c$ (c는 상수)이면 ➡ $f'(x)=0$

③ $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

④ $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

⑤ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

⑥ $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ ➡ [미그그미]

⑦ $\{f\times g\times h\}'=f'\times g\times h+f\times g'\times h+f\times g\times h'$

⑧ $(\{f(x)\}^n)'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$ (단, n은 양의 정수)
[겉미분 X 속미분]

증명

⑥ $\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$

$= \lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to0}g(x+h)+\lim_{h\to0}f(x)\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

⑧ $\{f(x)\}^n$을 미분하면 $f(x)$를 한 개 미분한 $f'(x)$와 남은 $(n-1)$개의 $f(x)$의 곱인 $\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$의 계산을 n번 반복하므로

$(\{f(x)\}^n)' = \underbrace{\{f(x)f(x)\cdots f(x)\}'}_{n\text{개}}$

$= \underbrace{f'(x)\{f(x)\}^{n-1}+f'(x)\{f(x)\}^{n-1}+\cdots+f'(x)\{f(x)\}^{n-1}}_{n\text{개}}$

$= n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

43 도함수를 활용한 미분계수의 계산

$x=a$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p}{x-a}=q$일 때, $f(x)-p$가 $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)-p\}=0$에서

$f(a)-p=0 \qquad \therefore f(a)=p$

따라서 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=q$이므로 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고 $q=f'(a)$이다.

복잡한 함수는 치환하자.

$\lim_{x\to a}\frac{\boxed{}}{x-a}$에서 $\lim_{x\to a}\boxed{}=0$일 때,

$\boxed{}$의 식을 인수분해하거나 변화율로 변형하기 복잡하다면

$\boxed{}=f(x)$로 놓고

$\lim_{x\to a}\frac{\boxed{}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=f'(a)$

로 계산할 수 있다.

※ 보통 분자의 최고차항 차수의 크기가 크거나 미지수일 때 치환을 이용한다.

로피탈 정리

함수 $f(x), g(x)$가 $x=a$ 를 포함하는 구간에서 미분가능하고 $f(a)=0,\ g(a)=0,\ g'(x)\neq0$ 이면

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 가 성립한다.

44 항등식

보통 x에 대한 항등식은 '모든 실수 x에 대하여 성립'한다고 표현하지만 간혹 '함수 $f(x)$에 대하여 성립'한다고 표현하기도 한다. 함수 $f(x)$에 대해 어떤 등식이 성립한다고 하면 $f(x)$의 정의역의 어떠한 값을 x에 대입해도 성립한다는 의미이므로 x에 대한 항등식으로 볼 수 있다.

'최고차항' 부터 설정하자.

다항함수에 대한 항등식이 주어지면 다음과 같이 다항함수의 식을 결정할 수 있다.
① 차수를 결정하고 다항함수의 식을 잡는다.
② 주어진 함숫값, 미분계수 또는 항등식에서 수치대입법으로 구한 함숫값, 미분계수를 이용하여 구할 수 있는 미정계수를 구한다.
③ 항등식에 다항함수의 식을 대입하여 계수비교법으로 남은 미정계수를 구한다. 다항함수의 차수는 주어진 항등식의 양변의 차수를 비교하거나 최고차항의 계수를 비교하여 결정할 수 있다.
보통 항등식 문제에서 다항함수라는 조건이 주어진다면 가장 먼저 차수에 대한 궁금증을 풀어야 한다.

$f(x)$의 최고차항이 $ax^n\,(a\neq0)$이면 $f'(x)$의 최고차항은 nax^{n-1}임을 이용하여
항등식의 양변의 최고차항의 계수가 서로 같도록 한다.

45 항등식의 미분

두 미분 가능한 함수 $f(x),\ g(x)$에 대하여 항등식 $f(x)=g(x)$는 $f(x)$와 $g(x)$의 식이 서로 같다는 의미이다. 따라서 $f'(x)$와 $g'(x)$의 식도 서로 같으므로 항등식 $f(x)=g(x)$의 양변을 미분한 $f'(x)=g'(x)$도 역시 항등식이 된다. 이를 이용하면 주어진 항등식만으로 문제가 해결되지 않을 때, 주어진 항등식을 미분하여 문제 해결에 도움이 되는 새로운 항등식을 얻어낼 수 있다.

항등식 $\xrightarrow{\text{미분}}$ New 항등식

함수의 특성을 나타내는 항등식의 표현
① $f(x)=f(-x)$: 우함수
② $f(2a-x)=f(x)$, $f(a-x)=f(a+x)$: $x=a$선대칭
③ $f(x)=-f(-x)$: 기함수
④ $f(2a-x)+f(x)=0$, $f(a+x)+f(a-x)=0$: $(a,0)$점대칭
⑤ $f(2a-x)+f(x)=2b$: (a,b)점대칭
⑥ $f(x)=f(x+p)$: 주기함수

46 다 변수 미분법

$x,\ y$에 대한 항등식
미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 임의의 두 실수 $x,\ y$에 대한 항등식 $f(x+y)=\cdots$ 이 주어지면 다음과 같이 $f'(x)$를 구할 수 있다.

[step1] $x=0,\ y=0$을 대입한다.
➡ $f(0)$을 찾는다.
[step2] $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$꼴의 식을 만든다.
➡ $f'(0)$을 찾는다.
[step3] y대신 h를 대입하여 $\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$꼴을 만든다. ➡ $f'(x)$을 찾는다.

편미분 교육과정 外

편미분이란 다변수함수(多變數函數)에 대하여, 그 중 하나의 변수에 주목하고 나머지 변수의 값을 고정시켜 놓고 그 변수로 미분하는 일을 가리킨다.

*편미분을 이용하기 위해선 다음의 조건이 필요하다.
(1) $x,\ y$에 대한 대칭식일 때 성립한다.
(2) x로 편미분하여 정리한 함수와 y로 편미분하여 정리한 함수는 같은 함수로 정리되어야 한다.

[step1] 주어진 식의 초기 조건을 구한다.

ex) $x=y=0,\ x=y=1$ 등...

[step2] y로 편미분한다는 것은 y만 변수로 보고 나머지 문자들은 모두 상수로 취급한다.

ex) $\{f(x)\}'=0,\ \{f(x+y)\}'=f'(x+y),$
$\{f(xy)\}'=xf'(xy)$

[step3] $y=$ (상수)를 대입하여 x만의 함수로 표현

ex) $y=0,\ y=1$ 등...

미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 $x,\ y$에 대하여
$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$
를 만족하고 $f'(0)=3$일 때, $f'(2)$의 값은?

주어진 식에 y를 변수로 보고 x를 상수로 보는 편미분을 한다면
$f'(x+y)=f'(y)+x$
이 식에 $y=0$을 대입하면 $f'(x)=f'(0)+x$이다.
즉, $f'(x)=x+3$이다.
$f'(2)=2+3=5$

47 미분법과 다항식의 나눗셈

다항식 $f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때 몫을 $\mathrm{Q}(x)$, 나머지를 $\mathrm{R}(x)=px+q(p,\ q$는 상수$)$라고 하면

$f(x)=(x-a)^2\mathrm{Q}(x)+px+q$ …… ㉠
㉠의 양변을 $x=a$를 대입하면 $f(a)=ap+q$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(a)=2(x-a)\mathrm{Q}(x)+(x-a)^2\mathrm{Q}'(x)+p$이고
$x=a$를 대입하면 $f'(a)=p$ …… ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면 $q=f(a)-af'(a)$이다.
따라서 나머지 $\mathrm{R}(x)=f'(a)x+f(a)-af'(a)$
다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 때, 몫을 $\mathrm{Q}(x)$라 하면
$f(x)=(x-a)^2\mathrm{Q}(x)$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면 $f(a)=0$
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f'(x)=2(x-a)\mathrm{Q}(x)+(x-a)^2\mathrm{Q}'(x)$이고 $x=a$를 대입하면
$f'(a)=0$
따라서 $f(a)=0,\ f'(a)=0$

① 다항식 $f(x)$가 $(x-a)^2$으로 나누어떨어질 조건
또는 $f(x)=0$이 $x=a$를 이중근으로 가진 조건
➡ $f(a)=0,\ f'(a)=0$

② 다항식 $f(x)$가 $f(a)=0,\ f'(a)=0$을 만족시키면
➡ $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 가진다.

③ 다항함수 $f(x)$가 $f'(x)$를 인수로 가지면
➡ $f(x)=(ax+b)^n$ 꼴이어야 한다.

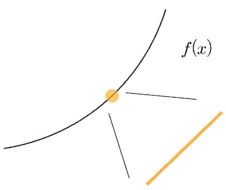
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$를 $(x-2)$로 나눈 나머지는?

(가) $f'(-1)=0$
(나) 다항식 $f(x)$는 다항식 $f'(x)$로 나누어 떨어진다.

다항함수 $f(x)$가 $f'(x)$로 나누어 떨어지려면 $f(x)$는 $p(ax+b)^n$꼴 이어야 한다.
(나) 조건에 의해 3차함수 $f(x)$는 $f(x)=(ax+b)^3$이다.
이때, 최고차항의 계수가 $a=1$이고, (가) 조건에 의해 $b=1$
따라서 $f(x)=(x+1)^3$, $f(x)$를 $(x-2)$로 나눈 나머지는 $f(2)=27$이다.

48 미분가능의 정의

'미분'할 때 하나의 직선이 나와야 미분가능이다.



미세하게 나눠진 부분을 확대하면 직선화되어 있다.

미분가능 함수의 직관적인 모습을 상상하면, 부드럽게 잘 연결되어 있는 모습이고, 이는 $x=a$에서 곡선을 현미경으로 보았을 때 하나의 직선이 나타남을 뜻한다.

1. 미분가능의 수학적 정의 : 미분계수의 정의가 존재

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$: 미분계수가 존재해야 $x=a$에서 미분가능하다. 미분가능은 직관적이기 보다 논증적인 영역이다. 미분가능하면 미분계수의 값이 존재하고, 미분계수의 값이 존재하면 미분가능하다. 따라서 미분가능의 시작과 끝은 미분계수의 값의 존재이다.

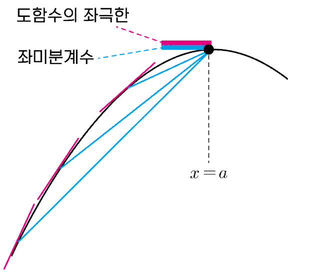
2. 위 정의를 다르게 해석하면
① $x=a$에서 연속이고

② 좌미분계수 = 우미분계수

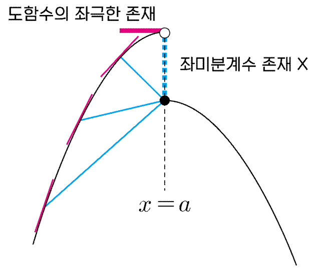
$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\alpha$$
①, ② 의 조건을 만족하면 미분가능하다.

다르게 해석하는 이유는, 많은 문제 상황에서 미분계수의 정의를 이용해서 미분가능을 판단하는 것보다 미분법을 통한 도함수를 이용해서 미분가능을 판단하는 것이 간편하기 때문이다.

다만, 여기서 주의할 점은 연속함수에서만 도함수를 이용하여 미분가능을 판단할 수 있다는 것이다.



위 그래프처럼 연속일 때는 도함수의 좌극한과 좌미분계수가 같고 도함수의 우극한과 우미분계수가 같다.



하지만, 위 그래프처럼 불연속이면 도함수의 좌극한을 좌미분계수라 할 수 없고, 도함수의 우극한을 우미분계수라 할 수 없다.

$f(x)=|x-1|$ 일 때, $x=1$에서 $y=f(x)$는 미분가능한가?

[정답] 미분불가능
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$
이때 $\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{|h|}{h}=-1$, $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{|h|}{h}=+1$
좌극한값과 우극한값이 같지 않다.

$f(x)=|x^3|$ 일 때, $x=0$에서 $y=f(x)$는 미분가능한가?

[정답] 미분가능하다.
$$f(x)=\begin{cases}x^3 & (x\ge 0)\\ -x^3 & (x<0)\end{cases}$$
이라고 할 때, $x=0$에서 연속이다.
$$f'(x)=\begin{cases}3x^2 & (x\ge 0)\\ -3x^2 & (x<0)\end{cases}$$
$x=0$에서 좌미분계수와 우미분계수가 같다.

(사실 도함수의 좌극한과 도함수의 우극한이 같은 것이지만 연속이기 때문에 좌미분계수와 우미분계수가 같다는 표현을 썼다.)

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

3. 도함수에서 등호의 유무 관계

구간별로 정의된 함수의 도함수에서는 경계가 되는 점에서 우미분계수와 좌미분계수가 같은 지 확인하여 등호의 유무를 결정한다.

함수	$f(x)=\begin{cases}x & (x\ge 0)\\ x^2 & (x<0)\end{cases}$	$g(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\ge 0)\\ x^3+1 & (x<0)\end{cases}$
도함수	$f'(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 2x & (x<0)\end{cases}$	$g'(x)=\begin{cases}2x & (x\ge 0)\\ 3x^2 & (x<0)\end{cases}$
등호 유무	함수 $f(x)$는 $x=0$에서 우미분계수와 좌미분계수가 같지 않으므로 등호를 빼서 나타낸다.	함수 $g(x)$는 $x=0$에서 우미분계수와 좌미분계수가 같은 경우에는 등호를 그대로 나타낸다.

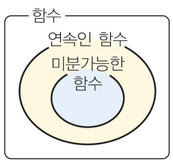
49 미분가능과 연속성

미분가능 ⇨ 연속 ⇨ 극한값 존재

함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 미분계수
$f'(a)=\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재하므로
$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)$$
$$=f'(a)\times 0=0$$
이다. 즉 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이므로 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

미분가능과 연속의 포함관계



50 미분가능하지 않은 경우의 이해

불연속하거나 첨점에서는 미분이 가능하지 않다.

1. 불연속인 함수
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이면 $x=a$에서의 좌미분계수 또는 우미분계수가 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

2. 연속이지만 꺾인 점 또는 뾰족점 (첨점)
(직선의 절댓값, 곡선의 절댓값)
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이지만 좌미분계수와 우미분계수가 서로 같지 않으므로 미분가능하지 않다.

51 연산에 대한 미분가능성

미가끼리는 미가

1. $f(x)$와 $g(x)$가 모두 $x=a$에서 미분가능할 때

   ① $f(x)\pm g(x)$는 $x=a$에서 미분가능
   ② $f(x)\times g(x)$는 $x=a$에서 미분가능
   ③ $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=a$에서 미분가능 (단, $f(a)\neq 0$)

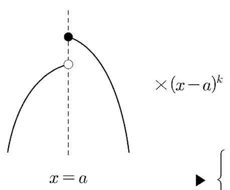
2. $f(x)$와 $g(x)$가 모두 $x=a$에서 미분 불가능할 때
   ⇨ 해봐야 안다.

3. $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하고,
   $g(x)$가 $x=a$에서 미분 불가능할 때

   ① $f(x)\pm g(x)$는 무조건 미분불가능
   ② $\dfrac{f(x)}{g(x)}$와 $f(x)\times g(x)$는 함수에 따라 달라진다.

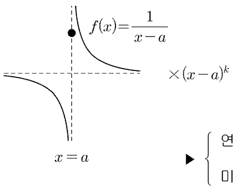
52 $f(x)\times g(x)$꼴 미분가능성

유형1 $x=a$에서 끊어져 있는 불연속
좌극한, 우극한, 함숫값은 존재



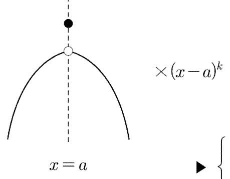
▶ 연속 : $k\geq 1$
미분가능 : $k\geq 2$

유형2 $x=a$에서 끊어져 있는 불연속 (발산불연속)



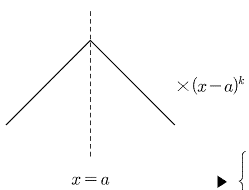
▶ 연속 : $k\geq 2$
미분가능 : $k\geq 2$

유형3 $x=a$에서 극한값 존재, 불연속 (함숫값 존재)



▶ 연속 : $k\geq 1$
미분가능 : $k\geq 1$

유형4 $x=a$에서 연속이지만 미분불가능 (첨점)



▶ 연속 : $k\geq 0$
미분가능 : $k\geq 1$

함수 $f(x)=|x-1|(x+a)^k$ 가 $x=1$에서 미분 가능할 때, k의 최솟값을 b라 하자 이때, $a+b$의 값은?

유형 4번 상황
① $y=(x+a)$는 모든 실수에서 미분가능
② $y=|x-1|$ 은 $x=1$에서 미분불가능이고, $x=1$에서 극한값이 존재하므로 $f(x)=|x-1|(x+a)^k$가 $x=1$에서 미분가능하려면 $k\geq 1$이고, $y=(x+a)$가 $x=1$에서 0 이 되어야 하므로 $a+1=0$ 따라서 $a=-1,\ b=1$

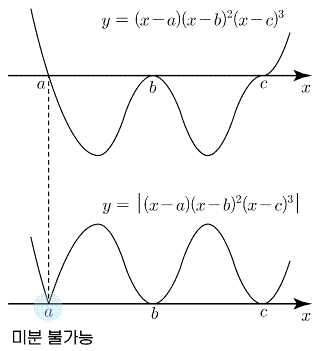
함수 $f(x)=[x]\times(x^2+ax+b)$ 가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.

