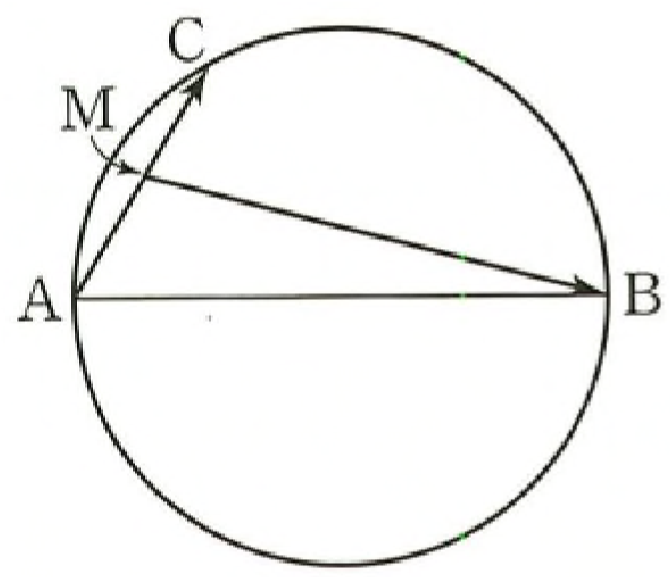
2024 EBS 수능특강 기하 5. 벡터의 내적, 직선과 원의 방정식

p.057 예제1 단순변형

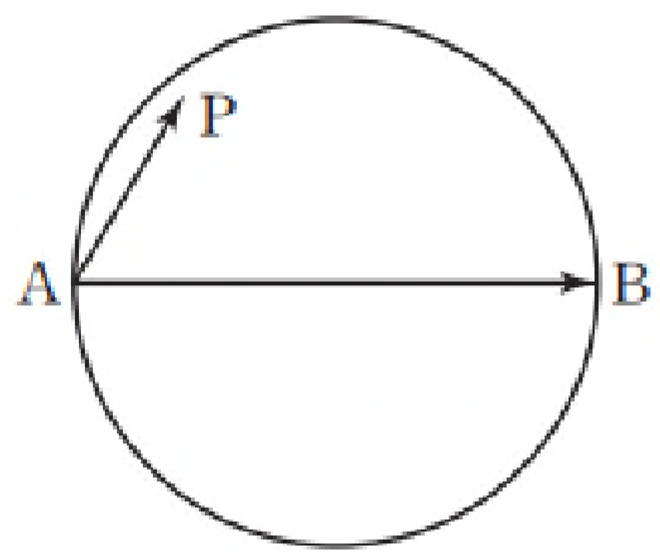
1. 그림과 같이 지름이 선분 AB인 원 위의 점 C에 대하여 $\overline{AC}=6$이다. 선분 AC의 중점을 M이라 할 때, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MB}$의 값은?[1)]



① -18 ② -9 ③ 0
④ 9 ⑤ 18

p.057 유제1 단순변형

2. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 또는 원의 내부의 점을 P라 할 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=4$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는?[2)]



① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

p.057 유제2 단순변형

3. 좌표평면 위의 두 점 $A(2,\ 3)$, $B(4,\ -1)$에 대하여 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$의 값은? (단, O는 원점이다.)[3)]

① -8 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 8

p.059 유제3 단순변형

4. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}+\vec{b}|=4$일 때, 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 크기는?[4)]

① $2\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{7}$ ③ $\sqrt{29}$
④ $\sqrt{30}$ ⑤ $\sqrt{31}$

p.059 유제4 단순변형

5. 두 벡터 $\vec{a}=\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$, $\vec{b}=\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?[5)]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

p.061 유제5 단순변형

6. 좌표평면에서 방향벡터가 $\vec{d}=(1,\ -2)$인 직선과 직선 $3x+4y=12$이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?[6)]

① $\frac{2\sqrt{5}}{25}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{25}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{25}$
④ $\frac{8\sqrt{5}}{25}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

p.061 유제6 단순변형

7. 좌표평면에서 법선벡터가 $\vec{n}=(2,\ 4)$인 직선과 직선 $y=kx+5$가 서로 수직일 때, 상수 k의 값은?[7)]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

p.063 유제7 단순변형

8. 좌표평면에서 벡터 $\vec{a}=(1,\ 2)$와 양의 상수 k에 대하여 벡터 $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가

$$|\vec{p}-\vec{a}|=k$$

를 만족시킨다. 점 P가 나타내는 도형과 방향벡터가 $\vec{d}=(3,\ 4)$인 직선이 점 $A(-3,\ l)$에서만 만날 때, $k+l$의 값은? (단, O는 원점이다.)[8)]

