약점보완 테스트 4회

학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

1. 연립방정식 $\begin{cases} xy+yz=-5 \\ yz+zx=1 \\ zx+xy=2 \end{cases}$를 만족하는 실수 x, y, z의 값을 각각 $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=\gamma$라 할 때, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$의 값은?

① $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\frac{7\sqrt{6}}{6}$
④ $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{6}}{6}$

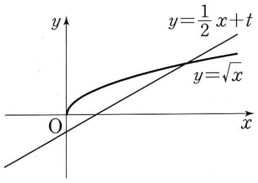
2. $\frac{2^{33}-2^{32}-2^{3}+2^{2}}{2^{21}+2^{11}+2}$ 을 간단히 할 때, 각 자리의 숫자의 합을 구하시오.

3. 두 함수 $f(x)=\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$, $g(x)=2\tan x+\sin x$와 미분가능한 두 함수 $h(x)$, $p(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(가) $(p \circ f)(x)=(h \circ g)(x)$
(나) $p'(1)=-9$

이때, $h'(0)$의 값을 구하시오. $\left(단, -\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

4. 그림과 같이 실수 t에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x}$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x+t$가 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자.
함수 $(t^2+at+b)f(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{3}$
④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

5. $\tan\theta=\sqrt{\frac{1-a}{a}}$ 일 때,
$\frac{\sin^2\theta}{a+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}+\frac{1-\cos^2\theta}{a+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)}$의 값을 구하여라.

(단, $0<a<1$)

정답 및 해설 [수학 II]

1) 정답. ⑤

주어진 세 식을 변끼리 더하면

$2(xy+yz+zx)=-2$

$\therefore\ xy+yz+zx=-1$

위의 식에서 주어진 식을 각각 빼 보면

$xy=-2,\ yz=-3,\ zx=4$

위의 세 식을 변끼리 곱하면

$(xyz)^2=24 \qquad \therefore\ xyz=\pm 2\sqrt{6}$

따라서 $x=\mp\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\ y=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ z=\mp\sqrt{6}$(복호동순)이므로

$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{6}=\dfrac{13\sqrt{6}}{6}$

2) 정답 12

$$\frac{2^{33}-2^{32}-2^3+2^2}{2^{21}+2^{11}+2}=\frac{2^{32}(2-1)-2^2(2-1)}{2(2^{20}+2^{10}+1)}=\frac{2^{31}-2}{2^{20}+2^{10}+1}$$

$$=\frac{2(2^{30}-1)}{2^{20}+2^{10}+1}=\frac{2(t^3-1)}{t^2+t+1}\ (2^{10}=t \text{ 라 하면})$$

$$=\frac{2(t-1)(t^2+t+1)}{t^2+t+1}=2(t-1)=2(2^{10}-1)=2046$$

∴ 각 자리의 숫자의 합은 $2+0+4+6=12$

3) **정답** 3

조건 (가)에서 $(p\circ f)(x)=(h\circ g)(x)$이므로

$p(f(x))=h(g(x))$

위의 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$p'(f(x))f'(x)=h'(g(x))g'(x)$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$p'(f(0))f'(0)=h'(g(0))g'(0) \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f(x)=\dfrac{\cos x}{\cos x+\sin x}$에서

$$f'(x)=\frac{-\sin x(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)^2}-\frac{\cos x(-\sin x+\cos x)}{(\cos x+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-1}{(\cos x+\sin x)^2}$$

$\therefore\ f(0)=\dfrac{1}{1+0}=1,\ f'(0)=\dfrac{-1}{1}=-1 \qquad \cdots\cdots ㉡$

$g(x)=2\tan x+\sin x$에서

$g'(x)=2\sec^2 x+\cos x$

$\therefore\ g(0)=0+0=0,\ g'(0)=2+1=3 \qquad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$p'(1)\times(-1)=h'(0)\times 3$

이때, 조건 (나)에서 $p'(1)=-9$이므로

$h'(0)=\dfrac{-p'(1)}{3}=\dfrac{-(-9)}{3}=3$ 답 3

서울대 선배들의 강추 문제 1등급 비법 노하우

합성함수의 미분법은 함수의 미분법에서 가장 기본이 되는 내용이다. 수능에서 출제되는 대부분의 미분 문제 해결 시 이용되므로 확실히 이해하고 있도록 하자.