유형 1번 상황
① $y=x^2+ax+b$는 모든 실수에서 미분가능
② $y=[x]$ 는 $x=1$에서 불연속이고 함숫값은 존재한다.
따라서 (x^2+ax+b)가 $(x-1)^2$이 되어야 한다.
그러므로, $x^2+ax+b=x^2-2x+1$이다.
$a=-2,\ b=1$

53 절댓값 함수의 미분가능

1차만 미분 불가능

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여
$f(a)=0,\ f'(a)\neq 0$
이면 함수 $|f(x)|$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.
다항함수가 $f(a)=0,\ f'(a)\neq 0$인 경우는
$f(x)=(x-a)g(x),\ (g(a)\neq 0)$
이다. 따라서 1차를 인수로 가질 때만 절댓값 씌울 때 미분이 불가능하다.



➡ $y=|f(x)|$의 그래프에서 점 $(a,\ 0)$은 첨점이다.
따라서 미분가능한 조건을 정리하면 다음과 같다.

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|$라 할 때, $x=a$에서 미분가능하기 위한 조건

❶ $f(a)\neq 0$일 때, $f(a)>0$이거나 $f(a)<0$인 경우
⇨ x축과 교점이 없는 경우

❷ $f(a)=0$일 때, $f'(a)=0$인 경우
⇨ 꺾어 올린 그래프가 첨점이 없이 부드럽게 이어져야 한다.

두 함수
$f(x)=x-5,\ g(x)=x^3+(2-a)x^2+(1-2a)x-a$에 대하여 함수 $f(x)|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은?

$g(x)=(x-a)^1(x+1)^2$ 이다.

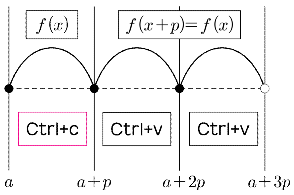
① $a=-1$이면 1차를 인수로 갖지 않기 때문에 $|g(x)|$는 미분가능하다.

② $a\neq -1$이면 $|g(x)|$는 $x=a$에서 첨점으로 미분 불가능하다.
이때, $a=5$이면 $f(x)|g(x)|$는 $x=5$에서 미분가능하다.

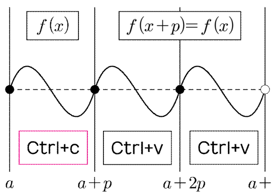
54 주기함수의 미분가능

처음과 끝의 함숫값, 기울기가 같다.

$$g(a)=g(a+p),\ g'(a)=g'(a+p)$$



$f(a)=f(a+p)$
이면 연속



$f(a)=f(a+p)$
$f'(a)=f'(a+p)$
이면 미분가능

55 접선의 방정식

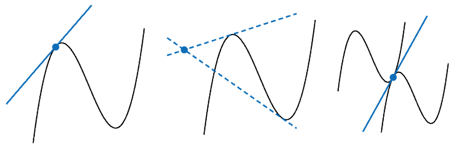
모든 접선문제는 시작은 '접점'이다.

1. 직선의 성질

   ① 두 직선
   $y=mx+n,\ y=m'x+n'$이 수직 ⇨ $m\times m'=-1$

   ② 두 직선
   $y=mx+n,\ y=m'x+n'$이 $y=x$에 대하여 대칭
   ⇨ $m\times m'=1$

2. 위치에 따른 접선의 방정식



곡선 위　　곡선 밖　　공통 접선

56 곡선 위에서 접선의 방정식

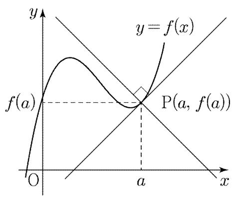
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선은 기울기가 $f'(a)$인 직선이므로 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

접선의 y절편 $=-a\times f'(a)+f(a)$

법선의 방정식



함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선에 수직이고 점 $(a,\ f(a))$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$$

이고, 이러한 직선을 법선이라고 한다.

57 기울기가 주어진 접선의 방정식

접점의 x좌표 a를 구하는 것이 핵심

곡선 $y=f(x)$에 대하여 기울기가 m인 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.

[1단계] 접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓는다.

[2단계] $f'(a)=m$임을 이용하여 a값과 접점의 좌표 $(a,\ f(a))$를 구한다.

[3단계] 접선의 방정식 $y=m(x-a)+f(a)$를 구한다.

58 곡선 밖에서 그은 접선의 방정식

t 의 의미는 접점의 x좌표이다.

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓고 t의 값을 구하는 것이 핵심

[1단계] 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 놓는다.

[2단계] 접선의 기울기가 $f'(t)$이므로 접선의 방정식을 구한다.
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$ …… ㉠

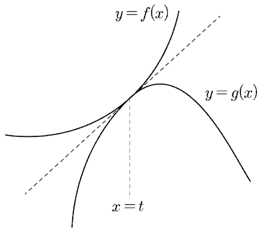
[3단계] 곡선 밖의 한 점 $(a,\ b)$을 ㉠에 대입하여 t의 값을 구한다.

[4단계] 구한 t의 값을 ㉠에 대입하여 접선의 방정식을 구한다.

[3단계]에서 $b=f'(t)(a-t)+f(t)$ 는 t에 대한 방정식이다. 이 방정식에서 실근 t의 의미는 접점의 x좌표이다.

59 공통접선

1. 접점이 일치할 때

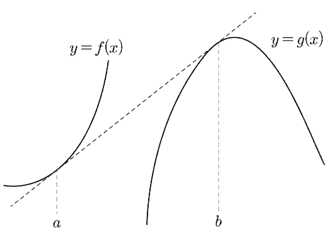


두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 점 $(a,\ b)$에서 한 직선에 접할 때

① 접점의 좌표를 알면 그것을 사용하고, 모르면 접점의 x좌표를 t로 잡는다.

② $\begin{cases} f(t)=g(t) & \cdots ⓐ \\ f'(t)=g'(t) & \cdots ⓑ \end{cases}$: ⓑ 식을 이용해서 ⓐ식을 푼다.

2. 접점이 일치하지 않을 때



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선과
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(b,\ g(b))$에서의 접선이 일치할 때

❶ $\dfrac{g(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)=g'(b)$ (단, $a\neq b$)

❷ 항등식을 성질을 이용하여
$f'(a)(x-a)+f(a)=g'(b)(x-b)+g(b)$
의 미지수를 푼다.

60 롤의 정리

기울기 0인 곳을 찾자.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고
열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,

$f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$인 c가
열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

함수 $f(x)=-x^2+4x$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 롤의 정리를 만족하는 상수 c의 값을 구하여라.

[해설]
함수 $f(x)=-x^2+4x$는 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 연속이고
열린구간 $(0,\ 4)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(4)$이므로
롤의 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 구간 $(0,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다. 이때 c의 값은
$f'(x)=-2x+4$이므로 $f'(c)=-2c+4=0$ ∴ $c=2$

61 평균값 정리

두 점 사이기울기와 같은 곳을 찾자.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고
열린구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가
열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

함수 $f(x)=-x^2+4x$에 대하여 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c의 값을 구하여라.

[과정1] 평균값 정리를 만족시키는 상수가 존재하는지 확인하기
$f(x)=-x^2+4x$
은 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고
열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로
평균값 정리에 의하여
$\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{3-0}{3-0}=1=f'(c)$
인 c가 구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

[과정2] c의 값 구하기
이때, $f'(x)=-2x+4$이므로 $f'(c)=-2c+4$
따라서 구하는 c의 값은 $-2c+4=1$
∴ $c=\dfrac{3}{2}$

※ 평균값 정리활용

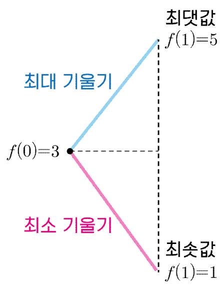
1. 미분가능한 함수의 최대값과 최소값

기울기를 최대로 사용하거나 최소로 사용하자.

미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)|\le 2$이다.
(나) $f(0)=3$

[정답] 6
기울기의 최대, 기울기의 최소를 생각하자.



2. 두 점사이의 기울기를 $\lim$없이 미분계수로 표현할 수 있다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린구간 (a, b)에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 이므로 두 점 사이의 기울기를 미분계수로 표현할 수 있다.

단, 열린구간 (a, b)에서 $f'(c)$와 $f'(x)$가 완벽히 같은 것은 아니다.

$f'(x)$의 최솟값이 $f'(k)=m$ 일 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=m$을 만족시키는 a와 b는 존재하지 않는다. 따라서 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)=m$을 만족시키는 c도 존재하지 않는다.

($f'(x)$의 최댓값이 $f'(k)=M$일 때도 위와 같다.)

함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+1$에 대하여 집합 S를

$$S=\left\{a \,\middle|\, a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, 2\le x_1<x_2\le 3\right\}$$

으로 정의할 때, 집합 S의 원소 a의 값의 범위를 구하시오.

평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$를 만족하는 c가 열린구간 $(2, 3)$에서 존재한다. $f'(x)=x^2-2x$이므로

$f'(2)=0<f'(c)<f'(3)=3$

$0<a<3$

함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+1$에 대하여 집합 S를

$$S=\left\{a \,\middle|\, a=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, 0\le x_1<x_2\le 3\right\}$$

으로 정의할 때, 집합 S의 원소 a의 값의 범위를 구하시오.

평균값 정리에 의하여 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$를 만족하는 c가 열린구간 $(0, 3)$에서 존재한다. $f'(x)=x^2-2x$이므로

이때, $f'(x)$의 최솟값은 $f'(1)=-1$이다.

이때, $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)=-1$을 만족시키는 c는 존재할 수 없다.

따라서

$f'(1)=-1<f'(c)<f'(3)=3$

$-1<a<3$

3. 도함수가 수렴할 때 : $\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x+a)-f(x-a)\}$ 유형

실수 전체에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=2$일 때, $\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-2)\}$의 값은?

[해설]

$f(x)$는 실수 전체에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해 $\dfrac{f(x+2)-f(x-2)}{(x+2)-(x-2)}=f'(x)$를 만족하는 실수 x값이 항상 존재한다.

따라서 $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\dfrac{f(x+2)-f(x-2)}{4}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-2)\}=8$

62 도함수 활용의 목적

도함수를 활용하여 본 함수를 파악하고자 한다.

도함수의 활용을 통해 보고자하는 것은, 결국 $f(x)$이다.

함수 $f(x)$의 파악을 위해 도함수$f'(x)$와 이계도함수 $f''(x)$를 이용한다.

이때, 도함수 $f'(x)$에서 두 가지를 확인해야 하는데, 첫 번째는 '값의 의미'이고 두 번째는 '부호의 의미'이다.

'값' 은 미분계수라 하며 접선의 기울기로 해석한다.
'부호' 는 미분 전 함수의 증가와 감소를 말해준다.

$f'(x)>0$ ⇨ '$f(x)$가 증가하고 있다.'
$f'(x)<0$ ⇨ '$f(x)$가 감소하고 있다.'

이계도함수$f''(x)$또한, 값과 부호의 확인이 필요하며 $f''(x)$의 값은 '0'을 제외하면 직관적으로 $f(x)$에 연결시키기는 어렵다.
부호는 미분 전 함수 $f'(x)$의 증가와 감소를 말해주어 $f(x)$의 굴곡을 결정해준다.

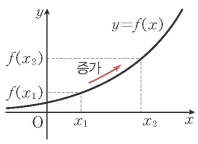
$f''(x)>0$ ⇨ '$f(x)$는 아래로 볼록'
$f''(x)<0$ ⇨ '$f(x)$는 위로 볼록'

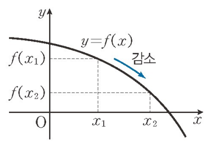
63 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

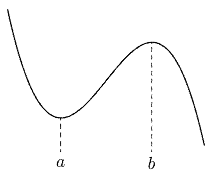
$x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이면
$f(x)$는 이 구간에서 증가한다고 하며,

$x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면
$f(x)$는 이 구간에서 감소한다고 한다.





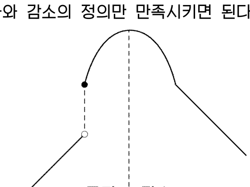
증가하는 구간



(a, b)에서 증가 or $[a, b]$에서 증가
"둘 다 맞다."

증가감소와 연속과 미분가능의 관계

함수의 증가와 감소는 함수의 연속이나 미분가능과 아무런 관계가 없다. 즉 불연속적인 점이나 미분가능하지 않은 점이 있더라도 함수의 증가와 감소의 정의만 만족시키면 된다.



하지만, 우리가 배우는 '도함수 활용'단원에서 증가, 감소는 미분을 통한 함수의 증가와 감소를 파악하는데 교육과정상 목적이 있다.

64 도함수를 활용한 증가함수와 감소함수의 판단

열린구간 (a, b)에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

① $f(x)$가 증가한다.
⇒ 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이다.
(등호 붙는다.)

② $f(x)$가 감소한다.
⇒ 이 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다.
(등호 붙는다.)

<증명> 열린구간(a, b)에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

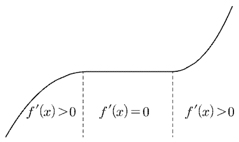
$x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$

이다. 이때, $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$이고 양변에 $\lim$를 취하면

샌드위치 정리에 따라

$\lim\limits_{x_2\to x_1}\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\ge 0,\quad \therefore f'(x)\ge 0$

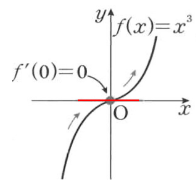
역은 성립하지 않는다. $f'(x)\ge 0 \not\Rightarrow f(x)$가 증가한다.



그림과 같이 상수함수가 나오는 구간에서는 함수가 증가한다 말할 수 없다.

따라서 우리는 아래와 같이 실전개념을 갖고 있는 것이 좋다.

구간 (a, b)에서 $f'(x)\ge 0$이고 $f'(c)=0$인 c실수 c의 개수가 유한개라면 함수 $f(x)$는 구간 (a, b)에서 증가한다고 할 수 있다.



예를 들어 $f(x)=x^3$는 $(-\infty, \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이고 $f'(c)=0$을 만족시키는 실수 c가 $c=0$ 오직 하나뿐이다.
따라서 $f(x)=x^3$는 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다 할 수 있다.

함수 $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+12ax$가 구간 $[1, \infty)$에서 증가하도록 상수 a의 값을 구하시오.

[해설] $a=2$

$f'(x)=6x^2-6(a+2)x+12a=6(x-2)(x-a)$

$x\ge 1$일 때 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 $f'(x)$는 $(2, 0)$을 관통하면 안 된다. 아 제발 이 말 기억해야해 '관통하면 안 된다.' 즉 접해야한다. $(x-2)^2$을 인수로 갖는구나 생각해야 합니다! 따라서 $a=2$

65 도함수를 이용한 그래프 그리기

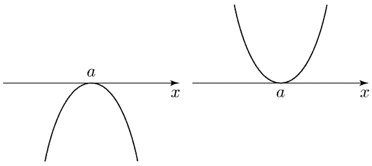
뒹접과 뚫접

다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ 0)$에서 x축에 접한다.

$\Leftrightarrow\ f(a)=0,\ f'(a)=0$

$\Leftrightarrow\ f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.

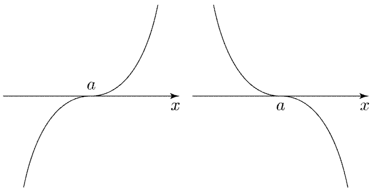
다항함수 $f(x)$가 n이 짝수일 경우 $(x-a)^n$만을 인수로 가지면 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 바뀌지 않는다.



$f(x)=(x-a)^2(\cdots\cdots)$

$f'(x)=(x-a)(\cdots\cdots)$

다항함수 $f(x)$가 n이 3이상의 홀수일 경우 $(x-a)^n$만을 인수로 가지면 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 바뀐다.

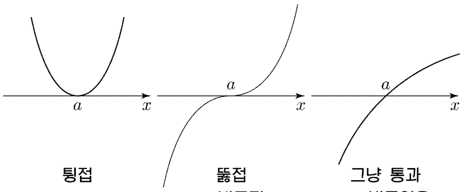


$f(x)=(x-a)^3(\cdots\cdots)$

$f'(x)=(x-a)^2(\cdots\cdots)$

① $f'(x)$의 개형을 그린다.

$(x-a)^{2n}\times g(x)$ $(x-a)^{2n+1}\times g(x)$ $(x-a)^1\times g(x)$

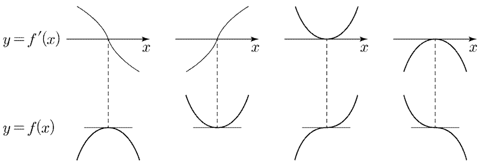


뒹접 / 뚫접 ∴ 변곡점 / 그냥 통과 → 변곡없음

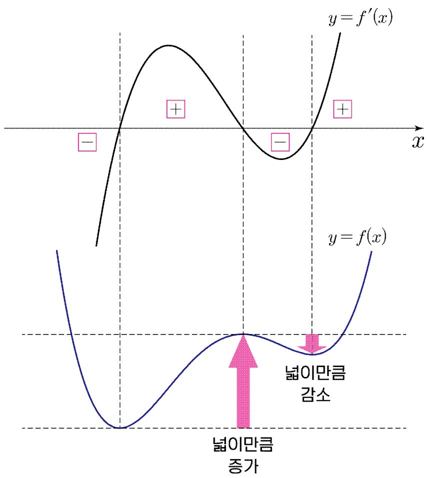
② $f'(x)$ 부호를 체크

③ $f'(x)$와 x 축으로 둘러싸인 넓이를 체크

④ 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 관계에서 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



⑤ 예쁘게 $f(x)$를 그리자.