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

p.063 유제8 단순변형

9. 좌표평면 위의 세 점 $A(1,\ k)$, $B(3,\ 2)$, P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$라 하자.

$$\vec{p}\cdot\vec{p}-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형이 x축과 한 점에서 만날 때, k의 값은?(단, O는 원점이다.)[9]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

p.064 4번 단순변형

10. 평면 위의 세 점 O, A, B와 선분 AB의 중점 M이 $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=1$, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=4$을 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값은?[10]

① -3 ② $-\frac{11}{4}$ ③ $-\frac{5}{2}$
④ $-\frac{9}{4}$ ⑤ -2

p.065 6번 응용변형

11. 좌표평면에서 방향벡터가 $\vec{d}=(1,\ \sqrt{3})$인 직선과 두 점 A$(1,\ \sqrt{3})$, $B(2,\ 0)$을 지나는 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?[11]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

p.065 7번 응용변형

12. 좌표평면에서 원점을 지나고 방향벡터가 $\vec{d}=(1,\ 3)$인 직선 위를 움직이는 점을 P, x절편이 양수인 직선 l 위를 움직이는 점을 Q라 할 때, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은 $3\sqrt{10}$이다. 직선 l의 x절편은?[12]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

p.065 8번 단순변형

13. 좌표평면 위의 두 점 $A(6,\ 2\sqrt{7})$, P에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$라 하자.

$$|2\vec{p}-\vec{a}|=2$$

를 만족시키는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{OP}|$의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)[13]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

p.066 2번 단순변형

14. 좌표평면 위에 두 점 $A(1,\ 3)$, $B(2,\ 1)$이 있다. 네 점 O, A, B, C를 꼭짓점으로 하는 사각형이 선분 OC를 대각선으로 하는 평행사변형일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.)[14]

① $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ ② $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$
④ $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

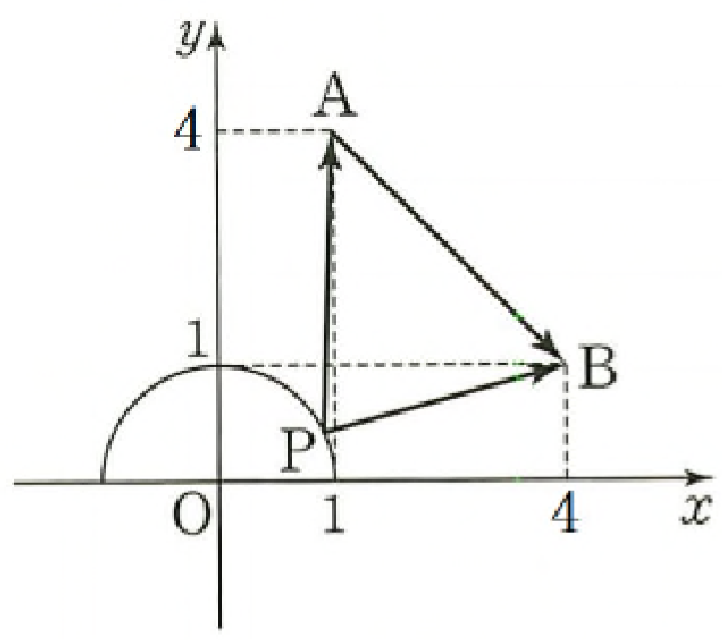
p.067 4번 단순변형

15. 법선벡터가 $\vec{n}=(3,\ 4)$인 직선 l 위를 움직이는 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{PQ}=12$이다. $|2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 값은 점 P가 점 P$'$일 때 최솟값 9를 갖는다. 직선 l의 x절편을 m $(m>0)$이라 할 때, $m+\overline{OP'}$의 값은? (단, O는 원점이다.)[15]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

p.067 5번 단순변형

16. 그림과 같이 두 점 A(1, 4), B(4, 1)과 반원의 호 $x^2+y^2=1$ $(y\ge0)$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값은?[16]



