1번 문항(2015 고려대학교 논술기출)

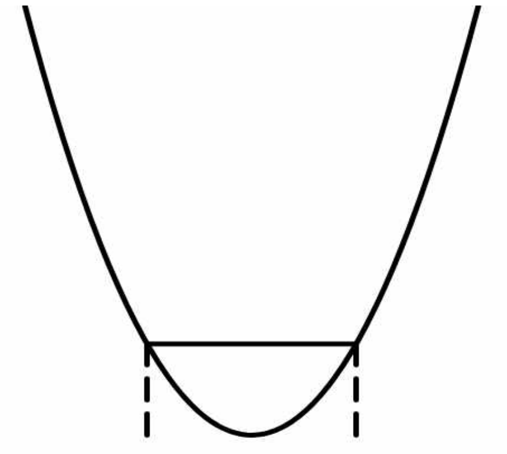
$s<t$인 두 실수에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(s,\, s^2)$과 $\mathrm{B}(t, t^2)$은 곡선 $y=x^2$ 위를 움직인다.
두 점 A, B가 $\overline{\mathrm{AB}}=1$을 만족하며 움직일 때, 선분 AB와 곡선 $y=x^2$으로
둘러싸인 영역의 넓이를 $F(s)$라 하자. 극한값 $\lim_{s \to \infty} s^3 F(s)$를 구하시오.

어떻게 접근을 해야할지 상당히 막막합니다. 일단 주어진 조건부터 먼저 수식으로 변형시켜 봐야 좀 실마리가 보이겠네요.
$\overline{\mathrm{AB}}=1$ 이라는 조건은 두 점 $\mathrm{A}(s, s^2)$ 과 $\mathrm{B}(t, t^2)$, 즉 좌표로 주어졌으므로 점과 점사이의 거리공식을 활용하는게 맞을 듯 하네요. 이용해준다면
$\sqrt{(t-s)^2+(t^2-s^2)^2}=1$ 인데, 넓이, 거리 등은 항상 양수들이고 $\sqrt{\ }$ 는 지금 당장 식을 다루는데 필요하지 않으므로 양 변을 제곱해 버립시다
$(t-s)^2+(t^2-s^2)^2=1$
이 식을 어떻게 다룰지는 아직 미지수입니다. 섣불리 건드렸다가 나중에 답을 구하는데에 필요없는꼴이 되어버린다면 낭패겠죠? 다음조건도 해석해봅시다.
선분 AB 와 곡선 $y=x^2$ 으로 둘러싸인 영역의 넓이를 $F(s)$ 라고 했으므로 이를 구하기 위해서 선분AB 의 직선의 방정식을 만들어 준 후 넓이를 구하는 과정을 보여야겠네요.

두 점 $\mathrm{A}(s,\ s^2)$, $\mathrm{B}(t,\ t^2)$를 지나는 직선의 방정식은
$y-s^2=\dfrac{t^2-s^2}{t-s}(x-s)$
$y=(t+s)x-st$ 이구요, 직선 AB가 항상 포물선 $y=x^2$의 위쪽에 있으므로 둘러싸인 영역의 넓이는
$F(x)=\displaystyle\int_s^t\{(t+s)x-st-x^2\}dx=-\int_s^t(x-s)(x-t)dx=\frac{1}{6}(t-s)^3$
입니다.
이제 슬슬 $\displaystyle\lim_{s\to\infty}s^3F(s)$ 를 고려해봅시다. 극한값을 구하기위해선 가급적 한 문자에 대하여 정리된 꼴이 구하기 좋으니 아까 구했던 t와 s의 관계식으로부터 한 문자에 대하여 정리해봅시다.
$(t-s)^2+(t^2-s^2)^2=1$
인데 이걸 전개해본다면 $s^4-2t^2s^2-2ts+t^2+t-1=0$
s에 관한 사차식이므로 근을 구하기도 쉽지 않습니다. 그래서 우리가 정리해야 하는 꼴인 $\dfrac{1}{6}(t-s)^3$에 주목해본다면 차라리 $(t-s)$로 묶어보면 어떨까 싶죠.
정리해보면 $(t-s)^2\{1+(t+s)^2\}=1$ 이고 $t-s=\dfrac{1}{\sqrt{1+(t+s)^2}}$ 로 정리됩니다($\because\ \ s<t$)
그렇다면 $F(s)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+(t+s)^2}}\right)^3$ 입니다
식은 간단해졌지만, 여전히 한 문자에 대하여 정리되지 않네요
극한값을 구해야 하는데 식이 간단하게 정리되지 않는다? 답은 샌드위치 정리입니다.
s에 관한 식으로 정리되길 원했으므로 양 변의 부등식을 구할때에는 s만 존재하는 식으로 구해야겠죠?
$s<t$임을 고려한다면