66 삼차함수의 증가, 감소조건

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에 대하여

(1) 모든 구간에서 증가함수이기 위한 조건

1) 최고차항의 계수가 양수 ⇨ $a>0$

2) $f'(x)=3ax^2+2bx+c\geq 0$

3) 방정식 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$에서 판별식 $D\leq 0$

(2) 모든 구간에서 감소함수이기 위한 조건

1) 최고차항의 계수가 음수 ⇨ $a<0$

2) $f'(x)=3ax^2+2bx+c\ \leq 0$

3) 방정식 $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$에서 판별식 $D\leq 0$

역함수 존재와 증가, 감소함수

$f(x)$역함수 존재 ⇔ 일대일 대응함수 ⇏ 증가 or 감소함수

$f(x)$역함수 존재, $\underline{f(x)\text{는 연속}}$ ⇔ 일대일 대응함수 ⇔ 증가 or 감소함수

함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$가 임의의 두 실수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립할 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

[해설]

삼차함수 $f(x)$가 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)=3x^2+2ax+2a\geq 0$

이어야 한다. 즉, 이차방정식 $f'(x)=3x^2+2ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D\leq 0$

이어야 한다. ⬅ 이차함수 $y=f(x)$가 x축에 접하거나 x축보다 위에 있어야 한다.

$\frac{D}{4}=a^2-6a\leq 0,\ a(a-6)\leq 0$

$\therefore\ 0\leq a\leq 6$

함수 $f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}(a-1)x^2+2x$와 모든 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 정수 a의 개수는?

[정답] 9

$f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}(a-1)x^2+2x$에서 모든 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 개수가 1이 되려면 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 실수 전체의 집합에서 증가한다.

즉, $f'(x)=2x^2+(a-1)x+2\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $2x^2+(a-1)x+2=0$의 판별식을 D라 하면에서

$D=(a-1)^2-16\leq 0$에서 $a^2-2a-15\leq 0$

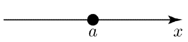
$(a+3)(a-5)\leq 0\quad \therefore\ -3\leq a\leq 5$

따라서 정수 a의 개수는 $-3,\ -2,\ -1,\ \cdots,\ 5$이므로 9개다.

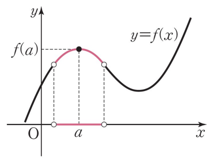
67 극대, 극소

(1) 극대극소의 정의

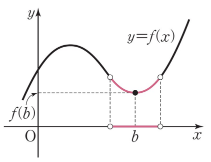
극댓값은 영어로 'Local Maximum Value' 라고 한다. 한국어로 '근방에서 가장 큰 함숫값이라고 정의한다.'
$x=a$ 근방이라는 표현은 a를 포함한 열린구간을 의미하며 아래와 같다. (극솟값은 'Local minimum Value' 라고 한다.)



함수 $f(x)$가 실수 a를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에서 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대라 하고, $f(a)$를 극댓값이라 한다.



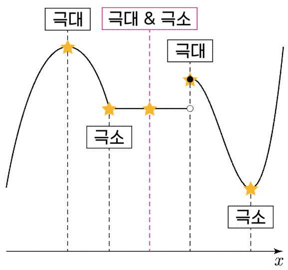
함수 $f(x)$가 실수 b를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에서 $f(x) \ge f(b)$이면 함수 $f(x)$는 $x=b$에서 극소라 하고, $f(b)$를 극솟값이라 한다.



이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라고 한다.

(2) 미분불가능과 극대극소

정의대로 극댓값과 극솟값을 표시하면 아래그림과 같다.

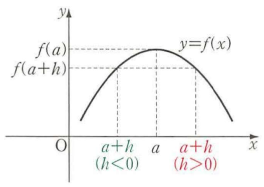


보면 알겠지만, 함수 $f(x)$가 불연속 또는 미분불가능해도 극댓값과 극솟값을 정의할 수 있다. 하지만, '도함수 활용' 단원에서 교육과정상 더 중요한 포인트는 미분을 이용하여 극값을 판단할 수 있는 함수이다.

(예제 추가하면 $f(x)=|x|$에서 $x=0$에서 뾰족해서 미분 불가능하지만 극솟값 갖는거임!)

68 미분가능한 함수의 극값 판정

일반적으로 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대라고 하면



절댓값이 충분히 작은 모든 h에 대하여 $f(a+h) \le f(a)$이므로

$h>0$이면 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0$,

$h<0$이면 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0$

$$\therefore \lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0,\ \lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0$$

그런데 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로 위의 우극한과 좌극한이 이 같다.

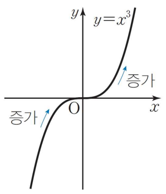
$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=0 \quad \therefore f'(a)=0$$

같은 방법으로 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극소이면 $f'(a)=0$임을 증명할 수 있다.

> 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면
> $$f'(a)=0$$

위 성질의 역은 성립하지 않는다. $f'(a)=0$은 항상 극값이 아닌 극값의 후보다.
미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이라고 해서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 반드시 극값을 가지는 것은 아니다.

예를 들어, 함수 $f(x)=x^3$에서 $f'(x)=3x^2$이므로 $f'(0)=0$이지만 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

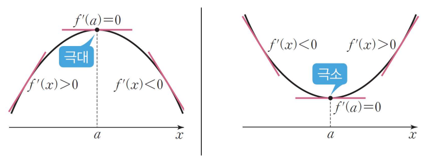


69 미분가능한 함수의 극대와 극소 판정

도함수의 부호를 이용

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

또, $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 $f(x)$는 $x=a$의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.



미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서

> ① $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면
> $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.
>
> ② $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면
> $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

70 극값판단 종합

도함수의 부호가 변해야 극값이 존재한다.

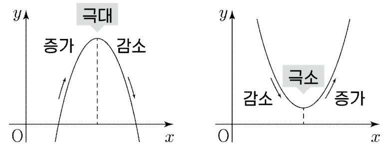
① $f(x)$가 $x=a$에서 극값 존재하면 $f'(a)=0$이다. (거짓)

② 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값 존재하면 $f'(a)=0$이다. (참)

③ $f'(a)=0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극값 존재한다. (거짓)
반례 : $f(x)=x^3$일 때, $f'(0)=0$이지만 $f(x)$는 $x=0$에서 극값 을 갖지 않는다.

③ 연속함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값이 존재하면 아주 작은 양수 h에 대하여 $f'(a-h)\times f'(a+h)<0$이다.
(도함수의 부호가 변한다.)

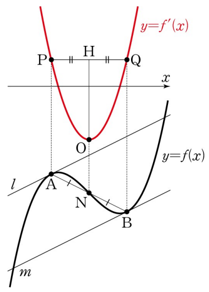
④ $f'(a-)<0$ $f'(a+)>0$ → $x=a$에서 극소
$f'(a-)>0,\ f'(a+)<0$ → $x=a$에서 극대



71 삼차함수의 그래프 대칭

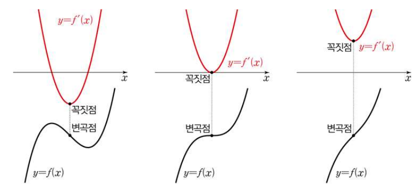
삼차함수의 특징은 변곡점에서 나온다.

삼차함수 그래프는 점대칭 그래프이다. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)$는 이차함수이고 $f'(x)$는 꼭지점을 지나는 y축에 평행한 선에 선대칭이다. 따라서
꼭지점(변곡점)을 기준으로 거리가 같으면 기울기가 같고,
꼭지점(변곡점)을 기준으로 기울기가 같으면 거리가 같다.



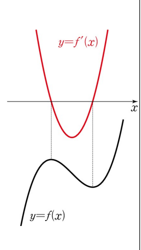
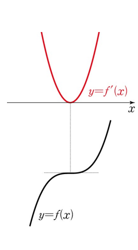
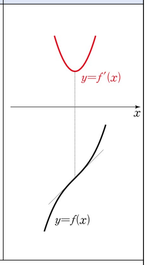
> ① 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축을 직선 $x=t$라 하면 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(t,\ f(t))$에 대하여 대칭이다.
> ② 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$에서의 접선의 기울기가 서로 같으면 즉, $f'(\alpha)=f'(\beta)$이면 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$에 대하여 대칭이고 ①에 의하여 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\mathrm{N}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)$에 대하여 대칭이다.

변곡점
삼차함수의 그래프의 대칭의 중심이 되는 점을 변곡점 (곡선의 오목과 볼록이 바뀌는 점)이라고 하는데,
'수학 II'에서는 사용하지 않는 용어지만...아이러니하게 이걸 알아야 문제를 아름답게 풀 수 있다.

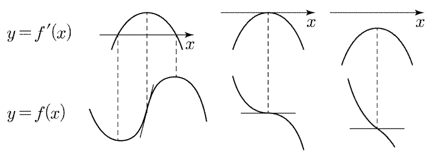


72 삼차함수의 그래프 개형

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때, $y=f(x)$의 그래프의 개형은 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 관계에 따라 그림과 같이 3가지로 나누어진다.

	방정식 $f'(x)=0$의 실근 조건		
	서로 다른 두 실근 α, β를 갖는 경우	중근 α를 갖는 경우	허근을 갖는 경우
	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$f'(x)$ 개형 $f(x)$ 개형			
극값	극댓값과 극솟값을 가진다.	극값이 없다.	

※ 최고차항의 계수가 음수인 경우도 같은 방법으로 그래프를 그려보면 삼차함수 $f(x)$는 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면 극댓값과 극솟값을 모두 갖고, 중근이나 서로 다른 두 허근을 가지면 극값을 갖지 않음을 알 수 있다.



73 조건에 따른 삼차함수 개형

1. 삼차함수의 그래프의 개형은 극값의 존재 여부에 따라 다음과 같이 2가지로 분류할 수 있다.

① 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖는다.
: 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
: $f'(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D>0$

② 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는다.
: 삼차함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하거나 실수 전체의 집합에서 감소한다.
: 일대일대응이다. 역함수를 갖는다.
: 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖거나 허근을 갖는다.
: $f'(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D\le 0$

2. 삼차함수의 그래프가 x축에 접하는 조건에 따라 다음과 같이 2가지로 분류할 수 있다.

① 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만난다.
: 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.
: 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만난다.
: $f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$
점 $(\alpha,\ 0)$에서 x축과 접하고 점 $(\beta,\ 0)$에서 만난다.
: $f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)=0$

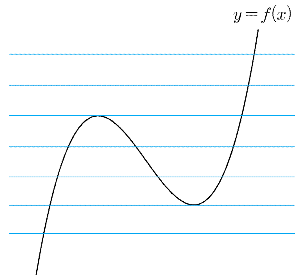
② 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서만 접한다.
: 삼차방정식 $f(x)=0$이 삼중근을 갖는다.
: $f(x)=a(x-\alpha)^3$
: 삼차함수 $f(x)$가 $f'(x)$를 인수로 갖는다.
$f(x)=f'(x)\times(ax+b)$ ⇨ $f(x)=(px+q)^3$

74 삼차함수 그래프와 직선과의 관계

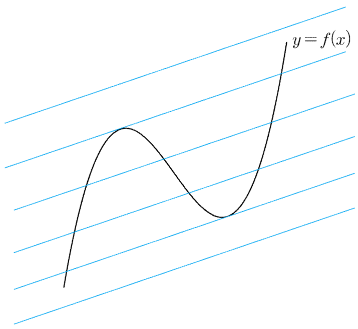
1. 삼차함수 그래프와 직선과의 관계는 "방정식"이 핵심

방정식 ‘삼차함수= 직선’ 에서 세근의 합은 불변
$ax^3+bx^2+cx+d=mx+n$
$ax^3+bx^2+(c-m)x+d-n=0$
근과 계수와의 관계에 따라
세근의 합$=-\dfrac{b}{a}$
m과 n은 세근의 합에 영향주지 않는다.

① x축과 평행한 직선과 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프



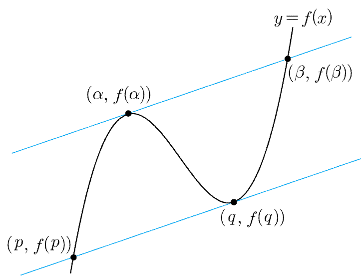
② 기울기가 0이 아닌 직선과 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프



위 ①과 ② 그래프에서 표현된 모든 직선에 대하여
세근의 합은 불변

2. 접할 때, 특수하다.

접할 때, 즉 방정식 ‘$f(x)$=직선’이 중근을 가질 때
세근의 합은 $\alpha+\alpha+\beta=p+p+q$

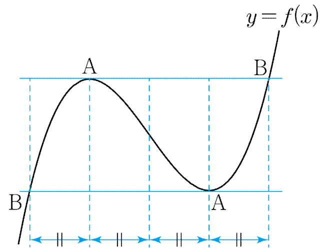


함수 $f(x)=x^3-x+1$위의 점 $\mathrm{A}(1,1)$에서의 접선이 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 $\mathrm{B}(a,b)$라 하자. $a+b$의 값을 구하시오.

[정답] -7
방정식 ‘$f(x)=0$’ 의 세근의 합은 근과 계수와의 관계에 따라 0이다. 세근의 합은 일정하므로
방정식 ‘$f(x)$=접선’ 의 세근의 합 또한 0이다.
$1+1+a=0$
$\therefore a=-2\quad f(-2)=-5=b$
따라서 $a+b=-7$

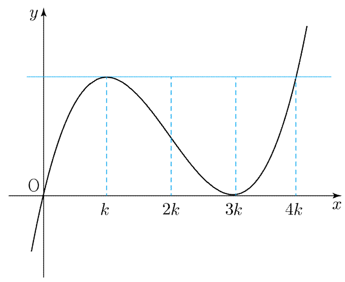
75 삼차함수의 그래프와 비율관계

1. x축에 평행한 선에 접할 때



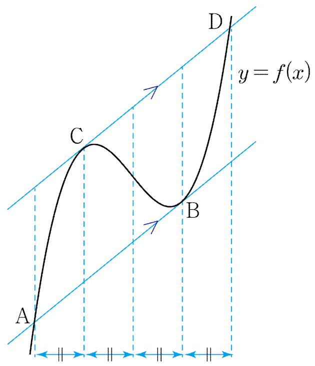
삼차함수의 그래프의 극대(극소)인 점 A에서 그은 접선이 이 삼차함수의 그래프와 점 B에서 만날 때, 선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 x좌표가 극소(극대)인 점의 x좌표와 같다.
이 때, 변곡점의 x좌표는 극대와 극소의 중점이므로
1 : 1 : 1
비율관계를 갖는다.

삼차함수 $f(x)=x(x-3k)^2\ (k>0)$의 그래프를 그리고, 극대인 점의 x좌표를 구하시오.



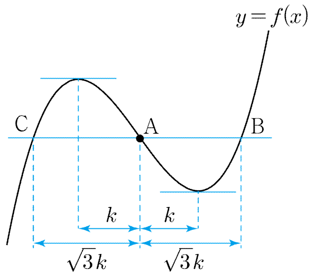
비율관계를 이용해 좌표를 설정하자.
① 극대, 극소의 x좌표 부터 설정
$x=k,\ x=3k$
② 변곡점의 x좌표 설정
$x=2k$ (변곡점은 극대, 극소의 중점)

2. 직선에 접할 때.



방정식 ‘삼차함수= 직선’ 에서 세근의 합은 불변 이므로
기울기가 같은 지점에서 역시
1 : 1 : 1
비율관계를 갖는다.

3. 변곡점을 지나는 직선과의 비율관계



삼차함수의 그래프의 변곡점 A를 지나고 기울기가 0인 직선이 이 삼차함수의 그래프와 점 B에서 다시 만날 때, 변곡점 A와 극대 또는 극소인 점, 점 B사이에 그림과 같은 $1:\sqrt{3}$의 비율관계가 나타난다.

삼차함수 $f(x)=x(x^2-3k^2)$ $(k>0)$의 극대와 극소의 x좌표를 구하시오.

$f(x)=(x+\sqrt{3}k)x(x-\sqrt{3}k)$이므로 삼차함수 비율관계에 따라.

극소의 x좌표 : $\dfrac{-\sqrt{3}k}{\sqrt{3}}=-k$

극대의 x좌표 : $\dfrac{\sqrt{3}k}{\sqrt{3}}=k$

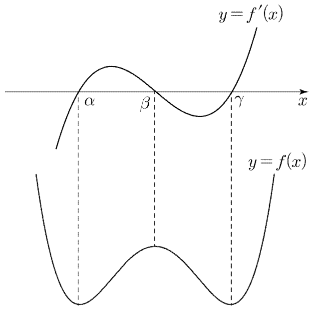
76 사차함수의 그래프

사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수일 때, $y=f(x)$의 그래프의 개형은 삼차함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 관계, 즉 삼차함수 $y=f'(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수에 따라 그림과 같이 6가지로 나누어진다.