① $-36\sqrt{2}$ ② $-32\sqrt{2}$ ③ $-28\sqrt{2}$
④ $-24\sqrt{2}$ ⑤ $-20\sqrt{2}$

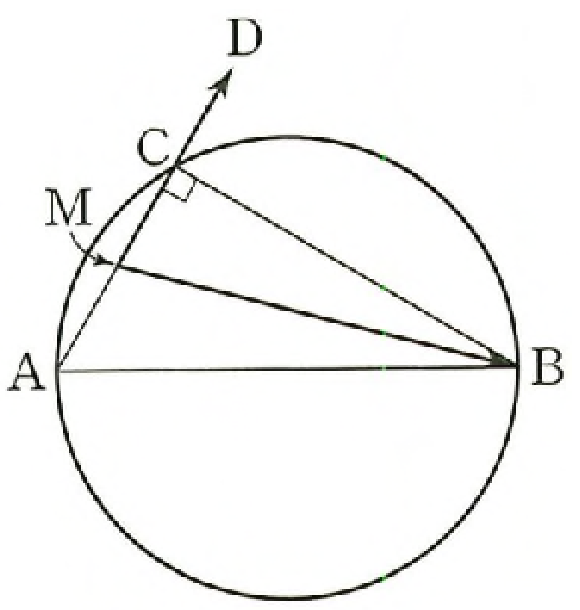
정답 및 해설

1	⑤	2	④	3	①	4	⑤	5	⑤
6	⑤	7	④	8	①	9	②	10	①
11	④	12	③	13	⑤	14	③	15	③
16	①	17	⑤	18	96	19	9	20	①
21	②	22	③	23	⑤	24	$\frac{\pi}{4}$	25	⑤
26	③	27	4	28	⑤	29	123	30	⑤

1) [정답] ⑤

[출제범위] 평면벡터의 내적

[해설]



선분 AB가 지름이므로 $\angle ACB=90°$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MD}$가 되도록 점 D를 잡으면 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MB}$가 이루는 각의 크기는 $\angle DMB$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MB}&=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{MB}|\cos(\angle DMB)\\&=|\overrightarrow{MD}||\overrightarrow{MB}|\cos(\angle DMB)\end{aligned}$$

이때 $\overline{MB}\cos(\angle DMB)=\overline{MC}$이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{MB}&=\overline{MD}\times\overline{MC}\\&=6\times3=18\end{aligned}$$

필수 개념

▶벡터의 내적

(1) 벡터의 내적

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때,

$$\begin{cases}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta & (0°\le\theta\le90°)\\ -|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180°-\theta) & (90°<\theta\le180°)\end{cases}$$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적이라고 하고, 이것을 기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$와 같이 나타낸다.

2) [정답] ④

[출제범위] 평면벡터의 내적

[해설]

두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=4$이므로

$|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta=4$

이때 $|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=4$이므로

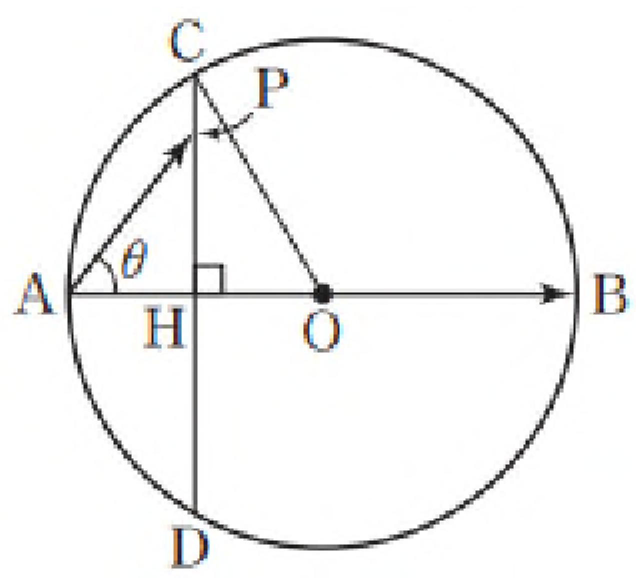
$4|\overrightarrow{AP}|\cos\theta=4$

$|\overrightarrow{AP}|\cos\theta=1$ …… ㉠

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AP}\cos\theta=\overline{AH}$

이므로 ㉠에서 $\overline{AH}=1$



따라서 점 H를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 원과 만나는 점을 각각 C, D라 하면 점 P가 나타내는 도형은 선분 CD이다. 원의 중심을 O라 하면

$\overline{OC}=\overline{OA}=3$

이때 $\overline{OH}=\overline{OA}-\overline{AH}=3-1=2$이므로

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{OH}^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

따라서 구하는 선분 CD의 길이는

$\overline{CD} = 2\overline{CH} = 2\sqrt{5}$

필수 개념

▶벡터의 내적

(1) 벡터의 내적

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때,

$$\begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta & (0° \le \theta \le 90°) \\ -|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180° - \theta) & (90° < \theta \le 180°) \end{cases}$$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적이라고 하고, 이것을 기호로 $\vec{a} \cdot \vec{b}$와 같이 나타낸다.