$(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$는 $\dfrac{\Delta(f\circ g)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta f}{\Delta g}\times\dfrac{\Delta g}{\Delta x}$를 의미하는 것으로 x에 대한 $f\circ g$의 변화량은

(g에 대한 f의 변화량)×(x에 대한 g의 변화량)임을 기억하도록 하자.

이 문제에서는 $(p\circ f)(x)=(h\circ g)(x)$가 주어져 있으므로 합성함수의 미분법을 이용하면 쉽게 풀 수 있다.

4) **정답** ②

$\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}x+t$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$\dfrac{1}{4}x^2+(t-1)x+t^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

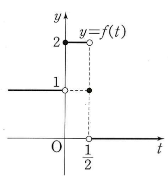
$D=(t-1)^2-4\times\dfrac{1}{4}\times t^2=0$

$-2t+1=0 \qquad \therefore\ t=\dfrac{1}{2}$

즉, 곡선 $y=\sqrt{x}$ 와 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+t$가 접할 때 실수 t의 값은 $\dfrac{1}{2}$ 이므로

$f(t)$는 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \left(t>\dfrac{1}{2}\right) \\ 1 & \left(t=\dfrac{1}{2}\right) \\ 2 & \left(0\le t<\dfrac{1}{2}\right) \\ 1 & (t<0) \end{cases}$$



$h(t)=(t^2+at+b)f(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $h(t)$가 $t=0,\ t=\dfrac{1}{2}$에서 연속이어야 한다.

(ⅰ) $t=0$에서 함수 $h(t)$가 연속이려면

$\lim\limits_{t\to 0}h(t)=h(0)$이어야 한다.

이때

$\lim\limits_{t\to+0}h(t)=\lim\limits_{t\to+0}(t^2+at+b)f(t)=2b,$

$\lim\limits_{t\to-0}h(t)=\lim\limits_{t\to-0}(t^2+at+b)f(t)=b,$

$h(0)=(0^2+a\times 0+b)f(0)=2b$

이므로

$2b=b$

$\therefore\ b=0$

(ii) $t=\frac{1}{2}$ 에서 함수 $h(t)$가 연속이려면

$\lim_{t\to\frac{1}{2}} h(t)=h\left(\frac{1}{2}\right)$이어야 한다.

이때

$\lim_{t\to\frac{1}{2}+0} h(t)=\lim_{t\to\frac{1}{2}+0}(t^2+at+b)f(t)=0$,

$\lim_{t\to\frac{1}{2}-0} h(t)=\lim_{t\to\frac{1}{2}-0}(t^2+at+b)f(t)=\frac{1}{2}+a+2b$,

$h\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+a\times\frac{1}{2}+b\right\}f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a+b$

이므로

$0=\frac{1}{2}+a+2b=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}a+b$

$\therefore\ a=-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서

$a+b=-\frac{1}{2}+0$

$=-\frac{1}{2}$

5) 정답: -2

• 개념을 이용한 풀이 •

$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-a}{a}=\frac{1}{a}-1$

$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{1}{a}$, $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{1}{a}$

$\therefore\ a=\cos^2\theta$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$, $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 에서 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

(주어진 식)

$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta}$

$=\frac{\sin^2\theta(\cos^2\theta+\cos\theta)+\sin^2\theta(\cos^2\theta-\cos\theta)}{\cos^4\theta-\cos^2\theta}$

$=\frac{2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta(\cos^2\theta-1)}=\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta-1}$

$=\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta-1}=-2$

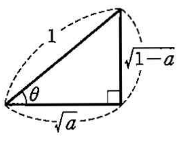
• 경험을 이용한 풀이 •

$\tan\theta=\sqrt{\frac{1-a}{a}}$ 이므로

오른쪽 그림에서

$\sin\theta=\sqrt{1-a}$, $\cos\theta=\sqrt{a}$

$\therefore$ (주어진 식)



$=\frac{\sin^2\theta}{a-\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{a+\cos\theta}$

$=\frac{1-a}{a-\sqrt{a}}+\frac{1-a}{a+\sqrt{a}}$

$=\frac{2a(1-a)}{a^2-a}=-2$