$f'(x)=0$의 실근 조건

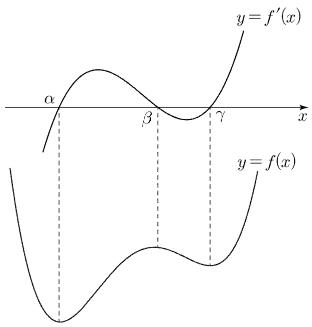
① 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 갖고, $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$일 때

간격이 같음 ⇨ 넓이가 같음 ⇨ 넓이만큼 증가감소

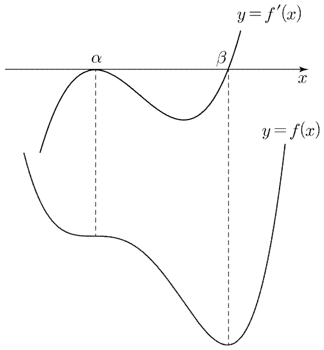


② 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 갖고, $\beta\neq\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$일 때

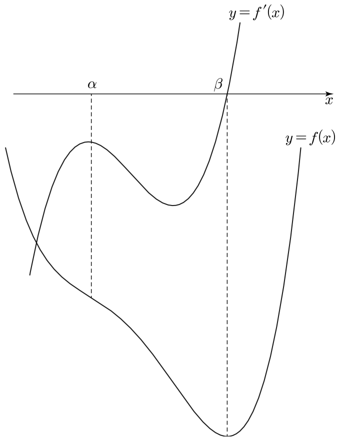
간격이 다름 ⇨ 넓이가 다름 ⇨ 넓이만큼 증가감소



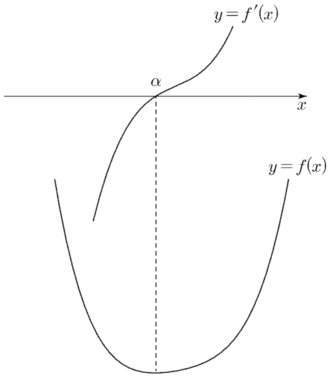
③ 방정식 $f'(x)=0$이 중근 α와 실근 β를 갖는 경우



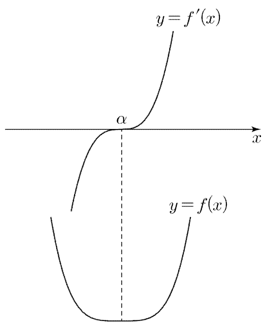
④ 함수 $y=f'(x)$가 극값이 존재하고 방정식 $f'(x)=0$이 실근 β와 두 허근을 갖는 경우



⑤ 함수 $y=f'(x)$가 극값이 존재하지 않고 방정식 $f'(x)=0$이 실근 α와 두 허근을 갖는 경우



⑥ 방정식 $f'(x)=0$이 삼중근 α를 갖는 경우



77 사차함수의 극값존재

1. 사차함수의 극값 존재와 개형

사차함수의 그래프의 개형은 최고차항의 계수의 부호에 따라 극값의 존재 여부를 다음과 같이 2가지로 분류할 수 있다.

① 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는다.
최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖는다.
⇔ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

② 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않는다.
최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$가 극솟값을 갖지 않는다.
⇔ 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖거나 오직 한 실근을 갖는다.

2. 사차함수의 그래프가 x축에 접하는 조건

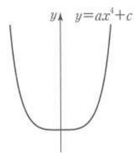
① 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 세 점에서 만난다.
⇔ 사차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는다.
⇔ 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 접하고 다른 두 점에서 만난다.
$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)(x-\gamma)$

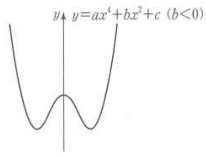
② 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 접한다.
⇔ $f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

③ 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 접하고 다른 한 점에서 만난다.
⇔ $f(x)=a(x-\alpha)^3(x-\beta)$

3. 우함수(y축 대칭)인 사차함수

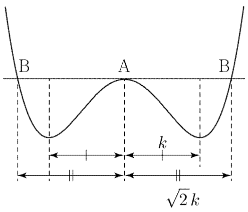
사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=f(x)$
$f(x)=ax^4+bx^2+c$ 짝수차항으로만
로 놓을 수 있고, $f'(x)=4ax^3+2bx$이므로
삼차함수 $y=f'(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
⇨ 우함수인 사차함수의 도함수는 기함수인 삼차함수이다.





78 사차함수 그래프의 비율 관계

1. 선대칭함수 & 극값 3개



최고차항의 계수가 양수이고 두 극솟값이 서로 같은 사차함수의 그래프의 극대인 점 A에서 그은 접선이 이 사차함수의 그래프와 점 B에서 다시 만날 때, 점 A와 극소인 점, 점 B사이에 그림과 같은 $1:\sqrt{2}$의 비율 관계가 나타난다.

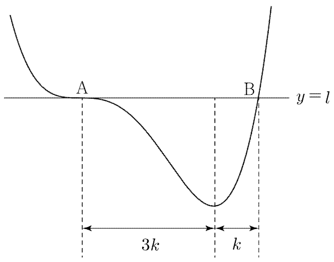
사차함수 $f(x)=x^2(x^2-2k^2)\,(k>0)$ 에 대하여 모든 극소의 x좌표를 구하시오.

사차함수가 $f(x)=x^2(x^2-2k^2)\,(k>0)$이므로 비율관계에 따라.

극소의 x좌표 : $\dfrac{\sqrt{2}\,k}{\sqrt{2}}=k$

극대의 x좌표 : $\dfrac{-\sqrt{2}\,k}{\sqrt{2}}=-k$

2. $f(x)-l=a(x-\alpha)^3(x-\beta)$ 꼴



최고차항의 계수가 양수인 사차함수의 그래프가 그림과 같고, 극소가 아닌 점 A에서 그은 기울기가 0인 접선이 이 사차함수의 그래프와 점 B에서 다시 만날 때 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 x좌표가 극소인 점의 x좌표와 같다.

사차함수 $f(x)=x^3(x-4k)\,(k>0)$의 극소점의 x좌표를 구하시오.

$A(0,0)$, $B(4k,0)$라 할 때 사차함수 비율관계에 따라 극소점의 x좌표는 선분 AB의 3 : 1내분점이다.

극소점의 x좌표 : $\dfrac{1\times0+3\times4k}{3+1}=3k$

79 다항함수 최대최소

최댓값과 최솟값은 함숫값 중에 결정된다.

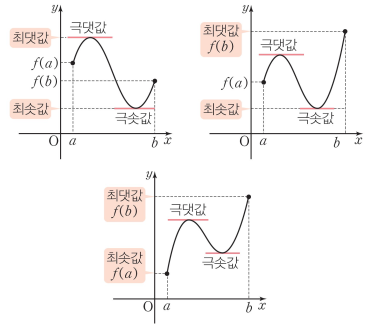
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 닫힌구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다는 최대·최소 정리가 있다. 이제부터 함수의 최대와 최소를 극대와 극소를 이용하여 다루는 방법을 알아보자.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

① 구간의 양 경곗값인 함숫값 $f(a)$와 $f(b)$를 구한다.

② 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구한다.

③ 함숫값 $f(a)$, $f(b)$와 모든 극값 중 가장 큰 값이 $f(x)$의 최댓값이고 가장 작은 값이 $f(x)$의 최솟값이다.



극댓값이 반드시 최댓값이 되는 것은 아니고 극솟값이 반드시 최솟값이 되는 것도 아니다.

삼차함수의 최대최소

삼차함수의 최대와 최소는

$$y=(x-a)^2(x-b) \text{ 또는 } y=x(x+a)(x-a)$$

꼴로 다루어지는 경우가 많으므로 이때는 삼차함수의 그래프의 비율 관계에 관한 특징을 적극적으로 이용하도록 하자.

특히

또한 $a<x<b$일 때, 함수

$$f(x)=(x-a)\sqrt{b-x}$$

꼴의 특수한 경우의 최대와 최소는 $f(x)=\sqrt{(x-a)^2(b-x)}$로 고쳐서 $(x-a)^2(b-x)$꼴의 최대와 최소로 다룬다.

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)=-x^3+3x+4$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

[해설] $f'(x)=-3x^2+3=-3(x-1)(x+1)$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	4	↗	6	↘	14

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 6, $x=3$일 때 최솟값 -14를 갖는다.

80 최대최소 활용

1. 함수의 최대와 최소의 활용

함수의 최대·최소의 활용 문제는 도형의 길이, 넓이나 부피와 관련된 것들이 대부분이다. 이러한 문제들을 해결하는 방법은 다음과 같다.

① 도형의 길이, 넓이, 부피 등의 식을 작성한다.

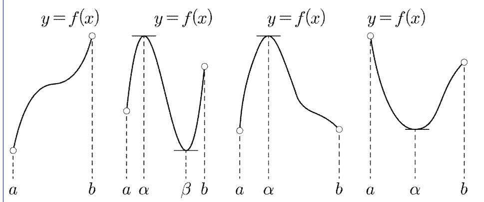
② 식에 변수를 하나로 통일하여 함수를 구하고 그 값의 범위를 구한다. [정의역 설정]

③ 함수의 그래프를 이용하여 함수의 증가과 극대·극소를 이용하여 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

2. 열린구간에서의 최대·최소

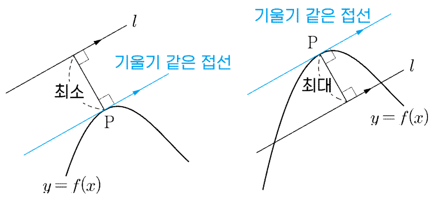
열린구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값이 존재하면 최댓값은 극댓값 중 하나이고 최솟값은 극솟값 중 하나이다. 이때는 구간의 양 끝에서의 함숫값을 고려하지 않아도 된다.

특히 함수 $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값이 존재할 때, 방정식 $f'(x)=0$의 실근이 $x=\alpha$하나뿐이면 $f(\alpha)$가 최댓값 또는 최솟값이다.



최댓값: 없다. 최댓값: $f(\alpha)$ 최댓값: $f(\alpha)$ 최댓값: 없다.
최솟값: 없다. 최솟값: $f(\beta)$ 최솟값: 없다. 최솟값: $f(\alpha)$

3. 직선으로부터 곡선 위 점까지 거리의 최솟값

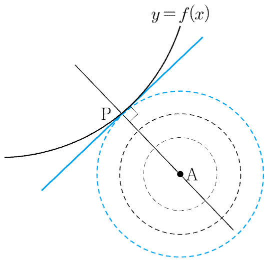


곡선 위의 점(P)와 직선(l)사이의 거리의 최댓값과 최솟값은 직선 l과 기울기가 같은 점과 직선 l사이의 거리와 같다.

① l : $y=mx+n$일 때, 곡선 $y=f(x)$위의 점 $P(x, f(x))$에 대하여 $f'(a)=m$를 만족시키는 점 a를 찾는다.

② 점과 직선사이의 거리 공식을 이용하여 직선으로 부터 거리의 최댓값 또는 최솟값을 찾는다.

4. 곡선 밖 점에서 곡선 위 점까지 거리의 최솟값



$A(a,b)$를 중심으로 동심원을 그려나갈 때, 곡선과 접하는 점$P(t, f(t))$에서 최솟값이 발생한다.

① 점 A를 중심으로 하는 원과 곡선이 접하는 상황을 설정한다.

② 점 P에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선과 직선 AP가 수직임을 이용하여 식을 세운다.

$$\frac{f(t)-b}{t-a}\times f'(t)=-1$$

5. 최대·최소의 활용 TIP

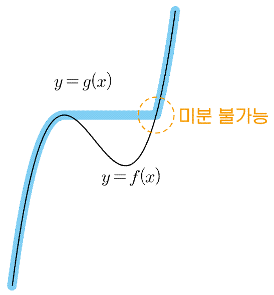
① 최대·최소의 활용 문제의 정의역은 대부분 열린구간이다. 따라서 구간의 양 끝 값은 고려할 필요가 없다. 극값에서 항상 최대·최소가 결정된다.

② 위에서의 논리로 최대·최소는 극값에서 결정된다. 따라서 최대·최소의 활용 문제는 극값을 잘 찾는 것이 중요하고 여기에서 삼차함수, 사차함수의 비율 관계가 적극적으로 활용된다.

81 최대최소로 정의된 함수

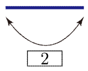
1. 구간 $(-\infty,\ t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때

누적범위 에서 최댓값을 얘기한다. 상수함수 구간이 발생하며, 상수함수의 y값은 극댓값과 같다.

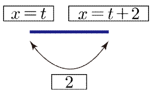


구간 $[t,\ t+2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때

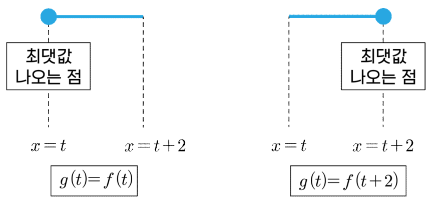
구간에서 정의된 함수이며, 구간 길이가 주어져 있을 때 기준점을 먼저 파악한다.



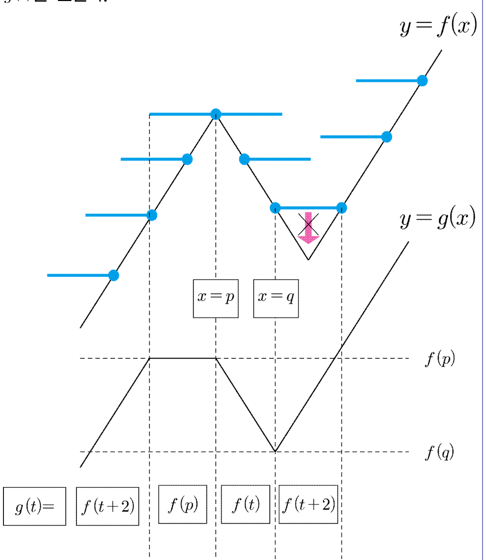
$t \le x \le t+2$에서 $f(x)$의 최댓값이 $g(t)$라고 정의되어 있다면, 기준이 되는 점은 $x=t$ 이다. 이제 $x=t$부터 $x=t+2$가지 구간에서 주어진 조건에 맞게 생각한다.



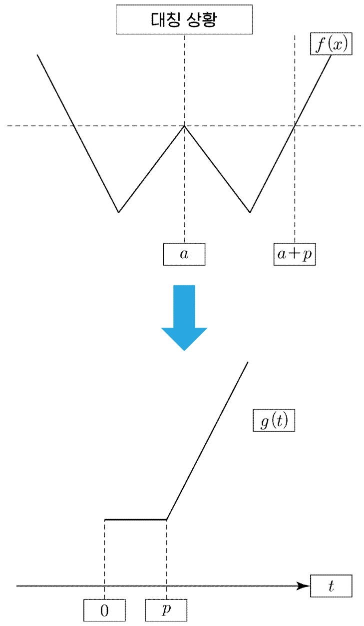
주어진 구간내 최댓값은 아래와 같은 상황에서 나올 수 있다.



우리가 구하는 함수는 $g(t)$이므로 $f(x)$의 평행이동을 통해서 $g(t)$를 그린다.

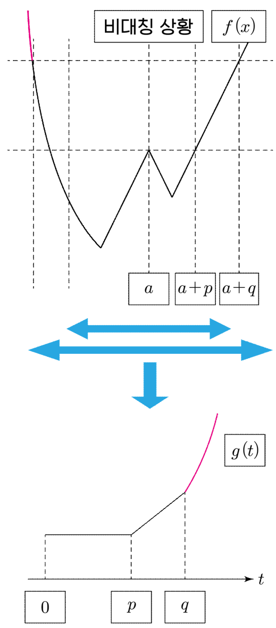


2. 구간 $[a-t,\ a+t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때



처음 $t=0$일 때부터 $t=p$일 때 까지 벌어지는 구간내에서 최댓값은 $f(a)$로 일정하다. $t=p$ 일 때, $f(a) \le f(a+p)$이기 때문에 $t>p$인 범위내에서는 최댓값이 바뀌어 $g(t)=f(a+t)$가 된다.

구간 $[a-t,\ a+t]$ 에서 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때



구간 내 언제 최댓값이 바뀌는지 파악하면서 범위를 넓혀야 한다.

$t=p$일 때 까지는 최댓값이 $f(a)$로 유지되고

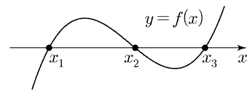
$t \ge p$ 에서부터는 $f(x)$의 $x=a$ 기준 오른쪽 부분을 따라가고

$t>q$ 부터는 $f(x)$의 $x=a$ 기준 왼쪽 부분을 따라간다고 생각하자.

82 함수의 그래프와 방정식

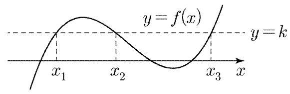
① 방정식 $f(x)=0$

방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같다.



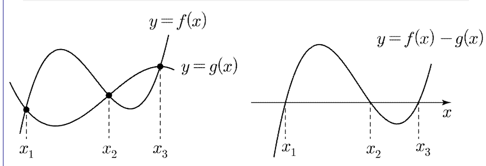
② 방정식 $f(x)=k$의 실근

방정식 $f(x)=k$의 실근은 함수 $y=f(x)$ 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.



③ 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근

방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은
두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.
또한, 방정식 $f(x)=g(x)$는 방정식 $f(x)-g(x)=0$과 같으므로 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같다.



83 그래프를 이용한 방정식 풀이

실근을 구하여라 vs 실근의 위치, 실근의 개수, 실근의 존재성

실근을 구하는 문항에서는 인수분해, 근의 공식과 같은 방법을 이용해 방정식을 풀어야 하지만 실근의 위치, 개수, 존재성을 구하는 문항에서는 미분법을 이용해 Graph를 그려 파악한다.

그리기 쉬운 그래프로 분리하자!

주어진 방정식을 (　)$=0$꼴에서 한 함수의 그래프와 x축의 관계로 다룰 것인지 (　)$=$(　)꼴에서 두 함수의 그래프의 관계로 다룰 것인지의 선택이 중요하다.