3) [정답] ①

[출제범위] 평면벡터의 내적

[해설]

$A(2,\ 3)$, $B(4,\ -1)$이므로

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$

$= (2,\ 3) \cdot \{(4,\ -1) - (2,\ 3)\}$

$= (2,\ 3) \cdot (2,\ -4)$

$= 2 \times 2 + 3 \times (-4)$

$= 4 - 12$

$= -8$

필수 개념

▶벡터의 내적

벡터의 성분과 내적

두 평면벡터 $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$에 대하여

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

4) [정답] ⑤

[출제범위] 내적의 성질

[해설]

$|\vec{a} + \vec{b}| = 4$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4^2$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 4^2$

$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$

이때 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$이므로

$4 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 = 16$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{3}{2}$

따라서

$|2\vec{a} + \vec{b}|^2 = (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$

$= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

$= 4 \times 2^2 + 4 \times \dfrac{3}{2} + 3^2 = 31$

이므로 $|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{31}$

필수 개념

▶벡터의 내적의 성질

(1) 세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

① $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (교환법칙)

② $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (분배법칙)

③ $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(2) 벡터의 크기와 내적

① $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

② $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$

④ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

5) [정답] ⑤

[출제범위] 내적의 성질

[해설]

$\vec{a} + \vec{b} = \left(2,\ \dfrac{3}{2}\right) + \left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right) = (1,\ 2)$

$\vec{a} - \vec{b} = \left(2,\ \dfrac{3}{2}\right) - \left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right) = (3,\ 1)$

이때 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ이므로

$$\cos\theta = \frac{(1,\ 2) \cdot (3,\ 1)}{\sqrt{1^2 + 2^2} \times \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1 \times 3 + 2 \times 1}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

필수 개념

▶ 두 평면벡터가 이루는 각의 크기

(1) 두 벡터가 이루는 각의 크기

평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0° \le \theta \le 180°)$일 때

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(2) 벡터의 성분과 두 벡터가 이루는 각의 크기

좌표평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기가 θ $(0° \le \theta \le 180°)$일 때

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}$$

6) [정답] ⑤

[출제범위] 직선의 방정식

[해설]

직선 $3x + 4y = 12$에서

$3x = -4y + 12$

$\frac{x}{4} = \frac{y-3}{-3}$

이므로 방향벡터를 $\vec{e}$라 하면

$\vec{e} = (4,\ -3)$

따라서 $\vec{d} = (1,\ -2)$, $\vec{e} = (4,\ -3)$이므로

$$\cos\theta = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{e}|}{|\vec{d}||\vec{e}|} = \frac{|(1,\ -2) \cdot (4,\ -3)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \times \sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{5} \times 5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

필수 개념

▶직선의 방정식(방향벡터가 주어질 때)

점 A를 지나고 방향벡터가 $\vec{d}$가 직선 l 위의 점 P라 하면 직선 l의 방정식은 다음과 같다.

① 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \ (t\text{는 실수})$$

② 두 점 A, P의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x,\ y)$라 하고 $\vec{d} = (a,\ b)$라 하면

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \ (\text{단, } ab \ne 0)$$

7) [정답] ④

[출제범위] 직선의 방정식

[해설]

직선 $y = kx + 5$에서 $kx - y + 5 = 0$

이 직선의 법선벡터를 $\vec{m}$이라 하면

$\vec{m} = (k,\ -1)$

법선벡터가 $\vec{n} = (2,\ 4)$인 직선과 이 직선이 서로 수직이므로 $\vec{n} \perp \vec{m}$

따라서

$\vec{n} \cdot \vec{m} = (2,\ 4) \cdot (k,\ -1) = 2k - 4 = 0$

이므로 $k = 2$

필수 개념

▶ 두 평면벡터의 평행, 수직

(1) 두 평면벡터의 평행, 수직

평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

① $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

② $\vec{a} // \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}||\vec{b}|$

(2) 벡터의 성분과 두 벡터의 평행, 수직

좌표평면에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$에 대하여

① $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

② $\vec{a} // \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$= \pm \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}$$

8) [정답] ①

[출제범위] 원의 방정식

[해설]

$|\vec{p}-\vec{a}|=k$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 C(1, 2)이고 반지름의 길이가 k인 원이다.

