1번 문항(2017 한양대 논술기출)

함수

$$f(x)=\int_0^x \frac{\ln(t+1)+1}{t+1}dt$$

에 대하여 $x>0$일 때 부등식 $2f\left(\frac{2}{x}\right)>f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{3}{x}\right)$이 성립함을 보이시오.

평균값 정리를 사용한다는 사실을 모를 때, 단순히 대입해서 보이려고 하시겠죠?
물론, 해봤는데 증명이 안되니까 이 해설을 보고있겠죠
자 평균값 정리를 어떻게 떠올릴지부터 한번 생각해봅시다.
$f(x)$안에 들어가 있는것들을 살펴보면 $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{3}{x}$가 등차수열같이 간격이 일정하게 들어가있습니다. 이제 함수 밖을 살펴보면 $f\left(\frac{2}{x}\right)$의 계수만 2가 붙어있는건 식의 균형이 맞지 않다는 느낌이 들죠? 서로 함수가 빠지면서 간격이 일정하게 만들어준다면 아래와 같이 식을 적을 수 있습니다

$$f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)>f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)$$

평균값정리는 평균변화율꼴에서부터 떠올려야하며, 기존의 식으로는 증명하기 힘들때 더 편하게 증명하기 위하여 사용하는 방법입니다
이꼴을 보면 이제 $\frac{1}{x}$만 분모에 있으면 되겠죠? $x>0$이므로 양 변에 나눠주어도 부등식의 방향에 영향을 끼치지 않겠네요. 나눠봅시다

$$\frac{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}>\frac{f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

이제야 평균변화율꼴이 보이고 이를 이용하여 평균값 정리를 양 변에 각각 사용해주면 되겠네요! 사용해줍시다.

구간 $\left[\frac{1}{x}, \frac{2}{x}\right]$에서 평균값 정리를 사용하면

$$\frac{f\left(\frac{2}{x}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{x}-\frac{1}{x}}=f'(c_1)\quad \left(\frac{1}{x}<c_1<\frac{2}{x}\right)$$ 이고,

구간 $\left[\frac{2}{x}, \frac{3}{x}\right]$에서 평균값 정리를 사용하면

$$\frac{f\left(\frac{3}{x}\right)-f\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{3}{x}-\frac{2}{x}}=f'(c_2) \quad \left(\frac{1}{x}< c_2 < \frac{2}{x}\right)$$ 이다.

이로 인해 우리는 아래의 부등식을 보이면 됩니다

$$f'(c_1) > f'(c_2) \quad \left(\frac{1}{x}< c_1 < \frac{2}{x}< c_2 < \frac{3}{x}\right)$$

즉 $f'(x)$가 양의 실수 전체집합에서 감소함수임을 보이면 되는것이죠

맨 처음 보이려는 부등식보다는 훨씬 간단해졌죠?

(왜 양의 실수 전체 집합이냐, $x>0$에서 $\frac{1}{x}$는 양의 실수 전체집합에 대응되기 때문입니다)

물론 여기서 평균값 정리를 한번 더 쓰는것도 가능합니다.

$$\frac{f'(c_2)-f'(c_1)}{c_2-c_1}=f''(d)<0 \quad \left(\frac{1}{x}< c_1 < d < c_2 < \frac{3}{x}\right)$$

물론 보이려는 결과는 동일하게 얻게 되구요.

자 마저 이계도함수를 구해봅시다

$f(x)=\int_0^x \frac{\ln(t+1)+1}{t+1}dt$의 양변을 미분하면 $f'(x)=\frac{\ln(x+1)+1}{x+1}$

양변을 한 번 더 미분하면, $f''(x)=\frac{-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ 이므로 $x>0$에서 $f''(x)<0$ 이고

함수 $f'(x)$는 감소함수이므로 따라서 $2f\left(\frac{2}{x}\right)>f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{3}{x}\right)$는 성립합니다.

2번 문항(2021 서강대 논술기출)

(1) 함수 $f(x)$가 구간 $[1,\infty)$에서 연속이고 증가할 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$f(1)+\int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^{n+1} f(x)dx$$

이 문제가 어려운 이유는 평균값정리와 텔레스코핑을 역으로 사용해줘야 하기 때문입니다.

일단, 문제풀이의 실마리는 이렇게 잡아야 합니다

왼쪽과 오른쪽에 있는 부등식은 적분인데 중앙에 존재하는 식은 $\sum$

비교 대상이 동일해야 부등식이 의미가 있고, $\sum$를 적분으로 바꾸는것보단, 적분을 $\sum$로 바꾸는 것이 편하기 때문에 적분을 $\sum$로 바꾸자.