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(2s)^2}}\right)^3 > F(s)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(t+s)^2}}\right)^3$$

을 얻고 $\left(\frac{s}{\sqrt{1+(2s+1)^2}}\right)^3 \geq 6s^2F(s)$을 얻기 때문에 좌변의 극한값은 $\frac{1}{8}$로 수렴함을 알 수 있습니다. 문제는 오른쪽인데요, 빨리 t가 무엇보다 작은지 찾아봐야겠네요.
안쓴조건이 있었나?를 가만히 생각해봐도 떠올리기 쉽진 않습니다
하지만 두 점 A, B가 $\overline{\mathrm{AB}}=1$을 만족하며 곡선 $y=x^2$ 위를 움직이는 것을 고려한다면 '특수한' 순간인 점 A, B의 y좌표들이 동일해지는 순간을 발견할 수 있고, 이 때 x좌표의 차이가 최대가 됨을 확인할 수 있습니다.



$\mathrm{A}(s, s^2)$ $\mathrm{B}(t, t^2)$

$s^2=t^2$인 상황이고 이때 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이므로 이때의 $s+1=t$입니다.
이때가 t와 s의 간격이 최대인 생황이므로 $t \leq s+1$을 얻습니다.
정리하면, $s < t \leq s+1$이므로

$$\left(\frac{s}{\sqrt{1+(2s+1)^2}}\right)^3 \leq 6s^2F(s) < \left(\frac{s}{\sqrt{1+(2s)^2}}\right)^3$$

이 성립하고

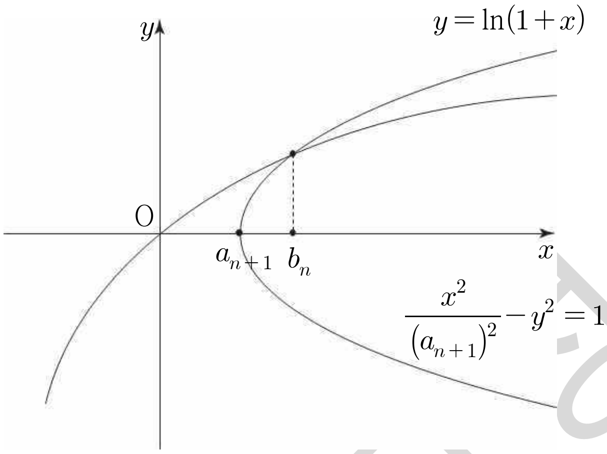
$$\lim_{s\to\infty}\left(\frac{s}{\sqrt{1+(2s+1)^2}}\right)^3 = \lim_{s\to\infty}\left(\frac{s}{\sqrt{1+(2s)^2}}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

샌드위치 정리에 의하여 $\frac{1}{8}$로 수렴하는 것을 확인할 수 있습니다!

$$\lim_{s\to\infty} s^3F(s)=\frac{1}{48}$$

28번 문항(2022 연세대 논술기출)

<그림 1>과 같이 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{(a_{n+1})^2}-y^2=1$ $(x \geq a_{n+1})$과 함수 $y=\ln(1+x)$의 그래프는 한 점에서 만난다. 이 점의 x좌표를 b_n이라 할 때, 아래 제시문을 참고하여 다음 물음에 답하시오.



제시문 1. $x>0$인 실수 x에 대하여 $\ln(1+x)<x$가 성립한다. 제시문 2. 자연수 n에 대하여 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$이 성립한다.

[1] 수열 $\{a_n\}$이 $1+\dfrac{1}{(a_n)^2} \leq \dfrac{1}{(a_{n+1})^2}$을 만족시킬 때, $a_{n+1}<b_n<a_n$이 성립함을 보이시오.

[2] $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n)$의 값을 구하시오.

28번 문항 해설

[1]

가정에 의해 수열 $\{a_n\}$이 $\dfrac{1}{(a_n)^2}<1+\dfrac{1}{(a_n)^2}\le\dfrac{1}{(a_{n+1})^2}$ 이므로 $a_n>a_{n+1}$이다.

(양변에 루트를 씌우면 원래는 $\sqrt{x^2}=|x|$이나, 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수이기에 이정도는 생략하고 넘어갔음을 참고하자.)

부등식을 증명하기 위해 뭔가를 더하거나 뭔가를 없애는 것. 이것정도는 자연스러울 수 있다. 다만 순서는 맨 마지막에 할 수도 있다는점은 참고하자.

$a_{n+1}<b_n<a_n$를 보여야 하는데, $a_{n+1}<b_n$는 쉽게 보일 수 있다. 주어진 쌍곡선에 대입하여 보이기 편함)

문제는 $b_n<a_n$를 보이는 것이 어렵다.