이 원과 방향벡터가 $\vec{d}=(3,\ 4)$인 직선이 한 점 $A(-3,\ l)$에서만 만나므로 직선과 원은 점 $A(-3,\ l)$에서 접한다.

즉, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\vec{d}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{d}=0$

$(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\vec{d}=0$

이때 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 2)-(-3,\ l)=(4,\ 2-l)$이므로

$(4,\ 2-l)\cdot(3,\ 4)=0$

$4\times3+(2-l)\times4=0$

$4l=20,\ l=5$

한편, k는 반지름의 길이이고 $A(-3,\ 5)$이므로

$k=\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-3-1)^2+(5-2)^2}=5$

따라서 $k=5,\ l=5$이므로

$k+l=5+5=10$

필수 개념

▶원의 방정식

평면 위의 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 C 위의 한 점을 P라 하면 원 C의 방정식은 다음과 같다.

(1) 두 점 A, P의 점 O에 대한 위치벡터를 각각 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OP}$라 하면

$$|\vec{p}-\vec{a}|=r,\ 즉\ (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2$$

(2) 두 점 A, P의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x,\ y)$라 하면

$$(x-x_1,\ y-y_1)\cdot(x-x_1,\ y-y_1)=r^2$$

9) [정답] ②

[출제범위] 원의 방정식

[해설]

$\vec{p}\cdot\vec{p}-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$에서

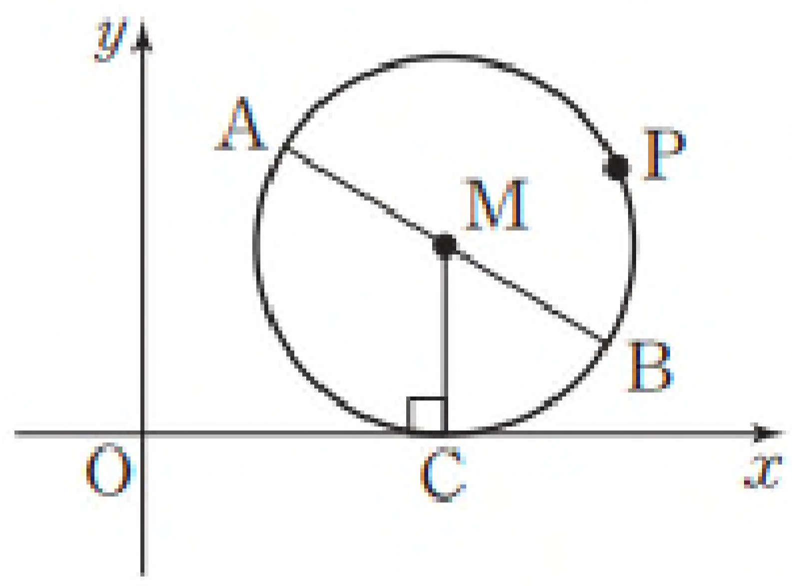
$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 지름으로 하는 원이다.

이때 이 원이 x축과 한 점에서만 만나므로 이 점을 C라 하면 점 C의 x좌표는 선분 AB의 중점 M의 x좌표와 같다.

점 M의 좌표는 $\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{k+2}{2}\right)$, 즉 $\left(2,\ \frac{k+2}{2}\right)$이므로

C(2, 0)



$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$=\{(2,\ 0)-(1,\ k)\}\cdot\{(2,\ 0)-(3,\ 2)\}$

$=(1,\ -k)\cdot(-1,\ -2)$

$=1\times(-1)+(-k)\times(-2)$

$=-1+2k=0$

따라서 $k=\frac{1}{2}$

[참고]

$\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MC}}$임을 이용하여 k의 값을 구해도 된다.

필수 개념

▶원의 방정식

평면 위의 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 C 위의 한 점을 P라 하면 원 C의 방정식은 다음과 같다.

(1) 두 점 A, P의 점 O에 대한 위치벡터를 각각 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OP}$라 하면

$$|\vec{p}-\vec{a}|=r,\ 즉\ (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2$$

(2) 두 점 A, P의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x,\ y)$라 하면

$$(x-x_1,\ y-y_1)\cdot(x-x_1,\ y-y_1)=r^2$$

10) [정답] ①

[출제범위] 평면벡터의 내적

[해설]

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 하자.