어떻게 바꾸냐? 바로 텔레스코핑을 역으로 사용하는 것이죠

좌변부터 정리해보자. $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\int_1^{n+1} f(x)dx = F(n+1)-F(1)$$

그리고 이를 텔레스코핑을 역으로 적용시켜준다면

$$\int_1^{n+1} f(x)dx = F(n+1)-F(1) = \sum_{k=1}^{n}\{F(k+1)-F(k)\}$$

하지만 이렇게 바꾸어도 문제는 함수가 통일되지 않았기에 비교가 여전히 힘들드네요. 따라서 함수 또한 동일하게 만들어 주기 위해 여기서 평균값정리를 사용하자.

$$F(k+1)-F(k) = \frac{F(k+1)-F(k)}{(k+1)-k} = F'(c_1) = f(c_1) \quad (k < c_1 < k+1)$$

따라서 우측 부등식은 아래와 같이 보일 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^{n+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\{F(k+1)-F(k)\} = \sum_{k=1}^{n} f(c_1)$$

이고 $f(x)$가 구간 $[1,\infty)$에서 연속이고 증가하므로 $f(k) < f(c_1)$ 이므로 양 변에 $\sum_{k=1}^{n}$을 취하면 $\sum_{k=1}^{n} f(k) < \sum_{k=1}^{n} f(c_1)$가 성립한다. 따라서 $\sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^{n+1} f(x)dx$ 는 성립.

자 이제 왼쪽을 보인다면.

아까와 동일한 과정을 거친다면

$f(1)+\int_1^n f(x)dx$에서 $\int_1^n f(x)dx = F(n)-F(1) = \sum_{k=1}^{n}\{F(k+1)-F(k)\}$ ..?

꼴이 좀 이상하다 그죠?

$\sum$로 다시 묶어줄 때 범위는 항상 1부터 n까지로 맞춰야 부등식의 양 변이 비교가능이기에 아까처럼 변형시켰더니 문제가 발생했네요.
따라서 아래와 같이 묶어준다면

$$\int_1^n f(x)dx = F(n) - F(1) = \sum_{k=1}^{n}\{F(k) - F(k-1)\}$$

다만 이렇게 되면 $F(0)=0$이라는 보장이 없으므로

$$\int_1^n f(x)dx = F(n) - F(1) = \sum_{k=2}^{n}\{F(k) - F(k-1)\}$$

물론 $k=1$부터가 아닌것이 조금 불편하지만, 나중에 또 이에 맞춰정리해주면 되니까 이부분은 잠깐 넘기고, 이제 평균값 정리를 적용시켜본다면.
$[k-1,\ k]$ 에서 평균값 정리를 사용하면

$\dfrac{F(k) - F(k-1)}{k-(k-1)} = F'(c_2) \quad (k-1 < c_2 < k)$ 이고

$$\sum_{k=2}^{n}\{F(k) - F(k-1)\} = \sum_{k=2}^{n} F'(c_2) = \sum_{k=2}^{n} f(c_2)$$

그렇다면 왼쪽부등식은 아래와 같이 변합니다

$$f(1) + \int_1^n f(x)dx = f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(c_2) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

이때 양 변에 $f(1)$을 뺀다면 동일한 범위내에서의 합의 비교가 가능하겠네!

$$f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(c_2) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{n} f(c_2) \leq \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

아까와 동일한 이유로 위의 식은 성립한다

따라서 $f(1) + \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^{n+1} f(x)dx$ 는 성립

5번 문항(2021 한양대 모의논술)

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 $\sin(x - \cos x)$와 $\sin x$의 크기를 비교하시오.

평균값 정리의 활용형 첫 번째 문항이다

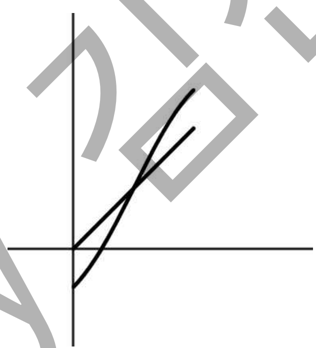
원래의 평균값 정리는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \ \ (a < c < b)$ 의 형태이나

평균값 정리의 활용형은 아래와 같은 꼴을 떠올리도록 해봅시다

$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \ \ (a < c < b)$

먼저 두 함수 $\sin(x - \cos x)$와 $\sin x$의 크기를 비교하기란 쉽지 않다. 하지만 다행히 $\sin$이란 큰 함수의 틀은 동일하니 이를 이용하여 나머지를 비교해보자
즉, $x - \cos x$와 x의 대소를 비교해보는 것이 합성함수인채로 비교하는것보다 조금 더 낫지 않을까? 하는 생각으로부터 출발하는 것이다.

그렇다면 $x - \cos x$와 x의 관계를 생각해보기 위해 그려보는것도 괜찮다.



위와 같이 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 만나고 단 한번만 대소관계가 바뀌는 것을 알 수 있어요.

따라서 구간을 $\frac{\pi}{2}$전후로 나누어 관찰해주는 것이 좋아요.

