깨단수학 실력진단 테스트

약점보완 테스트 1회

학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

1. 세 실수 a, b, c가

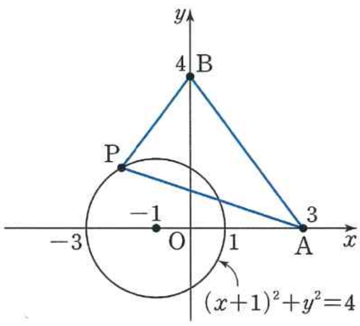
$a+b+c=\sqrt{15}$, $a^2+b^2+c^2=5$

를 만족시킬 때, abc의 값은?

① $\sqrt{15}$ ② $\frac{4\sqrt{15}}{9}$ ③ $\frac{4\sqrt{15}}{3}$

④ $\frac{5\sqrt{15}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{15}}{3}$

2. 그림과 같이 두 점 A$(3,\ 0)$, B$(0,\ 4)$와 원 $(x+1)^2+y^2=4$위의 점 P를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABP의 넓이를 S라고 하자.



S가 정수가 되도록 하는 점 P의 개수는?

① 14 ② 16 ③ 18

④ 20 ⑤ 22

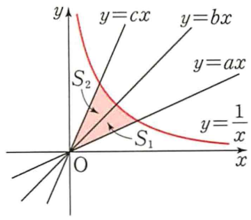
3. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 할 때,

$S_n : T_n = (3n-4) : (n+2)$

이다. 이때 $a_6 : b_6$을 가장 작은 자연수의 비로 나타내어라.

4. 함수 $f(x)=[x]^2+(ax+b)[x]$가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값의 합을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

5. 세 양수 a, b, c가 이 순서대로 공비가 무리수 e인 등비수열을 이루고 있다. 곡선 $y=\frac{1}{x}\,(x>0)$과 두 직선 $y=ax$, $y=bx$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=\frac{1}{x}\,(x>0)$과 두 직선 $y=bx$, $y=cx$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라고 할 때, S_1+3S_2의 값을 구하시오.



정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) **정답** ④

$a+b+c=\sqrt{15}$, $a^2+b^2+c^2=5$에서 $(a+b+c)^2=15$이므로

$(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=2(ab+bc+ca)=10$

즉, $ab-bc+ca=5$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

이므로 $a=b=c=\frac{\sqrt{15}}{3}$

따라서 $abc=\frac{\sqrt{15}}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{15\sqrt{15}}{27}=\frac{5\sqrt{15}}{9}$

2) **정답** ④

삼각형 ABP의 밑변의 길이를 $\overline{\mathrm{AB}}$, 높이를 h라고 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

원 $(x+1)^2+y^2=4$의 중점 $(-1,\ 0)$과 두 점 A, B를 지나는 직선 $4x+3y-12=0$사이의 거리 d는

$d=\frac{|4\times(-1)+3\times0-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{16}{5}$

이므로

$\frac{16}{5}-2\le h\le\frac{16}{5}+2$

$\frac{6}{5}\le h\le\frac{26}{5}$

따라서 $S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times h=\frac{5}{2}h$이므로 $3\le S\le 13$이다.

(i) $S=3$, 13일 때, 점 P의 개수는 각각 1이고

(ii) $S=4$, 5, 6, $\cdots$, 12일 때, 점 P의 개수는 각각 2이다.

따라서 구하는 점 P의 개수는 $2+2\times9=20$(개)이다.

3) [정답] 29 : 13

[전략] 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n=pn^2+qn$(p, q는 상수)의 꼴임을 이용한다.

[풀이] $S_n : T_n=(3n-4) : (n+2)$이므로

$S_n=kn(3n-4)$, $T_n=kn(n+2)$ $(k\ne0)$

로 놓을 수 있다. **[50%]**

$a_6=S_6-S_5$

$=k\cdot6(3\cdot6-4)-k\cdot5(3\cdot5-4)=29k$

$b_6=T_6-T_5$

$=k\cdot6(6+2)-k\cdot5(5+2)=13k$ **[40%]**

$\therefore\ a_6 : b_6=29k : 13k=29 : 13$ **[10%]**

4) **답** 5

풀이

함수 $[x]$는 x가 정수일 때, 연속이면 모든 실수에서 연속이 된다. 따라서 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이기 위해서는 $x=n$ (n은 정수)일 때 연속이면 된다.

$\lim_{x\to n+0}f(x)=\lim_{x\to n+0}\{[x]^2+(ax+b)[x]\}$

$=n^2+(an+b)n=(a+1)n^2+bn$

$\lim_{x\to n-0}f(x)=\lim_{x\to n-0}\{[x]^2+(ax+b)[x]\}$

$=(n-1)^2+(an+b)(n-1)$

$=(a+1)n^2+(b-a-2)n+1-b$

$x=n$에서 함수 $f(x)$가 연속이려면 $\lim_{x\to n+0}f(x)=\lim_{x\to n-0}f(x)$이어야 하므로

$(a+1)n^2+bn=(a+1)n^2+(b-a-2)n+1-b$

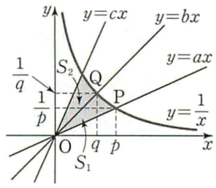
이 식이 n에 대한 항등식이므로

$b=b-a-2$, $1-b=0$

$\therefore a=-2$, $b=1$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+1^2=5$

5) **정답** 2



그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$과 두 직선 $y=ax$, $y=bx$의 교점을 각각 $\mathrm{P}\left(p,\ \frac{1}{p}\right)$, $\mathrm{Q}\left(q,\ \frac{1}{q}\right)$ $(0<q<p)$ 이라고 하자.

두 점 $\mathrm{P}\left(p,\ \frac{1}{p}\right)$, $\mathrm{Q}\left(q,\ \frac{1}{q}\right)$은 각각 두 직선 $y=ax$, $y=bx$ 위의 점이므로

$\frac{1}{p}=ap$, $\frac{1}{q}=bq$

$ap^2=1$, $bq^2=1$

$p=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $q=\frac{1}{\sqrt{b}}$

곡선 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$과 두 직선 $y=ax$, $y=bx$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은

$S_1=\int_0^q(bx-ax)dx+\int_q^p\left(\frac{1}{x}-ax\right)dx$

$=(b-a)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^q+\left[\ln x-\frac{1}{2}ax^2\right]_q^p$

$=\frac{q^2(b-a)}{2}+\left(\ln p-\frac{1}{2}ap^2\right)-\left(\ln q-\frac{1}{2}aq^2\right)$

$=-\frac{1}{2}aq^2+\frac{1}{2}bq^2+\ln\frac{p}{q}-\frac{1}{2}ap^2+\frac{1}{2}aq^2$

$=\frac{1}{2}(bq^2-ap^2)+\ln\frac{p}{q}$

$=\frac{1}{2}(1-1)+\ln\frac{p}{q}$

$=\ln\frac{p}{q}=\ln\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{b}}}=\ln\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$

마찬가지 방법으로 곡선 $y=\frac{1}{x}$ $(x>0)$과 두 직선 $y=bx$, $y=cx$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2는

$S_2=\frac{1}{2}\ln\frac{c}{b}$

이때 세 양수 a, b, c가 이 순서대로 공비가 무리수 e인 등비수열을 이루므로

$$\begin{aligned} S_1+3S_2 &= \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}+\frac{3}{2}\ln\frac{c}{b} \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{ae}{a}+\frac{3}{2}\ln\frac{be}{b} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2 \end{aligned}$$