(1) 상수에 미지수가 1개 있는 경우

미지수와 상수를 모두 (우변)으로 넘긴 다음, 두 그래프의 교점의 개수로 근의 개수를 판별한다.

$f(x)-k=0$ 의 근의 판별

$\Rightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=k \end{cases}$: $y=f(x)$그래프를 그린 다음,

$y=k$를 움직여가며 교점의 개수를 판단.

(2) 일차항에 미지수가 있는 경우

일차항을 우변으로 넘긴 다음, 기울기의 변화로 교점개수를 판단한다.

$f(x)-kx=0$의 근 판별

$\Rightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=kx \end{cases}$: ① $y=f(x)$의 그래프를 그린 다음,

$y=kx$의 기울기를 움직여가며 교점의 개수를 판단.

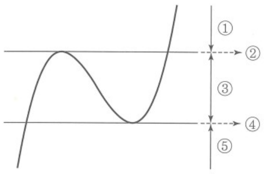
② $f(x)$의 상수항이 없으면 양변 x로 나눠서 판단

※ 실근의 부호와 그래프 판단

① 양의 실근 ➡ 교점이 y축의 오른쪽에 있다.
② 음의 실근 ➡ 교점이 y축의 왼쪽에 있다.

84 삼차함수의 그래프의 실근개수

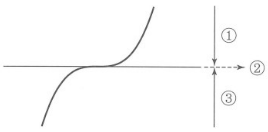
삼차함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 방정식 $f(x)=k$의 근은 직선 $y=k$의 위치에 따라 다음과 같이 판별할 수 있다.



①, ⑤ : 한 실근, 두 허근

②, ④ : 서로 다른 두 실근 (한 중근)

③ : 서로 다른 세 실근



①, ③ : 한 실근, 두 허근
② : 한 실근 (삼중근)

(극댓값) × (극솟값)의 부호 이용한 근의 판별법

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때, 삼차방정식
$f(x)=0$
에 대하여

① 서로 다른 세 실근을 갖는다.
$\Leftrightarrow$ (극댓값)$\times$(극솟값)<0

② 서로 다른 두 실근을 갖는다. (중근을 갖는다.)
$\Leftrightarrow$ (극댓값)$\times$(극솟값) $=0$

③ 한 실근과 두 허근을 갖는다.
$\Leftrightarrow$ (극댓값)$\times$(극솟값)>0

※ 미정계수를 포함한 삼차방정식의 해결 문제는 삼차방정식의 근의 판별보다는 삼차방정식을 $f(x)=k$와 같이 나누어 두 그래프
$y=f(x)$와 $y=k$
의 교점의 위치에 따른 문제 해결이 더 효과적이다.

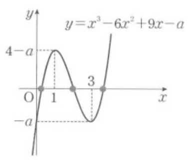
방정식 $x^3-6x^2+9x-a=0$이 서로 다른 세 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위를 정하여라.

[방법1] 삼차방정식의 근의 종류에 따른 판별

$f(x)=x^3-6x^2+9x-a$라고 하면 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값이 서로 다른 부호이어야 한다.

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

이므로
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.



x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$4-a$	↘	$-a$	↗

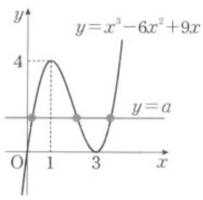
따라서 삼차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 조건인 $f(1)f(3)<0$에서

$$(4-a)(-a)<0 \quad \therefore\ 0<a<4$$

[방법2] 삼차방정식을 분리하여
두 그래프로 나누어 교점을 판별

방정식 $x^3-6x^2+9x-a=0$에서
$x^3-6x^2+9x=a$이므로

주어진 방정식의 실근의 개수는 $y=x^3-6x^2+9x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다.
$f(x)=x^3-6x^2+9x$라고 하면
$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

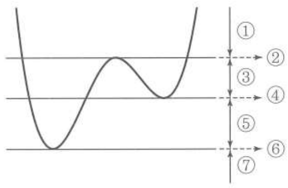


x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

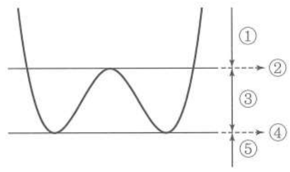
따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위는 $0<a<4$이다.

85 사차방정식 근의 판별

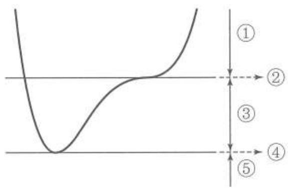
사차함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 방정식 $f(x)=k$의 근은 직선 $y=k$의 위치에 따라 다음과 같이 판별할 수 있다.



①, ⑤ : 서로 다른 두 실근, 두 허근
②, ④ : 서로 다른 세 실근 (한 중근)
③ : 서로 다른 네 실근
⑥ : 한 실근(중근), 두 허근
⑦ : 네 허근



① : 서로 다른 두 실근, 두 허근
② : 서로 다른 세 실근 (한 중근)
③ : 서로 다른 네 실근
④ : 서로 다른 두 실근 (두 중근)
⑤ : 네 허근



①, ③ : 서로 다른 두 실근, 두 허근
② : 서로 다른 두 실근 (한 삼중근)
④ : 한 실근(중근), 두 허근
⑤ : 네 허근

86 곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 개수

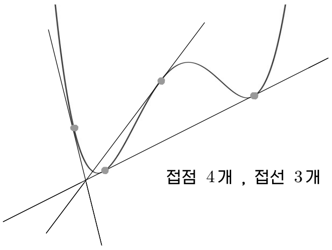
1. 곡선 밖의 한 점 (a, b)에서 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수를 판단할 때 기울기 함수를 이용한다

$$\frac{f(t)-b}{t-a}=f'(t)$$

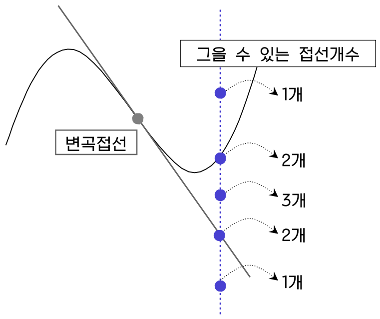
에서 $f(t)-b=f'(t)(t-a)$의

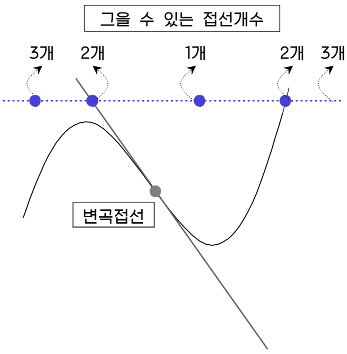
실근의 개수=접점의 개수

이때, 접점의 개수와 그을 수 있는 접선의 개수가 같지 않을 수도 있음에 주의한다.



2. 곡선 밖의 한 점에서 그을 수 있는 접선의 개수는 곡선과 변곡접선에 의해 영역이 결정된다.





87 부등식의 증명

어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq 0$이 성립하는 것을 증명할 때는 그 구간에서

(함수 $f(x)$의 최솟값) ≥ 0

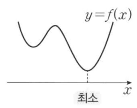
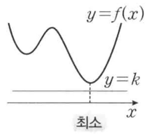
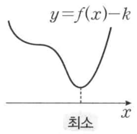
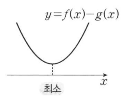
임을 보이면 된다. 또, 어떤 구간에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립하는 것을 증명할 때는

$h(x)=f(x)-g(x)$

로 놓고 주어진 구간에서

(함수 $h(x)$의 최솟값) ≥ 0

임을 보이면 된다.

	그래프	증명방법
$f(x) \geq 0$ 의 증명		($f(x)$의 최솟값) ≥ 0 임을 보인다.
$f(x) \geq k$ (k는 상수) 의 증명	 	[방법1] ($f(x)$의 최솟값) $\geq k$ 임을 보인다. [방법2] ($f(x)-k$의 최솟값) $\geq k$ 임을 보인다.
$f(x) \geq g(x)$ 의 증명		$\mathrm{F}(x)=f(x)-g(x)$ 로 놓고 ($\mathrm{F}(x)$의 최솟값) ≥ 0 임을 보인다.

$x \geq 0$일 때, 부등식 $2x^3>3x^2-2$가 성립함을 증명하여라.

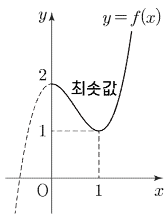
[해설] $f(x)=2x^3-(3x^2-2)=2x^3-3x^2+2$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[0, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고

그 그래프를 그리면 다음과 같다.



x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	2	↘	1	↗	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

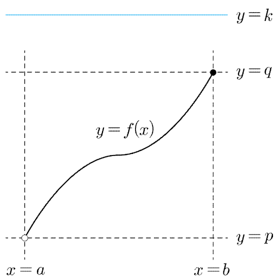
즉 함수 $f(x)$의 최솟값이 1이므로 $f(x)>0$

따라서 $x \geq 0$일 때, $2x^3>3x^2-2$가 성립한다.

참고 그래프를 이용하여 부등식의 성립 여부를 다룰 때는 ( ) ≥ 0꼴로 다루는 것이 일반적이지만 ( ) $\geq$ ( )꼴에서 한 함수의 그래프가 다른 함수의 그래프의 위쪽에 있음을 확인하는 것이 편리할 때도 있다.

주어진 구간에서 극값이 없는 경우

주어진 구간에서 증가 또는 감소하는 함수이다. 이때는 구간의 양끝에서 부등식의 등호판단이 중요하다.



구간 $(a, b]$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여

$f(x)>k$를 만족시키는 k의 범위는 $k \leq p$

$f(x) \geq k$를 만족시키는 k의 범위는 $k \leq p$

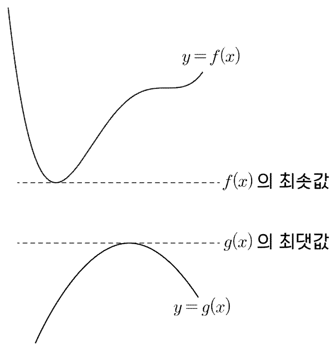
$f(x)<k$를 만족시키는 k의 범위는 $k<q$

$f(x) \leq k$를 만족시키는 k의 범위는 $k \leq q$

이다.

88 임의의 두 실수 에 대한 부등식

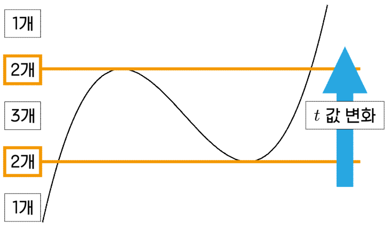
임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$가 성립하려면 $g(x)$의 어떠한 함숫값보다 $f(x)$의 함숫값이 크다는 조건이다. 따라서 $f(x)$의 최솟값이 $g(x)$의 최댓값보다 커야 한다.



89 방정식으로 정의된 함수

1. 방정식 $f(x)=t$ 실근 개수를 $g(t)$로 정의

방정식 $f(x)=t$ 실근 개수를 $g(t)$라할 때, $g(t)$는 $f(x)$의 극값에서 불연속이 발생할 수 있다.

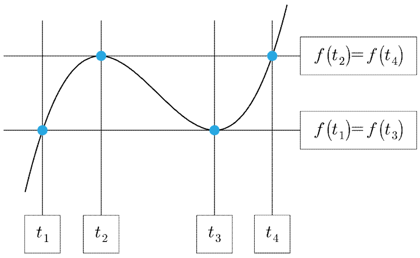


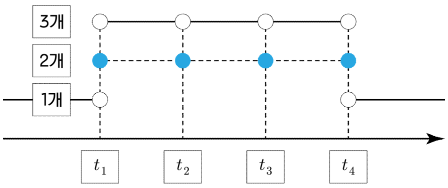
2. 방정식 $f(x)=f(t)$ 교점개수를 $g(t)$로 정의

2단계로 나눠서 생각해야한다.

① 주어진 t값은 x값이다. x값을 왼쪽부터 오른쪽으로 변화시키면서 정의된 함수를 파악하자.

② $f(t)$는 y값이다. t값의 변화에 따른 함숫값 $f(t)$를 x축에 평행한 선으로 그어서 교점의 개수를 파악한다.



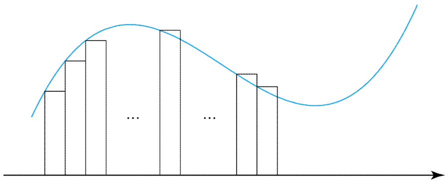


90 적분의 정의

적분은 분적이다.

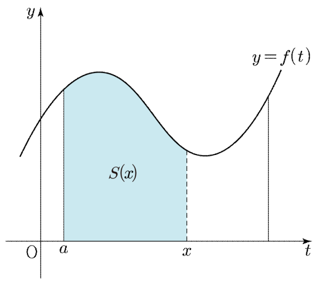
적분은 '원리적 측면'과 '계산적 측면'에서 정의된다. 현 교육과정에서는 계산적 측면의 적분을 강조하여 정의하고 있지만 원리적측면의 정의가 문제의 폭 넓은 이해를 가능하게 하므로 반드시 이해하고 넘어가야한다.

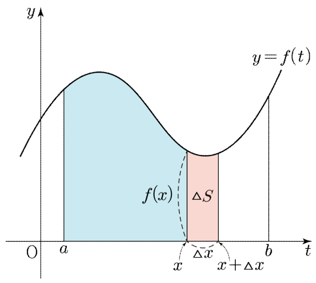
(1) 원리적 측면
구분구적법을 통한 계산 : 곡선으로 둘러싸인 넓이를 직사각형 넓이로 근사시켜 구한다.



따라서 적분은 '분적'이다. 직사각형으로 나눈 것을 더한다.

(2) 계산적 측면 : 미분의 역연산





함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(t)\geq 0$이라고 하자.
$y=f(t)$와 t축, $t=a$, $t=x(a\leq x\leq b)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 x에 관한 함수이므로 $S(x)$로 나타낼 수 있다.
$S(x)$의 순간변화율을 생각해 보면 x의 값이 $\Delta x(>0)$만큼 변할 때 넓이의 변화량은

$$\Delta S = S(x+\Delta x)-S(x)$$ 이다.

이때, Δx가 충분히 작으면 오른쪽 그림의 직사각형의 넓이 $f(x)\times\Delta x$와 ΔS가 거의 같다고 볼 수 있다.

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\times\Delta x}{\Delta x}=f(x)$$

즉, $S(x)$의 도함수는 $f(x)$이다.

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

$F'(x)=f(x)$일 때 $F(x)$는 $f(x)$의 부정적분

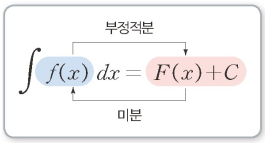
91 부정적분의 이해

부정적분은 '미역'이다.

함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉

$$F'(x)=f(x)$$

일 때, $F(x)$를 함수 $f(x)$의 부정적분 또는 원시함수라 하며 기호로 $\int f(x)dx$와 같이 나타낸다.



$\int f(x)dx = F(x)+C$ (C는 상수)이다.
이때 상수 C를 적분상수라고 한다.

또한, 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 하고 그 계산법을 적분법이라 한다.

92 적분과 미분의 관계

연산의 순서를 파악한다.

$F'(x)=f(x)$일 때, $\int f(x)dx = F(x)+C$ (단, C는 적분상수)

① $\int\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx = f(x)+C$
⇨ 먼저 미분하고 적분하면 (원래의 함수)+C

② $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$
⇨ 먼저 적분하고 미분하면 (원래의 함수)

따라서 $\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}\neq\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx$이다.

예시

① $\int\left(\frac{d}{dx}x^2\right)dx=\int 2xdx=x^2+C$ (단, C는 적분상수)

② $\frac{d}{dx}\left(\int x^2dx\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)=x^2$ (단, C는 적분상수)

93 부정적분 기본 공식

미분은 지수에 -1 , 적분은 지수에 +1

함수 $y=x^n$ 과 $y=k$의 부정적분

함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)과 함수 $y=k$ (k는 상수)의 부정적분은 다음과 같다.

① n이 양의 정수일 때, $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

(단, C는 적분상수)

② k가 상수일 때, $\int k dx = kx+C$ (단, C는 적분상수)

94 부정적분의 성질

함수 $f(x)$, $g(x)$가 부정적분을 가질 때,

① $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (단, c는 실수)

➡ 상수배의 부정적분

② $\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

➡ 합의 부정적분

③ $\int \{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

➡ 차의 부정적분

참고 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분의 증명

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 할 때, 즉, $\int f(x)dx = F(x)+C_1$, (C_1은 적분상수)

$\int g(x)dx = G(x)+C_2$ (C_2는 적분상수)이므로 다음을 알 수 있다.

① 실수 $k(k\neq 0)$에 대하여 $\{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$이므로

$\int kf(x)dx = kF(x)+C$ (C는 적분상수)……㉠

한편 $k\int f(x)dx = k\{F(x)+C_1\} = kF(x)+kC_1$……㉡

이고, ㉡의 우변의 kC_1은 임의의 상수이므로 $kC_1 = C$로 놓으면 ㉠와 ㉡은 같은 꼴이 된다.

따라서 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$가 성립한다.

② 미분법에서 $\{F(x)+G(x)\}' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$이므로

$\int \{f(x)+g(x)\}dx = F(x)+G(x)+C_2$ (단, C_2는 적분상수) ……㉢

이다.