(여기까지만 두면 원본해설과 풀이가 다를바가 없다. 하지만 이 이후가 중요하다)
하지만 그럼에도 $\sin(x - \cos x)$꼴의 합성함수는 설명하기 어려우므로 이를 간단하게 보이자. 범위를 각각 나누었을 때

$0 \le x < \frac{\pi}{2}$에서 평균값 정리에 의하여

$\sin x - \sin(x - \cos x) = \cos\alpha(x - (x - \cos x)) = \cos\alpha\cos x \ \ (x - \cos x < \alpha < x)$

(이를 사용하기 위해선 $0 \le x < \frac{\pi}{2}$에서 $x - \cos x < x$인 설명이 추가되어야한다.)

그리고 $0 \le x < \frac{\pi}{2}$에서 α의 범위는 $-1 < \alpha < \frac{\pi}{2}$에 대응되고(각 구간끝의 함수

$x-\cos x$, x에 각각 0과 $\frac{\pi}{2}$를 대응시킴)

$-\frac{\pi}{2}<-1$이므로 $\cos\alpha>0$이다. 그리고 $0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos x>0$이므로

$\sin x-\sin(x-\cos x)=\cos\alpha(x-(x-\cos x))=\cos\alpha\cos x>0$

$\sin x>\sin(x-\cos x)$이다.

마찬가지로 $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$도 적용시켜보자. 평균값 정리에 의하여

$\sin(x-\cos x)-\sin x=\cos\alpha((x-\cos x)-x)=\cos\alpha(-\cos x)\ \ (x<\alpha<x-\cos x)$

(이를 사용하기 위해선 $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$에서 $x-\cos x>x$인 설명이 추가되어야한다.)

그리고 $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$에서 α의 범위는 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi+1$에 대응되고(각 구간끝의 함수

$x-\cos x$, x에 각각 $\frac{\pi}{2}$과 $\pi+1$을 대응시킴) $\pi+1<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos\alpha<0$

그리고 $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$에서 $\cos x<0$이므로

$\sin(x-\cos x)-\sin x=\cos\alpha((x-\cos x)-x)=\cos\alpha(-\cos x)<0$

$\sin(x-\cos x)<\sin x$

가 성립 합니다.

참고로, $x=\frac{\pi}{2}$일 땐 $\sin(x-\cos x)=\sin x$이다.

7번 문항(2018 한양대 논술기출)

$0 \le a \le b \le \pi$ 인 실수 a, b에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \le \int_a^b (\sin b - \sin x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$$

평균값 정리의 활용형 두 번째 문항이다.

주어진 부등식을 어떻게 증명할 수 있을까? 적분에 관한 부등식이니 떠올릴 수 있을만한 생각은 넓이의 비교, 부정적분으로 인한 함수의 통일 및 대소비교, 혹은 평균값 정리 등이 있겠죠.

일단 여기서 좌, 우측의 부등식은 $\cos$이 존재하나, 중앙의 적분 안에는 $\sin$만 존재한다는것에 주목하자. 그렇다면 일단 함수가 통일될 필요가 존재하므로, 평균값정리를 이용하여 $\sin$을 도함수인 $\cos$으로 바꾸어보자.

$a < x < b$인 실수 x에 대하여 $\sin b - \sin x = (\cos\alpha)(b-x)$ $(x < \alpha < b)$

로 바꾸면 부등식은

$$\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \le \int_a^b (\cos\alpha)(b-x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$$

이고 이때 $\cos\alpha$는 상수취급이므로 적분하면

$$\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos\alpha \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$$

그리고 $\cos x$는 $(0, \pi)$에서는 감소함수이고 $a < x < \alpha < b$이므로 $\cos b < \cos\alpha < \cos a$가 성립한다.

여기서 잠깐, 하지만 이렇게 보이면, 과연 구간이 변수인 상황에서 $\cos\alpha$를 상수취급할 수 있을까? 조금 더 안전하게 가보려면 우측과 좌측의 식을 적분식으로 변형시키는것도 가능합니다.

$$\frac{1}{2}\int_a^b (b-a)\cos b \le \int_a^b (\cos\alpha)(b-x)dx \le \frac{1}{2}\int_a^b (b-a)\cos a$$

하지만 이렇게 보이면 양 끝의 계수에 $\frac{1}{2}$를 처리하기가 불편하다. 중앙의 식의 $b-x$를 적분하면 $-\frac{1}{2}(b-x)^2$을 감안한다면 아래와 같이 두는 것이 더 나을 거에요.

$$\int_a^b (b-x)\cos b\, dx \le \int_a^b (\cos\alpha)(b-x)dx \le \int_a^b (b-x)\cos a\, dx$$

이때 $b-x$는 실수 전체집합에서 감소하는 함수이고 $a < x < \alpha < b$이므로 주어진 구간에선 $\cos b < \cos\alpha < \cos a$가 성립하므로

$$(b-x)\cos b \le (b-x)\cos\alpha = \sin b - \sin x \le (b-x)\cos a$$

가 성립하므로 양 변에 동일한 정적분을 취하여도 성립하는 것이죠.

따라서 $\frac{1}{2}(b-a)^2\cos b \le \int_a^b (\sin b - \sin x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\cos a$ 는 성립