$|\overrightarrow{OM}|=1$에서

$\left|\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\right|=1$, $\left|\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right|=1$

$|\vec{a}+\vec{b}|=2$

양변을 제곱하면

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=4$

$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4$ …… ㉠

또 $|\overrightarrow{AB}|=4$에서

$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=4$, $|\vec{b}-\vec{a}|=4$

$|\vec{a}-\vec{b}|=4$

양변을 제곱하면

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=16$

$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16$ …… ㉡

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$4\vec{a}\cdot\vec{b}=-12$

따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$

[다른 풀이]

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})$

$=|\overrightarrow{OM}|^2+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

$=1+0-4=-3$

필수 개념

▶벡터의 내적의 성질

(1) 세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

② $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

③ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

(2) 벡터의 크기와 내적

① $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

② $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

④ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

11) [정답] ④

[출제범위] 내적의 성질

[해설]

한 직선의 방향벡터는

$\vec{d}=(1,\ \sqrt{3})$ …… ㉠

또 두 점 A$(1,\ \sqrt{3})$, B$(2,\ 0)$을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{e}$, 점 O를 원점이라 하면

$\vec{e}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$=(2,\ 0)-(1,\ \sqrt{3})$

$=(1,\ -\sqrt{3})$ …… ㉡

따라서 ㉠과 ㉡에서

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{d}\cdot\vec{e}|}{|\vec{d}||\vec{e}|}$

$=\dfrac{|(1,\ \sqrt{3})\cdot(1,\ -\sqrt{3})|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}\times\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}$

$=\dfrac{|1\times1+\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})|}{\sqrt{4}\times\sqrt{4}}$

$=\dfrac{|1-3|}{4}=\dfrac{1}{2}$

필수 개념

▶ 두 평면벡터가 이루는 각의 크기

(1) 두 벡터가 이루는 각의 크기

평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0°\le\theta\le180°)$일 때

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(2) 벡터의 성분과 두 벡터가 이루는 각의 크기

좌표평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기가 θ $(0°\le\theta\le180°)$일 때

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

12) [정답] ③

[출제범위] 직선의 방정식

[해설]

원점을 지나고 방향벡터가 $\vec{d}=(1,\ 3)$인 직선의 방정식은 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{3}$

한편, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값이 0이 아닌 양수이므로 직선 l은 위의 직선과 평행하다. 즉, 직선 l의 x절편을 k라 하면 직선 l의 방정식은 $\frac{x-k}{1}=\frac{y}{3}$로 놓을 수 있다.

이때 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값이 $3\sqrt{10}$이므로 원점과 직선 $3x-y-3k=0$ 사이의 거리가 $3\sqrt{10}$이어야 한다.

$$\frac{|3\times0-0-3k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=3\sqrt{10}$$

$|-3k|=30$

$k>0$이므로 $3k=30$,

따라서 $k=10$

필수 개념

▶직선의 방정식(방향벡터가 주어질 때)

점 A를 지나고 방향벡터가 $\vec{d}$가 직선 l 위의 점 P라 하면 직선 l의 방정식은 다음과 같다.

① 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}\ (t\text{는 실수})$$

② 두 점 A, P의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x,\ y)$라 하고 $\vec{d}=(a,\ b)$라 하면

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\ (\text{단, } ab\neq0)$$

13) [정답] ⑤

[출제범위] 원의 방정식

[해설]

$|2\vec{p}-\vec{a}|=2$에서 $\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=1$

이때 $\frac{1}{2}\vec{a}=(3,\ \sqrt{7})$이므로 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $C(3,\ \sqrt{7})$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최댓값은

$\overline{\mathrm{OC}}+1=\sqrt{3^2+(\sqrt{7})^2}+1=4+1=5$

필수 개념

▶원의 방정식

평면 위의 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 C 위의 한 점을 P라 하면 원 C의 방정식은 다음과 같다.

(1) 두 점 A, P의 점 O에 대한 위치벡터를 각각 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OP}$라 하면

$$|\vec{p}-\vec{a}|=r,\ \text{즉}\ (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{a})=r^2$$

(2) 두 점 A, P의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x,\ y)$라 하면

$$(x-x_1,\ y-y_1)\cdot(x-x_1,\ y-y_1)=r^2$$

14) [정답] ③

[출제범위] 내적의 성질

[해설]

A(1, 3), B(2, 1)이고 네 점 O, A, B, C를 꼭짓점으로 하는 사각형이 선분 OC를 대각선으로 하는 평행사변형이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 3)+(2,\ 1)=(3,\ 4)$

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 이루는 각의 크기가 θ이므로

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}=\frac{(1,3)\cdot(3,4)}{\sqrt{1^2+3^2}\times\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$=\frac{15}{\sqrt{10}\times5}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