한편 $\int f(x)dx + \int g(x)dx = \{F(x)+C_1\}+\{G(x)+C_2\}$
$= F(x)+G(x)+(C_1+C_2)$ ……㉣

이고, ㉣의 우변의 C_1+C_2는 임의의 상수이므로 $C_1+C_2=C_3$으로 놓으면 ㉢과 ㉣는 같은 꼴이 된다.

따라서 $\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$가 성립한다.

③ $f(x)-g(x) = f(x)+(-1)g(x)$이므로 ①과 ②로부터 다음이 성립한다.

$$\int \{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

주의해야 할 부정적분의 계산

$\int$에 관한 연산의 성질은 $\sum$에 관한 연산의 성질과 같다고 생각하면 된다. 상수가 곱해진 함수의 부정적분을 상수와 부정적분의 곱으로, 함수의 합차의 부정적분을 부정적분의 합, 차로 분리할 수 있다. 그러나 $\sum$에서와 마찬가지로 함수의 곱몫의 부정적분을 부정적분의 곱, 몫으로 분리할 수 없다는 것에 주의하자.

① 곱은 전개하여 적분한다.

$$\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

② 몫은 약분하여 적분한다. $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

부정적분 $\int (3x^2-6x+3)dx$를 구하여라. (단, C는 적분상수)

[해설] $\int (3x^2-6x+3)dx = \int 3x^2dx - \int 6xdx + \int 3dx$

$= 3\int x^2dx - 6\int xdx + 3\int dx$

$= 3\left(\frac{1}{2+1}x^3+C_1\right) - 6\left(\frac{1}{1+1}x^2+C_2\right) + 3(x+C_3)$

$= x^3-3x^2+3x+(3C_1-6C_2+3C_3)$

$= x^3-3x^2+3x+C$ (단, C는 적분상수)

⇦ $3C_1-6C_2+3C_3$를 C로 놓는다.

참고 $3C_1-6C_2+3C_3$은 일반적인 연산이 아닌 적분상수를 나타내므로 하나의 적분상수 C로 나타낼 수 있다.

즉, 적분상수가 여러 개 있을 때는 이들을 연산한 결과도 상수이므로 하나의 적분상수로 나타낸다.

95 정적분 기본정리

무엇을 어디부터 어디까지

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 x의 값이

a에서 b까지 변할 때의 $F(x)$의 변화량 $F(b)-F(a)$를 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 이것을 기호

$$\int_a^b f(x)dx$$

로 나타낸다. 한편, $F(b)-F(a)$를 기호

$$\Big[F(x)\Big]_a^b$$

로 나타내면 다음식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

참고 정적분 $\int_a^b f(x)dx$에서 a를 아래끝, b를 위끝이라 하고, 이때 닫힌구간 $[a,\ b]$를 적분 구간이라고 한다.

정적분에서 적분상수는 생략

$\Big[F(x)+C\Big]_a^b = \{F(b)+C\}-\{F(a)+C\} = F(b)-F(a)$

이므로 정적분의 값을 구할 때는 부정적분의 적분상수를 생각하지 않아도 된다.

부정적분은 함수이자 식, 정적분은 상수이자 값이다.

정적분은 결과가 값으로 나오기 때문에 $\int_a^b f(x)dx$에서 x대신 다른 문자를 사용해도 그 값은 같다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy$$

그러나 부정적분은 함수를 나타내므로

$$\int f(x)dx \neq \int f(t)dt \neq \int f(s)ds$$

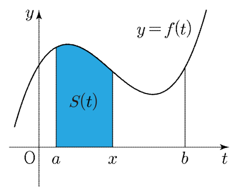
정적분을 대하는 자세

이전 교육과정에서는 정적분의 내용에 구분구적법, 정적분의 정의, 적분과 미분의 관계, 미적분의 기본정리로 이어지는 논리적인 흐름이 중점적으로 서술되어있으나, 현 교육과정은 생략이 많이 되었다.

따라서, 우리는 교과개념을 기본으로 삼되, 문제를 푸는 기술과 계산실력을 높이는데 집중해야한다.

96 정적분과 넓이 사이의 관계

일반적으로 구간 $[a,\ x]$에서 $f(t)\geq 0$이고 연속인 함수 $y=f(t)$의 그래프와 두 직선 $t=a$, $t=x$ 및 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(x)$라 하면 $S(x)$는 $f(x)$의 한 부정적분임이 알려져 있다. 따라서 $S(a)=0$이므로 $S(b)-S(a)$, 즉 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$이고 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 된다. 이처럼 정적분은 일반적인 곡선에 관한 넓이의 중요한 계산 도구이고 정적분의 넓이에서의 활용에서 자세히 다루게 된다.



정적분은 그 구간에서 연속인 함수에 대해서만 정의한다.

그 이유는 뒤에서 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$가 넓이임을 구체적으로 밝히면서 알 수 있게 된다.

$\int$, $\int_a^b$, $\int_a^x$ 등의 기호는 연속인 함수에 대해서만 사용할 수 있다는 것은 기본으로 알아 두자.

단, 문항에서 '적분가능'이라는 조건으로 연속성을 다루는 문제는 출제되지 않는다.

97 정적분의 성질

정적분은 '방향성'이 있다.

$a \geq b$일 때 $\int_a^b f(x)dx$

① $a=b$일 때, $\int_a^a f(x)dx = 0$

아래끝과 위끝이 같을 때

② $a>b$일 때, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

아래끝과 위끝이 서로 바뀔 때

함수 $f(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 하면

① $\int_a^a f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^a = F(a)-F(a)=0$

따라서 아래끝과 위끝이 같으면 정적분의 값은 0이다.

② $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx = -\Big[F(x)\Big]_b^a$

$= -\{F(a)-F(b)\} = F(b)-F(a)$

따라서 a, b의 대소에 관계없이 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$는 항상 성립한다.

$\int_a^a f(x)dx$의 값은 넓이의 관점에서

dx = 밑변의 길이 = 0

때문에 넓이가 0이라고 생각할 수 있다.

$\int_a^b f(x)dx$와 $\int_b^a f(x)dx$의 부호가 반대인 것 역시 넓이의 관점으로 넓이에 부호를 바꾼다는 의미지만 정적분의 넓이에의 활용에서 자세히 다루도록 한다.

98 정적분의 성질 (2)

함수의 실수배 합, 차의 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때

① $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

➡ 실수배의 정적분

② $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

➡ 합의 정적분

③ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

➡ 차의 정적분

④ $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

➡ 분할된 구간 위에서의 정적분

②, ③에서 적분구간이 같으면 정적분 기호를 묶어 쓸 수도 있고, 떼어 쓸 수도 있다. ④의 성질은 a, b, c의 대소에 관계없이 성립하며 일반적으로 같은 함수를 적분할 때 쓰인다.

99 여러 가지 정적분

구간에 따라 다르게 정의된 함수의 정적분

닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $a<c<b$일 때,

$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \leq c) \\ h(x) & (x \geq c) \end{cases}$의 정적분

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b h(x)dx$

절댓값 기호를 포함한 함수 $y=|f(x)|$의 정적분

① 절댓값 기호 안의 식을 0으로 하는 x의 값을 경계로 적분 구간을 나눈다.
($f(x) \geq 0$일 때와 $f(x)<0$일 때)

② 정적분의 성질 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$를 이용하여 계산한다.

100 적분구간이 상수인 함수의 결정

$f(x) = g(x) + \int_a^b f(t)dt$ (a, b는 상수)일 때, 함수 $f(x)$의 식을 구하는 방법

① $\int_a^b f(t)dt = k$ (k는 상수)로 놓는다.

$f(x) = g(x)+k$ …… ㉠

② ㉠을 $\int_a^b f(t)dt = k$에 대입하면 $\int_a^b \{g(t)+k\}dt = k$를 풀어 상수 k의 값을 구한다.

③ 상수 k의 값을 ㉠에 대입하면 $f(x)$를 구한다.

101 적분으로 정의된 함수의 미분

무엇에 관한 적분, 무엇에 관한 함수?!

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(t)$가 $a<x<b$이면 $\int_a^x f(t)dt$는 x의 값에 따라 그 값이 하나씩 정해지므로 x에 대한 함수이다. 이때 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$

이므로 이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\} = F'(x) - 0 = f(x)$

(단, $F(a)$는 상수)이다.

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

⇨ $f(t)$의 t대신에 x를 대입한다.

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$는 상수 a의 값과 적분변수에 관계없이 항상 $f(x)$이다.

참고 $\int_a^x f(t)dt$는 x에 대한 함수이고, x에 대하여 미분하면 $f(x)$이므로 $\int_a^x f(t)dt$는 $f(x)$의 한 부정적분이다.

따라서 $\int_a^x f(t)dt$는 $f(t)$의 a에서 x까지의 정적분이라고 해도 되고 $f(x)$의 부정적분이라고 해도 된다.

102 적분과 미분의 관계

① $\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt = -f(x)$

② $\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt = f(x+a) - f(x)$

$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt = \frac{d}{dx}\{F(a)-F(x)\} = 0 - F'(x) = -f(x)$

$\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt = \frac{d}{dx}\{F(x+a) - F(x)\}$

$= F'(x+a)\cdot(x+a)' - F'(x)$

$= f(x+a) - f(x)$

103 $\int_a^x f(t)dt$를 포함한 항등식

항등식은 대입, 미분, 적분이 자유롭다고 알려져 있다. 따라서 $\int_a^x f(t)dt$를 포함한 항등식은 다음과 같이 다룬다.

① 항등식의 양변을 x에 대하여 미분한다.
② 항등식의 양변에 $x=a$를 대입한다.

항등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\int_a^x f(t)dt$가 $f(x)$로 바뀐 새로운 항등식이 얻어지고, 항등식의 양변에 $x=a$를 대입하면 $\int_a^a f(t)dt = 0$임을 이용하여 미지수의 값 등을 구할 수 있다.

경우에 따라 항등식의 양변의 x에 a가 아닌 다른 값을 대입해볼 수도 있다.

104 적분구간과 피적분함수에 변수가 있는 정적분을 포함한 등식

$\int_a^x f(t)dt = g(x)$와 같이 적분구간에만 변수 x가 있는 경우

① 양변을 x에 대하여 미분한다. ➡ $f(x) = g'(x)$

② 양변에 $x=a$를 대입한다. ➡ $g(a) = 0$

$\int_a^x (x-t)f(t)dt = g(x)$와 같이 적분구간과 피적분함수에 모두 변수 x가 있는 경우

① 좌변을 전개한다.

$\int_a^x (x-t)f(t)dt = x\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$

⇨ x는 상수 취급한다.

② $x\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$ 를 $g(x)$라 하고

양변을 x에 대하여 미분하면

$(x)'\int_a^x f(t)dt + x\left(\int_a^x f(t)dt\right)' - \left(\int_a^x tf(t)dt\right)' = g'(x)$

$\int_a^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = g'(x)$

$\therefore \int_a^x f(t)dt = g'(x)$

③ $\int_a^x f(t)dt = g'(x)$를 조건에 맞게 변형한다.

변수 분리

$\int_a^x (x-t)f(t)dt$ 는 x에 대한 함수이지만 피적분함수는 t에 대한 함수이므로 x를 상수 취급하여 분리해서 다룬다.
또한 $\int_a^x (x-t)f(t)dt$ 는 시험에 자주 출제되는 요소이기 때문에 암기해 두도록 한다.

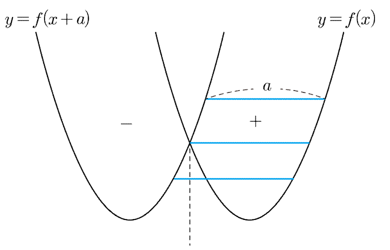
$$\frac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f(t)dt = \int_a^x f(t)dt$$

모든 실수 x에 대하여 다항함수 $f(x)$가
$\int_2^x (x-t)f(t)dt = x^3-2x^2$을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 구하여라.

[해설] 주어진 식의 좌변을 전개하면
$\int_2^x (x-t)f(t)dt = x\int_2^x f(t)dt - \int_2^x tf(t)dt = x^3-2x^2$이므로
양변을 x에 대하여 미분하면
$\left(\frac{d}{dx}x\right)\int_2^x f(t)dt + x\left\{\frac{d}{dx}\int_2^x f(t)dt\right\} - \frac{d}{dx}\int_2^x tf(t)dt = \frac{d}{dx}($
$\int_2^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2-4x$
$\therefore \int_2^x f(t)dt = 3x^2-4x \quad \cdots\cdots ㉠$
또, ㉠의 양변을 다시 x에 대하여 미분하면
$f(x) = \frac{d}{dx}\int_2^x f(t)dt = 6x-4$

평행이동 관계인 두 함수차

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt = f(x+a)-f(x)$$



$f(x+a)-f(x)$ 의 부호를 보고 $\int_x^{x+a} f(t)dt$ 의 극대극소를 정하자.

105 $\int_a^x f(t)dt$ 를 포함한 함수의 극한

정적분으로 표시된 함수의 극한값 $\left(\lim + \int\right)$

정적분과 미분계수의 정의를 이용하면 정적분으로 표시된 함수의 극한값은 다음과 같다.

① $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = f(a)$

② $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt = f(a)$

[증명] 정적분으로 정의된 함수의 극한이 $\frac{0}{0}$ 꼴의 경우에는 미분계수의 정의를 이용하여 구한다.

$$F'(a) = \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \lim_{k\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

를 이용하여 계산한다.

함수 $F'(x)=f(x)$라 할 때, 정적분과 미분계수의 정의에 의하여

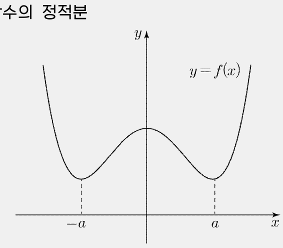
① $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}$
$= \lim_{x\to a}\frac{[F(t)]_a^x}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$
$= F'(a) = f(a)$

② $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{a+h} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[F(t)]_a^{a+k}}{h}$
$= \lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$
$= F'(a) = f(a)$

106 우함수와 기함수의 정적분

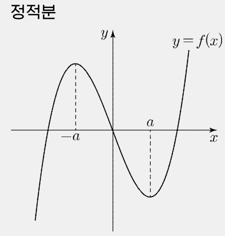
함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

① 우함수의 정적분



$f(-x) = f(x)$를 만족시킬 때
$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

② 기함수의 정적분



$f(-x) = -f(x)$를 만족시킬 때
$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

짝수차항으로만 구성된 다항함수(상수는 짝수차)
$\Rightarrow f(x) = ax^4+bx^2+c$

홀수차 항으로만 구성된 다항함수(상수는 짝수차)
$\Rightarrow f(x) = ax^3+bx$

빈출함수

$g(x) = f(x)+f(-x)$ 는 $g(x)$는 우함수

$f(x)$ 다항함수라면 $g(x)$는 홀수차항은 사라지고 짝수차항의 계수만 2배가 된다.
$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ 라면, $g(x) = 2bx^2+2d$

$g(x) = f(x)-f(-x)$이면 $g(x)$는 기함수

$f(x)$ 다항함수라면 $g(x)$는 짝수차항은 사라지고 홀수차항의 계수만 2배가 된다.
$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ 라면, $g(x) = 2ax^3+2cx$

대칭성을 이용한 정적분의 계산

$\int_{-a}^a f(x)dx$와 같이 적분 구간이 $[-a,\ a]$인 정적분은 $f(x)$가 우함수인지 기함수인지 항상 체크해야 한다!

일반적으로 정적분을 다룰 때 함수에 특별한 성질이 있는지 점검하는 것은 매우 중요한 습관이다.

우함수와 기함수의 연산에 대한 대칭

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)\pm g(x)$	$f(x)g(x)$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$(f\circ g)(x)$
우	우	우	우	우	우
우	기		기	기	우
기	우		기	기	우
기	기	기	우	우	기

우함수를 x^2, 기함수를 x^3이라 생각하고 계산해보면 결과를 쉽게 알 수 있다.

107 우함수와 기함수의 미분과 적분

우함수와 기함수를 미분하고 적분한 결과는 다음과 같다.

$F(x)$ 기함수	미분 → Yes	$f(x)$ 우함수	미분 → Yes	$f'(x)$ 기함수
$F(x)$ 기함수	적분 ← NO	$f(x)$ 우함수	적분 ← Yes	$f'(x)$ 기함수

우함수의 부정적분은 기함수가 아니다.
기함수의 부정적분은 우함수이지만 우함수의 부정적분은 기함수라고 단정 지을 수 없다.

예를 들어, 우함 수 $f'(x) = 3x^2$의 부정적분은 $f(x) = x^3+C$이다. 이때 적분상수는 $C(C\neq 0)$는 $y=C$인 우함수의 성분이므로 $f(x) = x^3+C$가 기함수라 할 수 없다. 이를 그래프에서 살펴보면 기함수의 그래프를 y축의 방향으로 C만큼 평행이동한 것이므로 점 $(0,\ C)$에 대하여 대칭이다.

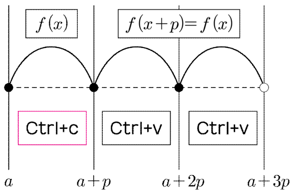
108 주기성과 대칭성 총정리

1. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)$자체가 다음 등식이 성립할 때

① $f(x+p)=f(x)$ ⇨ 독해 : $f(x)$는 주기가 p인 함수

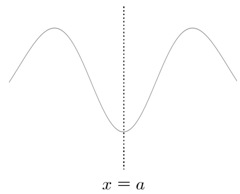
(정확히는 주기가 $\frac{p}{n}$ 이다.)