그리고 체감상, 답지해설이 보이기 어려운 부분이 분명 존재하기 때문에 여기 해설에선 다른방식으로 한번 접근해보자.

제시문 1에서 $\ln(1+x)<x$가 성립한다 하였으므로 주어진 조건들을 최대한 사용해보자면 $\ln(1+b_n)<b_n$이 성립하고 b_n은 주어진 두 곡선의 교점이므로 대입해보면

$\left(\dfrac{b_n}{a_{n+1}}\right)^2=1+\{\ln(1+b_n)\}^2$이고 아까 부등식에서 $\dfrac{1}{(a_{n+1})^2}$가 있었으니 이를 이용해보자

$$\left(\frac{1}{a_{n+1}}\right)^2=\frac{1+\{\ln(1+b_n)\}^2}{(b_n)^2}$$

$$1+\frac{1}{(a_n)^2}\le\frac{1}{(a_{n+1})^2}=\frac{1+\{\ln(1+b_n)\}^2}{(b_n)^2}<\frac{1+(b_n)^2}{(b_n)^2}=1+\frac{1}{(b_n)^2}$$

(어짜피 $x>0$에서 $0<\ln(1+x)<x$이고 양 변이 양수인 부등식은 양 변을 제곱해도 부등호의 방향이 바뀌진 않으므로 문제가 없다. 따라서 $b_n<a_n$가 성립한다)

[2]

문제에서 뭘 구하려는지 한번 생각해보자.

$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$ 에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n)$의 값을 구하라는데,

b_n의 일반항이 깔끔하게 구해지지 않았던점을 고려한다면, 샌드위치 정리를 떠올려주는 것이 자연스럽다. 그렇다면 b_n에 대해 제일 먼저 구해지는 부등식은 $a_{n+1}<b_n$일 것이다.

그렇다면 우리가 해야하는 생각은 두가지이다.

① $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$이 수렴하는가?

② $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$이 수렴하지 않는다면 혹시 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n)$의 꼴을 이용하여 구할수 있는

가?

그리하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$부터 구해보자. 여기서 어짜피 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$이 수렴하면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$도 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$를 구해보자.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\times\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}=0\times e^{-\frac{1}{2}}=0$$

이렇게 놓고보니 수렴하지만 우리가 원하는꼴은 아직은 아니고.. 이 안에 e로 수렴하는 부분이 존재한다는 것을 눈치챌 수 있고, 그렇다면 왜 여기에 $\ln$을 씌우는지 이제야 납득이 좀 가지않는가?

$0<a_{n+1}<b_n$임을 고려하여

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+a_{n+1})\le\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n)$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+a_n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln\left\{1+\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{n}\times\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\times\ln\left\{1+\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\right\}^{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}}}\right]=e^{-\frac{1}{2}}$$

아 드디어 수렴함을 확인했네요. 그렇다면 b_n에 대한 부등식을 뭔가 하나 더 만들어내기에는 아무런 힌트가 없으므로 방금 구한 a_n에 대하여 혹시 $a_{n+1}<b_n<a_n$으로 부등식이 만들어지기만만 한다면 성립하지 않을까?

제시문 2에 의해

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{(a_n)^2}&=1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 1+n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\\&=1+(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\\&=1+\frac{1}{(a_{n+1})^2}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}<\frac{1}{(a_{n+1})^2}\end{aligned}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 [1]의 조건을 만족한다. 따라서 [1]에 의해 $a_{n+1}<b_n<a_n$이다.

그리고 수열 $\{a_n\}$은 수렴하는 수열이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+a_{n+1})\le\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n)\le\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+a_n)$$

이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+a_{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+a_n)=\frac{1}{\sqrt{e}}$를 이용하면 끝

물론, 위의 계산과정이 너무 복잡하다면 답지와 같은 발상도 충분히 가능하다.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,b_n \times \frac{\ln(1+b_n)}{b_n}$ 으로 표현가능하고

$a_{n+1} < b_n < a_n$ 을 얻었다면 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}b_n$의 극한값을 얻을 수 있을것이고 $\lim_{n\to\infty}b_n = 0$이므로, $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1$이고 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,b_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ln(1+b_n) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 임을 얻을 수 있다.

여기서 발상을 떠올리는 힌트는 $\lim_{n\to\infty}b_n = 0$인데 $\ln$안에 $\ln(1+b_n)$의 꼴로 주어져있다는 점이다. 이를 고려한다면 혹시 무리수 e의 정의를 이용하지 않으려나? 하는 생각을 가지고 문제와 조건들을 추론해나가야 한다.