필수 개념

▶ 두 평면벡터가 이루는 각의 크기

(1) 두 벡터가 이루는 각의 크기

평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 θ $(0° \le \theta \le 180°)$일 때

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(2) 벡터의 성분과 두 벡터가 이루는 각의 크기

좌표평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기가 θ $(0° \le \theta \le 180°)$일 때

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}$$

15) [정답] ③

[출제범위] 직선의 방정식

[해설]

법선벡터가 $\vec{n}=(3,\ 4)$이므로 직선 l의 방정식은

$3x+4y=k$ (k는 상수)

이때 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점을 R라 하면

$$|2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=3\times\left|\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{3}\right|=3\times|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$$

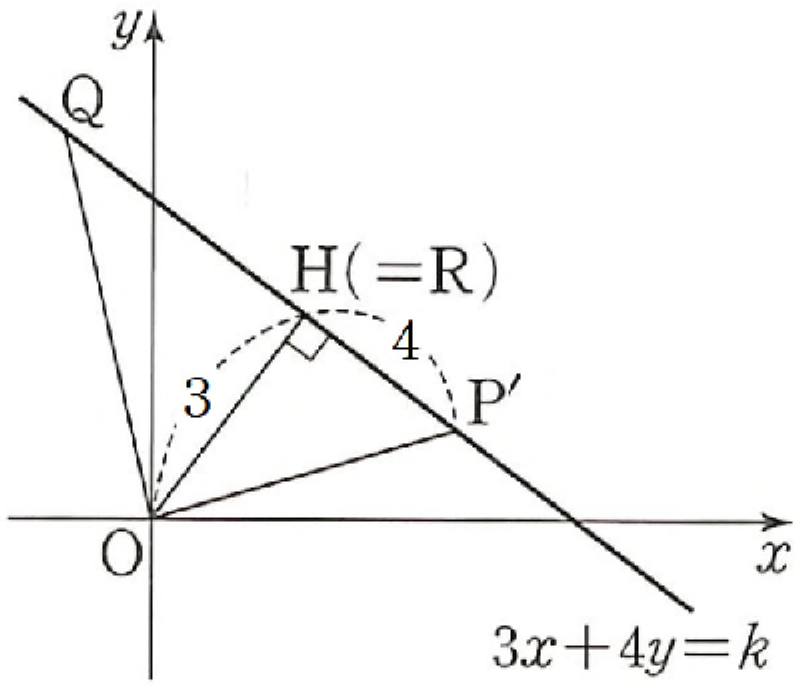
이 값의 최솟값이 9이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$의 최솟값은 3이다.

원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 R가 점 H일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$는 최솟값을 갖는다.

즉, $\overline{\mathrm{OH}}=3$

또 $\overline{\mathrm{PQ}}=12$이므로

$$\overline{\mathrm{P'H}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{3}\times12=4$$



직각삼각형 $\mathrm{OP'H}$에서

$$\overline{\mathrm{OP'}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OH}}^2+\overline{\mathrm{P'H}}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

또 원점 O와 직선 l 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|3\times0+4\times0-k|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$$

$|k|=15$

$k=-15$ 또는 $k=15$

직선 l의 x절편 m이 $m>0$이므로 직선의 방정식은

$3x+4y=15$이고 $m=5$

따라서 $m+\overline{\mathrm{OP'}}=5+5=10$

필수 개념

▶직선의 방정식(법선벡터가 주어질 때)

점 A를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}$인 직선 l 위의 점을 P라 하면 직선 l의 방정식은 다음과 같다.

① 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$$

② 두 점 A, P의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x,\ y)$라 하고, $\vec{n}=(a,\ b)$라 하면

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

16) [정답] ①

[출제범위] 내적의 성질

[해설]