$f(x-p)=f(x+p)$ ⇨ 독해 : $f(x)$는 주기 $2p$인 함수

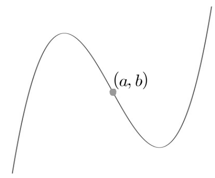


② $f(a-x)=f(a+x)$ ⇨ 독해 : $f(x)$는 $x=a$선대칭 함수

$f(2a-x)=f(x)$ ⇨ 독해 : $f(x)$는 $x=a$선대칭 함수



③ $f(2a-x)+f(x)=2b$ ⇨ 독해 : $f(x)$는 (a, b)점대칭 함수



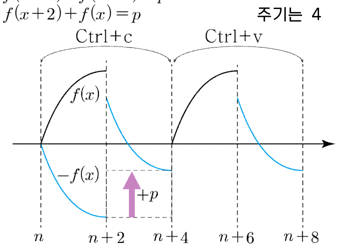
④ $f(x+a)+f(x)=b$ ⇨ 독해 : $f(x)$는 주기 $2a$인 함수

$f(x+2)+f(x)=p$를 만족하는 함수의 그래프

1) $f(x+2)=-f(x)+p$

2) $f(x+4)+f(x+2)=p$ $\quad \therefore f(x+4)=f(x)$

$f(x+2)+f(x)=p$ $\quad$ 주기는 4



2. 헷갈리지 말자! 아래의 표현은 두 함수의 관계이다.

① $y=f(x)$와 $y=f(x+p)$

주기함수가 아니라 그냥 평행이동 관계의 두 함수야!

② $y=f(a-x)$와 $y=f(a+x)$

주의주의 $x=a$선대칭 아니다! 두 함수는 y축 대칭

③ $y=f(2a-x)$와 $y=f(x)$

두 함수가 $x=a$선대칭 관계이다.

3. 대칭 + 대칭 → 대칭 + 주기

대칭조건이 2개 나오면 대칭과 주기로 바꿀 수 있는지 확인한다.

$f(x)=f(-x)$, $f(x)=f(4-x)$

⇨ $f(x)=f(-x)$이므로 $f(4-x)=f(x-4)$

따라서 $f(x)=f(x-4)$

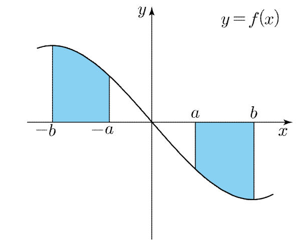
최종적으로 $f(x)=f(-x)$ & $f(x)=f(x-4)$

109 적분구간이 대칭성 활용

두 실수 a, b $(a<b)$와 연속함수 $f(x)$에 대하여

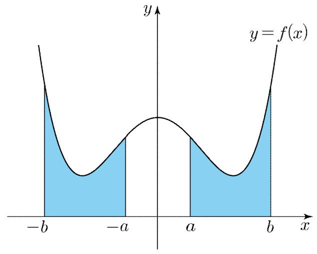
① $\int_{-b}^{-a} f(x)dx+\int_{a}^{b} f(x)dx=0$을 만족할 때

➡ $y=f(x)$의 그래프는 기함수



② $\int_{-a}^{-b} f(x)dx+\int_{a}^{b} f(x)dx=0$을 만족할 때

➡ $y=f(x)$의 그래프는 우함수



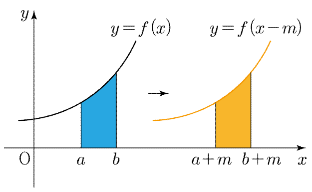
110 그래프이 이동과 적분

함수 $y=f(x)$의 그래프와 적분 구간을 함께 평행이동 또는 대칭이동하면 다음의 관계가 성립한다.

① $\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a+m}^{b+m} f(x-m)dx$

x축 방향으로 m만큼 평행이동

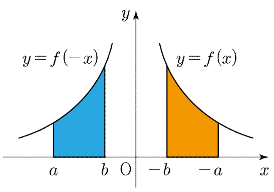
함수 $y=f(x)$의 그래프와 적분 구간 $[a,\ b]$를 x축의 방향으로 m만큼 함께 평행이동한 것이므로 $f(x)$의 식에 x 대신 $x-m$을 대입하고 적분 구간은 $[a+m,\ b+m]$으로 바꾼 것이다.



② $\int_{a}^{b} f(-x)dx=\int_{-b}^{-a} f(x)dx$

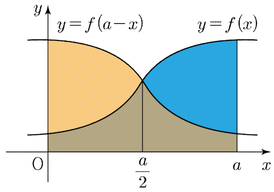
y축에 대해 대칭이동

함수 $y=f(-x)$의 그래프와 적분 구간 $[a,\ b]$를 y축에 대하여 함께 대칭이동한 것이므로 $f(-x)$의 식에 x대신 $-x$를 대입하고 적분 구간은 $[-b,\ -a]$로 바꾼 것이다.



③ $\int_{0}^{a} f(a-x)dx=\int_{0}^{a} f(x)dx$: $x=\frac{a}{2}$에 대해 대칭이동

함수 $y=f(a-x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{a}{2}$에 대하여 대칭이므로 $[0,\ a]$에서 다음이 성립한다.



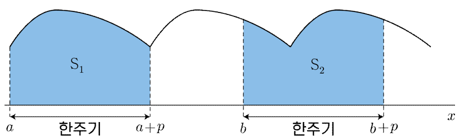
111 주기함수의 정적분

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$ $(p>0)$를 만족시킬 때

① 구간의 길이가 주기로 같으면 어디서 시작하든 정적분값이 같다.

$$\int_{a}^{a+p} f(x)dx=\int_{b}^{b+p} f(x)dx=\int_{c}^{c+p} f(x-m)dx ⇨$$

$S_1=S_2$



② 구간을 주기의 n배만큼 이동해도 정적분의 값은 서로 같다.

$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x)dx=\int_{a+np}^{b+np} f(x)dx$ (n은 정수)

③ 그래프를 주기의 n배만큼 평행이동해도 정적분 값은 서로 같다.

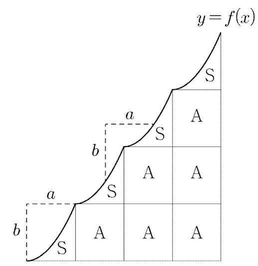
$\int_{a}^{b} f(x)dx=\int_{a}^{b} f(x-p)dx=\int_{a}^{b} f(x-np)dx$ (n은 정수)

④ 구간의 길이가 주기의 n배이면 한 주기 정적분 값의 n배

$\int_{a}^{a+np} f(x)dx=n\times\int_{b}^{b+p} f(x)dx$ (n은 자연수)

참고 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 상수 p의 값 중에서 최소의 양수를 함수 $f(x)$의 주기라 한다. 따라서 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 함수라 해서 반드시 주기가 p인 것은 아니다. 주기가 $\frac{p}{2}$인 함수도 $f(x+p)=f(x)$를 만족시킬 수 있으므로 $f(x+p)=f(x)$인 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{p}{n}$꼴로 나타낼 수 있다. (단, $p>0$, n은 어떤 자연수)

모든 실수에서 $f(x+a)=f(x)+b$를 만족시키는 함수 $f(x)$

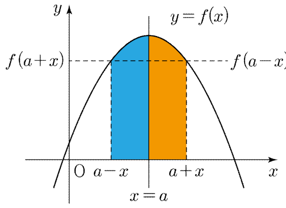


독해 : x값이 a만큼 증가할 때, y값은 b만큼 증가한다.

넓이는 곡선으로 둘러싸인 부분(S)과 직사각형 넓이(A)를 구분해서 더한다.

112 선대칭 함수의 적분

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $x=a$에 대하여 대칭인 함수

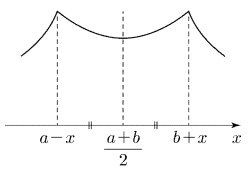


① $f(a+x)=f(a-x)$, $f(x)=f(2a-x)$

② $\int_{a-p}^{a} f(x)dx=\int_{a}^{a+p} f(x)dx$ (단, p는 상수이다.)

$f(\bigstar)=f(\triangle)$의 형태에서 $\bigstar+\triangle=$ (상수)
함수 안의 합이 상수로 일정하다면 대칭축은 합의 절반
즉, $x=\dfrac{\bigstar+\triangle}{2}$이다. 이를 일반화하면

$f(a-x)=f(b+x)$ ➡ $x=\dfrac{a+b}{2}$에 대칭.

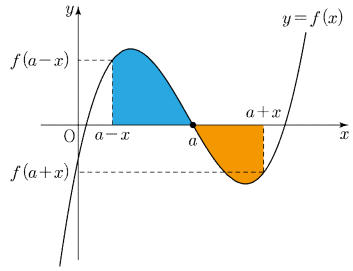


연속함수 $f(x)$가 모든 x에 대하여 $f(1+x)=f(1-x)$를 만족한다.
$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2$, $\int_{3}^{5}f(x)dx=5$일 때, $\int_{-3}^{3}f(x)dx$를 구하여라.

[해설] $f(1+x)=f(1-x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx=2,$$
$$\int_{3}^{5}f(x)dx=\int_{-3}^{-1}f(x)dx=5$$
$$\therefore \int_{-3}^{3}f(x)dx=\int_{-3}^{-1}f(x)dx+\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx$$
$$=5+2+2=9$$

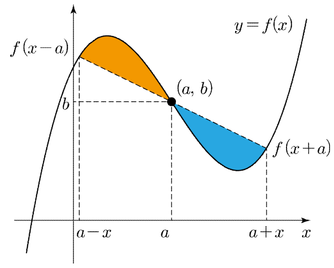
113 점대칭 함수의 적분



연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $(a,\ 0)$에 대한 대칭인 함수.

① $f(a+x)+f(a-x)=0$, $f(x)+f(2a-x)=0$

② $\int_{a-p}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{a+p} f(x)dx=0$ (단, p는 상수이다.)



연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $(a,\ b)$에 대한 대칭인 함수.

① $f(a+x)+f(a-x)=2b$, $f(x)+f(2a-x)=2b$

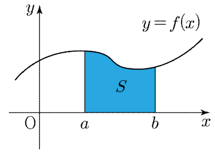
② $\int_{a-p}^{a+p} f(x)dx=2p\times b$: 직사각형 넓이로 구하자.
(단, p는 상수이다.)

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$f(x)+f(k-x)=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$
를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5}\int_{0}^{k}2f(x)dx$의 값을 구하여라.

[해설] 55
① $f(x)+f(k-x)=k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$는 $y=f(x)$가 점 $\left(\frac{k}{2},\ \frac{k}{2}\right)$에 대하여 점대칭함수
② 그래프를 그려보면 $\int_{0}^{k}f(x)dx$는 밑변의 길이가 k이고, 높이가 $\frac{k}{2}$인 직사각형의 넓이와 같다는 것을 알 수 있다.
$$\therefore \int_{0}^{k}f(x)dx=\frac{k}{2}\times k=\frac{k^2}{2} \Rightarrow 2\times\int_{0}^{k}f(x)dx=k^2$$

114 정적분과 넓이 사이의 관계

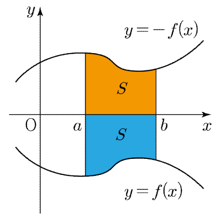
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)\ge 0$일 때, 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는



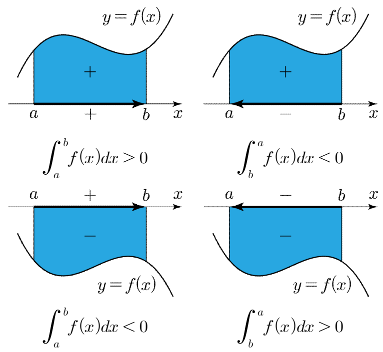
$$S=\int_{a}^{b}f(x)dx=F(b)-F(a)$$

$\int_{a}^{b}f(x)dx$는 x에서의 함숫값 $f(x)$를 세로의 길이, x의 증분 dx를 가로의 길이로 하는 직사각형의 넓이 $f(x)\times dx$를 a에서 b까지 더한다 $\left(\int_{a}^{b}\right)$는 의미의 기호이다. 이 때문에 정적분, 부정적분의 실수배, 합, 차에 관한 성질이 시그마의 성질과 같은 것이다.

정적분은 부호를 가진 넓이이다.
그림과 같이 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\le 0$인 함수 $f(x)$에 대하여 두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x)$가 각각 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S, S'이라 하면
$-f(x)\ge 0$이므로 $\int_{a}^{b}\{-f(x)\}dx=S'$이다.
따라서 $\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{a}^{b}\{-f(x)\}dx=-S'=-S$
이므로 $\int_{a}^{b}f(x)dx$의 값은 음수이고, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 절댓값이 같다는 것을 알 수 있다.



적분방향과 넓이
$\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx$이므로 a에서 b까지의 정적분과 b에서 a까지의 정적분의 부호가 반대이다.
따라서 함숫값의 부호와 함께 적분방향까지 고려하면
$a<b$이고 $f(x)\ge 0$일 때
$\int_{a}^{b}f(x)dx=+$(넓이), $\int_{b}^{a}f(x)dx=-$(넓이)
$a<b$이고 $f(x)\le 0$일 때
$\int_{a}^{b}f(x)dx=-$(넓이), $\int_{b}^{a}f(x)dx=+$(넓이)



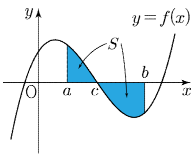
115 곡선과 x축 사이의 넓이

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 값이 양수인 경우와 음수인 경우가 모두 있을 때에는 $f(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 넓이를 구한다.
그림과 같이 닫힌구간 $[a,\ c]$에서 $f(x) \geq 0$이고, 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 $f(x) \leq 0$인 함수 $f(x)$가 있다. 이때 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면,

$$S_1 = \int_a^c f(x)dx,\ S_1 = \int_c^b \{-f(x)\}dx$$

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b \{-f(x)\}dx$$
$$= \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^b |f(x)|dx$$
$$= \int_a^b |f(x)|dx$$



곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$와 $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 다음과 같다.

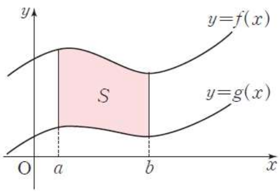
$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

참고 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x),\ g(x)$의 대소가 바뀔 때는 $f(x)-g(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 넓이를 구한다. 따라서 두 함수의 차의 절댓값의 정적분이 주어지면 두 함수의 그래프 사이의 넓이를 의미하는 것으로 이해할 수 있어야 한다.

116 두 곡선 사이의 넓이

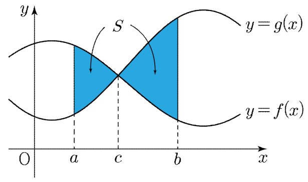
① 두 함수 $f(x),\ g(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$와 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구해보자. 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \geq g(x) \geq 0$일 때, 도형의 넓이 S는

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$
$$= \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

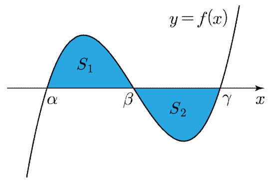


② 닫힌구간 $[a,\ c]$에서 $f(x) \geq g(x)$이고, 닫힌구간 $[c,\ b]$에서 $f(x) \leq g(x)$일 때, 도형의 넓이 S는

$$S = \int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx + \int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$= \int_a^c |f(x)-g(x)|dx + \int_c^b |f(x)-g(x)|dx$$
$$= \int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

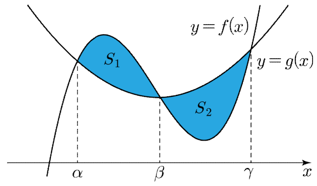


넓이가 같을 조건
두 부분의 넓이가 같다는 것은 다음과 같이 정적분의 값이 0이라는 것과 같다.



그림에서 $S_1 = S_2$이면 $\int_\alpha^\gamma f(x)dx = S_1 - S_2 = 0$

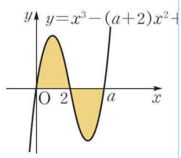
만약 $f(x)$가 삼차함수라면 β는 변곡점의 x좌표이다.



$S_1 = S_2$이면 $\int_\alpha^\gamma \{f(x)-g(x)\}dx = S_1 - S_2 = 0$

곡선 $y=x^3-(a+2)x^2+2ax$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a>2$)

[해설] 4
[방법1]
곡선 $y=x^3-(a+2)x^2+2ax$와 x축의 교점의 x좌표는
$y=x^3-(a+2)x^2+2ax=0$에서 $x(x-2)(x-a)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=a$
오른쪽 그림에서 색칠한 두 도형의 넓이가 서로 같으므로



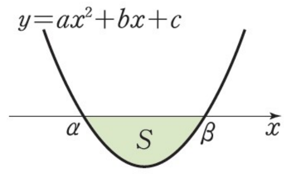
$$\int_0^a \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx = 0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2\right]_0^a = 0$$
$$\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}(a+2)a^3 + a^3 = 0,\quad -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 = 0$$
$$a^4 - 4a^3 = 0,\ a^3(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4(\because a>2)$$

[방법2] 곡선 $y=x^3-(a+2)x^2+2ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $y=x^3-(a+2)x^2+2ax=0$ 에서
$x(x-2)(x-a)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=a$
삼차함수가 x축과 서로 다른 세 점에서 만날 때, 두 곡선에 의하여 둘러싸인 부분의 넓이가 같으면 가운데 교점은 삼차함수의 변곡점이 되고, 그 점은 나머지 두 교점의 중점이 된다. 그러므로, $a=1$

117 이차함수와 넓이

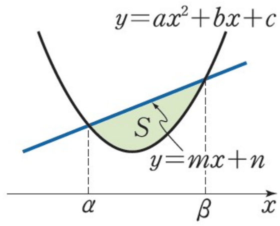
포물선으로 둘러싸인 부분의 넓이

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$에서 만날 때, 이 포물선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는



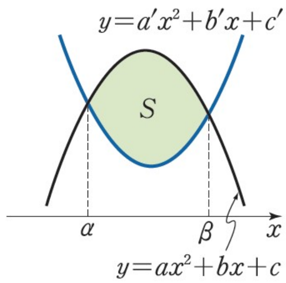
$$S = \int_\alpha^\beta |ax^2+bx+c|dx = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라고 하면 이차함수의 그래프와 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는



$$S = \int_\alpha^\beta |ax^2+bx+c-(mx+n)|dx = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

두 이차함수 $y=ax^2+bx+c,\ y=a'x^2+b'x+c'$ 의 그래프의 교점의 x좌표를 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라고 하면 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는



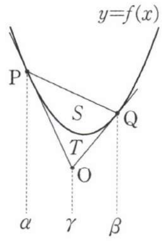
$$S = \int_\alpha^\beta |ax^2+bx+c-(a'x^2+b'x+c')|dx = \frac{|a-a'|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

118 이차함수 성질과 넓이

① 이차함수 $y=f(x)$밖의 점 O에서 그은 두 접선에 대한 접점을 P, Q라 하면 다음이 성립한다.

$S : T = 2 : 1$

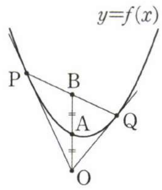
$\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$



※ T의 넓이는 이차함수의 넓이 공식의 절반이므로 $T=\left|\dfrac{a}{12}(\beta-\alpha)^3\right|$

② 이차함수 $y=f(x)$밖의 점 O에서 그은 두 접선에 대한 접점을 P, Q라 하고 선분 PQ의 중점을 B, 선분 OB와 곡선 $y=f(x)$의 교점을 A라 할 때, 다음이 성립한다.

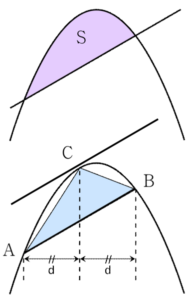
$\overline{\text{OA}} = \overline{\text{AB}}$



③ 아르키메데스의 넓이

오른쪽 그림과 같이 이차함수와 직선 l의 두 교점을 A, B, 직선 l과 평행한 이차함수의 접선의 접점을 C라고 할 때, 이차함수와 직선 l로 둘러싸인 도형의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\dfrac{4}{3}$배임이 알려져 있다.

이는 미적분에 등비급수를 이용해 증명이 가능하지만 수학2에서는 공식을 알아두기만 하는 것을 원칙으로 한다.

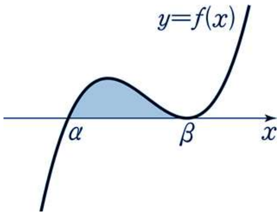


$\text{S}=\dfrac{4}{3}\times$ (삼각형 ABC의 넓이)

119 삼차함수와 접선으로 이루어진 넓이

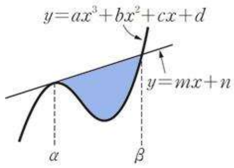
삼차곡선과 접선, 사차곡선과 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이

삼차함수 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는



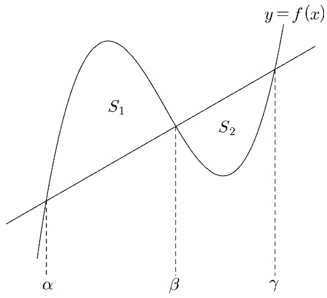
$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|dx = \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

삼차함수 $y=f(x)$와 접선 $y=mx+n$으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는



$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left|ax^3+bx^2+cx+d-(mx+n)\right|dx = \frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$$

3차함수로 만들어지는 둘러싸인 넓이



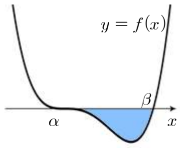
$$A=\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3\times\left(\gamma-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

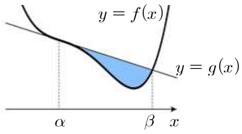
$$B=\frac{|a|}{6}(\gamma-\beta)^3\times\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)$$

120 사차함수와 접선으로 이루어진 넓이

삼차곡선과 접선, 사차곡선과 접선으로 둘러싸인 부분의 넓이

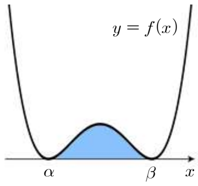
사차함수 $y=f(x)$와 x축 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

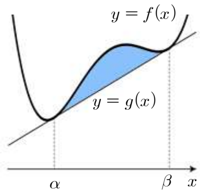




$$S=\frac{|a|}{20}(\beta-\alpha)^5$$

- 사차함수 $y=f(x)$ x축 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는



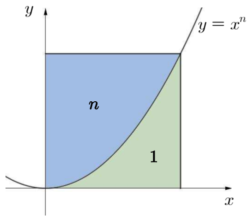


$$S=\frac{|a|}{30}(\beta-\alpha)^5$$

121 $n:1$ 공식

$y=x^n$의 꼭짓점으로 만들어진 직사각형의 넓이

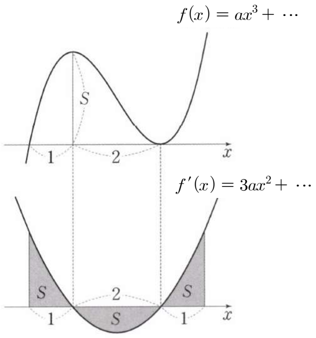
곡선 $y=x^n$위의 점 P에 대하여 x축, y축에 수선의 발을 내리면 직사각형이 만들어진다. 이 직사각형이 곡선으로 나뉜 두 넓이 중 큰 부분의 넓이와 작은 부분의 넓이비는 $n:1$이다.



활용은 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는데 쓰인다.

122 도함수의 넓이 = 원함수의 변화량

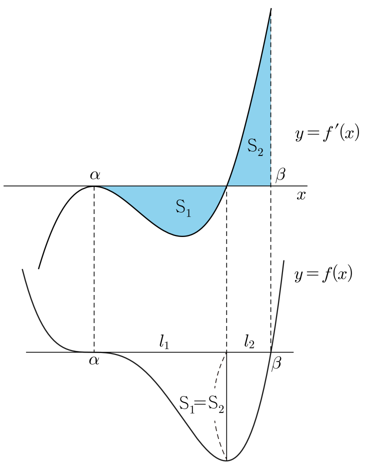
삼차함수의 극댓값과 극솟값의 차는 도함수인 이차함수와 x축 사이의 넓이를 이용하여 간편하게 구할 수 있다.



$$S=\frac{|3a|}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{|a|}{2}(\beta-\alpha)^3$$

$S=$ 극대극소의 차 = 도함수의 넓이

이차함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 같은 값을 갖는 부분의 밑변은 1:2:1의 관계를 갖는다.



사차함수의 극값의 차와 위치
사차함수의 극값의 위치가 3:1인 것도 마찬가지로 적용해 보면 삼차함수의 넓이 성질을 유도할 수 있다.

$l_1 : l_2 = 3:1$

$$S_1=S_2$$

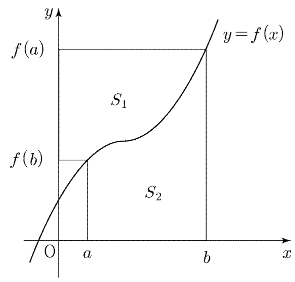
결국 '극값의 위치 공식'은 모두 '도함수에 대한 넓이 공식'으로 바꿀 수 있다.

123 역함수의 정적분

좌표평면에서 x축을 y축으로, y축을 x축으로 바꾸어 생각하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 곧 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 된다. 따라서 곡선 $y=f(x)$가 제1사분면의 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ $(0<a<b)$를 지나고 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 증가할 때, $f^{-1}(x)$의 $f(a)$에서 $f(b)$까지의 정적분은 곡선 $y=f^{-1}(x)$와 y축 및 두 직선 $y=f(a)$, $y=f(b)$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

Young의 정리

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$에 대하여 다음이 성립한다.



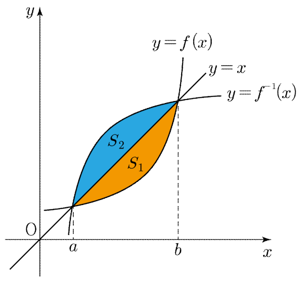
$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\,dx=bf(b)-af(a)$$

124 함수와 역함수로 둘러싸인 부분의 넓이

함수와 역함수로 둘러싸인 부분의 넓이

함수 $f(x)$와 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 직선 $y=x$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.

$$\mathrm{S}=\int_a^b\left|f(x)-f^{-1}(x)\right|dx=2\int_a^b\left|f(x)-x\right|dx$$



$$2\int_a^b|f(x)-x|\,dx$$

125 운동하는 물체의 물리량

(1) 벡터와 스칼라
① 스칼라 : 크기만을 갖는 물리량(거리, 속력, 시간, 무게, …)

② 벡터 : 크기와 방향을 갖는 물리량(위치, 속도, 가속도, …)
(∴ 수학에서는 직선운동만 다루므로, 방향이 곧 부호가 된다.)

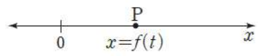
③ 이동거리: 시작점에서 도착점까지의 총 경과거리(거리의 변화량)

④ 변위: 시작점에서 도착점까지 일직선으로 연결했을 때, 그 직선의 길이(위치의 변화량)

126 속도와 가속도 (1)

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 점 P의 좌표 x로 나타내면 x는 t에 대한 함수이므로 $x=f(t)$와 같이 나타낼 수 있다.

이는 일차원적인 운동이므로 좌우운동 또는 상하운동 두 가지로만 설명할 수 있다.



수직선 위의 운동에서의 속도와 가속도

① 평균속도

시각이 t에서 $t+\Delta t$까지 변할 때, 점 P의 위치는 x에서 $x+\Delta x$까지 변한다고 하자.

이때 점 P의 평균속도는
$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$
이고, 이것은 함수 $f(t)$의 평균변화율과 같다.

② 속도(순간속도)와 속력

함수 $x=f(t)$의 시각 t에서의 순간변화율을 v라 하면
$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$
이다. 이때 v를 시각 t에서의 점 P의 속도(순간속도)라 한다. 또, 속도의 절댓값 $|v|$를 시각 t에서의 점 P의 속력이라 한다.
$|v|$ = 시각 t에서의 점 P의 속력

③ 가속도

점 P의 속도 v의 시각 t에서의 순간변화율을 a라 하면
$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$
이다. 이때 a를 시각 t에서의 점 P의 가속도라 한다.

참고 순간속도라는 표현은 잘 사용하지 않는다. 속도라고 하면 순간속도로 받아들여야 한다.

127 속도와 가속도 (2)

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가

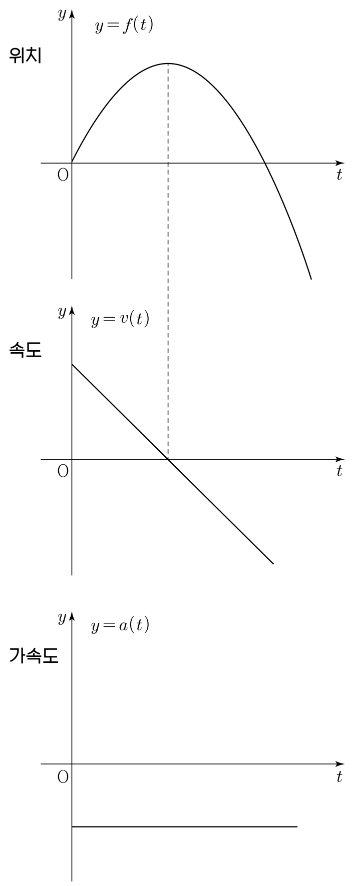
$x=f(t)$

일 때, 시각 t에서 점 P의 속도와 속력, 가속도는

① 속도 $v(t)=f'(t)$, 속력 $|v(t)|=|f'(t)|$

② 가속도 $a(t)=v'(t)$

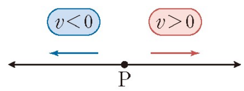
※ 위치의 그래프에서 접선의 기울기는 속도,
속도의 그래프에서 접선의 기울기는 가속도를 나타낸다.



128 속도의 부호와 운동방향

점 P의 속도의 부호를 다음과 같이 점 P의 운동 방향을 나타낸다.

속도의 부호와 운동 방향



❶ (속도) $>0 \iff$ 운동 방향은 양의 방향
(속도) $<0 \iff$ 운동 방향은 음의 방향

❷ 운동 방향이 반대로 바뀔 때, 속도는 0이다.

참고 속도의 함수의 위치는 함수의 도함수이므로 위치가 증가하면, 즉 운동 방향이 양의 방향이면 속도의 함수의 부호는 양이고, 위치가 감소하면, 즉 운동 방향이 음의 방향이면 속도의 함수의 부호는 음이다. 미분 단원에서는 속도의 함수의 부호에 따른 위치의 함수의 증가와 감소, 즉 운동 방향에 대해서만 다루고 적분 단원에서 위치, 움직인 거리 등에 대해 자세히 다루게 된다.

속도, 가속도의 상황표현

① 위치 $x=0$일 때 조건
(1) 상하운동에서 땅에 떨어질 때
(2) 좌우운동에서 원래 위치로 돌아올 때

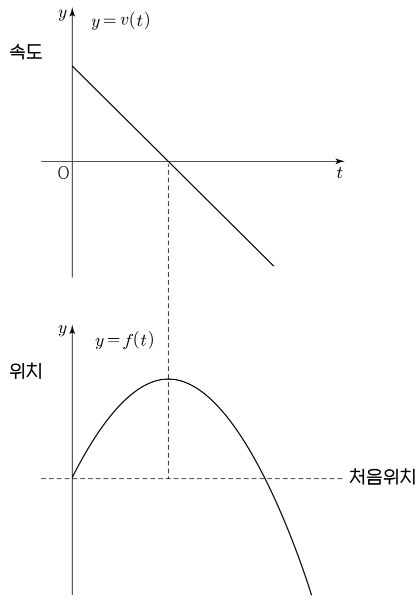
② 속도 $v=0$일 때 조건
(1) 상하운동에서 최고 높이에 도달할 때
(2) 좌우운동에서 운동방향을 바꿀 때
(3) 운동이 정지할 때

129 속도와 위치

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$와 시각 t_0에서의 점 P의 위치 $x_0=f(t_0)$이 주어졌을 때,
시각 t에서의 점 P의 위치를 $x=f(t)$라 하면
$f'(t)=v(t)$에서 $f(t)$는 $v(t)$의 한 부정적분이므로

$$\int_{t_0}^{t} v(t)dt=f(t)-f(t_0)=x-x_0$$

이다.



시각 t에서의 점 P의 위치 $x=f(t)$는

$$x=f(t)=x_0+\int_0^t v(t)dt$$

원점에서 출발하는 경우 시각 t에서의 위치는

$x=\int_0^t v(t)dt$ 이다. $(x_0=0)$

또한, 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt$$

(시각 $t=b$에서의 위치) $-$ (시각 $t=a$에서의 위치)
이다.

130 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때,

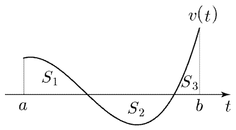
시각 $t=a$에서 $t=b$까지 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v(t)|dt$$

경과거리 : 점 P가 움직인 거리의 총합. (넓이의 합)

참고 위치의 변화량은 단순히 물체의 위치가 변화한 양을 뜻하는 것으로 속도를 적분하여 구하고, 움직인 거리는 운동방향에 관계없이 실제로 움직인 거리의 총합을 뜻하는 것으로 속도의 절댓값을 적분하여 구한다.

속도 그래프의 이해



수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t일 때의 속도를 $v(t)$, 시각 $t=a$일 때의 위치를 x_0이라고 할 때, $v(t)$의 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 점 P가 움직인 거리이다. $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직일 때

① 위치의 변화량은 $S_1-S_2+S_3$

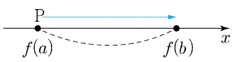
② 위치는 $x_0+S_1-S_2+S_3$

③ 움직인 거리는 $S_1+S_2+S_3$

시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s를 구해보자.

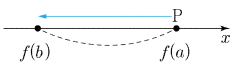
(i) $v(t)>0$일 때, 점 P가 수직선 위를 양의 방향으로 움직이므로 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt$$



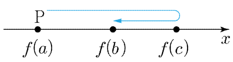
(ii) $v(t)<0$일 때, 점 P가 수직선 위를 음의 방향으로 움직이므로 시각
$t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s=f(a)-f(b)=\int_b^a v(t)dt=-\int_a^b v(t)dt$$



(iii) 시각 $t=a$에서 $t=c$까지 $v(t)>0$이고,
시각 $t=c$에서 $t=b$까지 $v(t)<0$일 때,
시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$\begin{aligned}s=f(c)-f(a)+f(c)-f(b)&=\int_a^c v(t)dt+\int_b^c v(t)dt\\&=\int_a^c v(t)dt+\int_c^b \{-v(t)\}dt\\&=\int_a^b |v(t)|dt\end{aligned}$$



(i)~(iii)에 의하여 시각 $t=a$에서 $t=b$까지

점 P가 움직인 거리 s는 $s=\int_a^b |v(t)|dt$