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

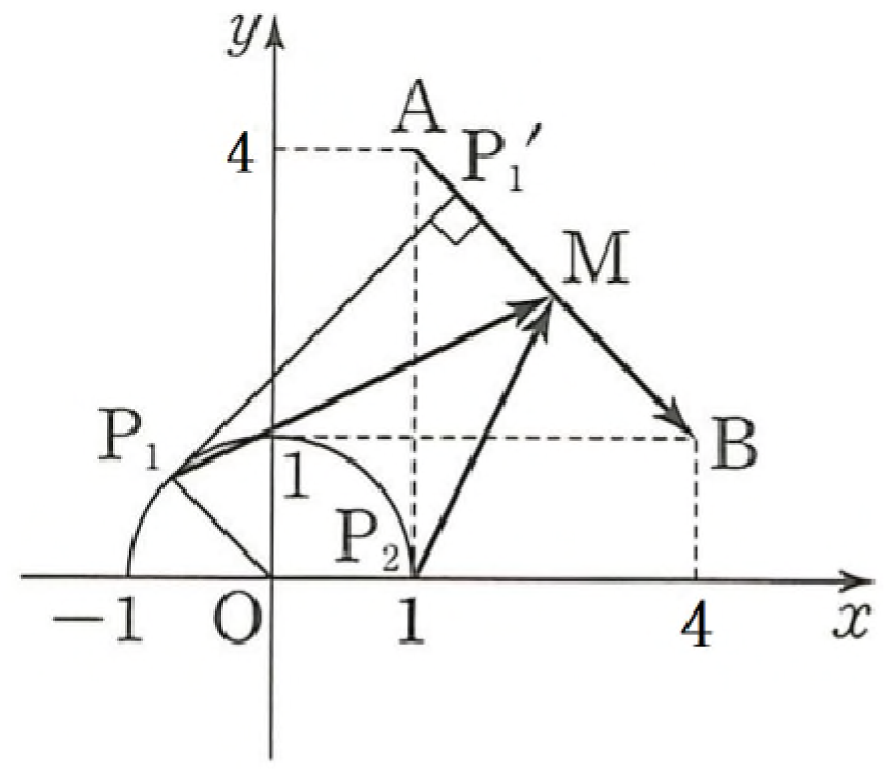
$=(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

이때 선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\times\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{2}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$=2\times\overrightarrow{\mathrm{PM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이때 원점을 지나고 직선 AB에 평행한 직선이 반원의 호 $x^2+y^2=1$ $(y\ge0)$과 만나는 점을 $\mathrm{P_1}$, 좌표가 (1, 0)인 점을 $\mathrm{P_2}$라 하면 점 $\mathrm{P_1}$에서 ㉠은 최대이고 점 $\mathrm{P_2}$에서 ㉠은 최소이다.



그러므로 점 P_1에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 P_1'이라 하면 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로 최댓값 M은

$$
\begin{aligned}
M&=2\times\overrightarrow{P_1M}\cdot\overrightarrow{AB}\\
&=2\times\overrightarrow{P_1'M}\times\overrightarrow{AB}\\
&=2\times1\times3\sqrt{2}\\
&=6\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

또 $P_2(1,\ 0)$, $M\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$이므로 최솟값 m은

$$
\begin{aligned}
m&=2\times\overrightarrow{P_2M}\cdot\overrightarrow{AB}\\
&=2\times(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP_2})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\
&=2\times\left\{\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)-(1,\ 0)\right\}\cdot\{(4,\ 1)-(1,\ 4)\}\\
&=2\times\left\{\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)\cdot(3,\ -3)\right\}\\
&=2\times\left\{\frac{3}{2}\times3+\frac{5}{2}\times(-3)\right\}\\
&=2\times\left(\frac{9}{2}-\frac{15}{2}\right)\\
&=2\times(-3)\\
&=-6
\end{aligned}
$$

따라서 $M\times m=6\sqrt{2}\times(-6)=-36\sqrt{2}$

필수 개념

▶벡터의 내적의 성질

(1) 세 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

② $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

③ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

(2) 벡터의 크기와 내적

① $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

② $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

③ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

④ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

17) [정답] ⑤

[출제범위] 내적의 성질

[해설]

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$ …… ㉠

또 점 S는 선분 BC를 4 : 1로 내분하는 점이므로

$\overrightarrow{AS}=\frac{\vec{a}+4\vec{b}}{5}$

그러므로

$\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AQ}=\frac{\vec{a}+4\vec{b}}{5}-\frac{1}{3}\vec{b}=\frac{3\vec{a}+7\vec{b}}{15}$ … ㉡

이때 $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QS}=-2$이고 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=3$ 이므로

㉠과 ㉡에서

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{3\vec{a}+7\vec{b}}{15}\right)\\
&=\frac{2}{3}\times\frac{1}{15}(\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}+7\vec{b})\\
&=\frac{2}{45}\left(3|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}-7|\vec{b}|^2\right)\\
&=\frac{2}{45}\left(3|\vec{a}|^2+4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta-7|\vec{b}|^2\right)\\
&=\frac{2}{45}\left(3\times3^2+4\times3\times3\times\cos\theta-7\times3^2\right)\\
&=\frac{2}{45}(-36+36\cos\theta)\\
&=\frac{8}{5}(-1+\cos\theta)=-2
\end{aligned}
$$