2024년
3월 전국연합학력평가 해설집 . ZIP

made by PPL 수학연구소

PPL MATH

[총괄]

오성원 홍익대학교 수학교육과

[제작 및 검토]

김대현 건국대학교 수학과
김서영 국민대학교 경영정보학부
원민식 고려대학교 기계공학부
이경민 서울대학교 수학교육과

About PPL 수학연구소

PPL 수학 연구소는 중, 고등학교 내신 및 수능 수학을 연구하고 토론,
다양한 수학 컨텐츠 제작을 하는 수학 선생님들의 집단입니다.
변화하는 수능의 경향을 고려하여
모의고사 제작, 검토, 해설서 제작을 하고 있으며,
평가원, 교육청 모의고사 및 수능 해설 강의 촬영 등의
활동도 하고 있습니다.
우리 PPL 수학 연구소는 고등 교육의 발전을 위해 언제나 노력하고 있습니다.

2025학년도에도 더 다양한 컨텐츠로 만나 뵐 수 있도록 팀 내, 외적으로 변화를 앞둔 상태입니다.
팀명 변경을 앞두고 있으며, 변경된 이름으로 추후 다시 인사드리겠습니다 :)

문의는 여기로 부탁드립니다
인스타 DM : ppl_math_lab
총괄팀장(오성원) 메일 : dhtjddnjs0327@naver.com

제작 및 검토

오성원 (총괄)	홍익대학교 수학교육과
김대현	건국대학교 수학과
김서영	국민대학교 경영정보학부
원민식	고려대학교 기계공학부
이경민	서울대학교 수학교육과

PPL MATH®

#1

지수법칙

$\sqrt[3]{54}\times 2^{\frac{5}{3}}$의 값은? [2점]

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

해설 작성자	오성원

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{54}\times 2^{\frac{5}{3}} &= (2\times 3^3)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{5}{3}}\\ &= 2^{\frac{1}{3}}\times 3\times 2^{\frac{5}{3}}\\ &= 2^2\times 3\\ &= 12\end{aligned}$$

#2 미분계수

함수 $f(x)=x^3-3x^2+x$에 대하여

$\lim_{h \to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}$의 값은? [2점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

해설 작성자	오성원

해설

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{2h}=\frac{1}{2}\times\lim_{h \to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\frac{f'(3)}{2}$$

$f(x)=x^3-3x^2+x$,

$f'(x)=3x^2-6x+1$

$f'(3)=27-18+1=10$

$\therefore\ \frac{f'(3)}{2}=\frac{10}{2}=5$

#3 삼각함수의 뜻

$\cos\theta > 0$이고 $\sin\theta + \cos\theta\tan\theta = -1$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\sqrt{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

해설 작성자	오성원

해설

$$\sin\theta + \cos\theta\tan\theta = \sin\theta + \cos\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= 2\sin\theta$$

$2\sin\theta = -1,\quad \therefore\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2}$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \cos^2\theta + \dfrac{1}{4} = 1,$

$\cos^2\theta = \dfrac{3}{4},\quad \therefore\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \ (\because\ \cos\theta > 0)$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

#4 함수의 연속

함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<3) \\ \sqrt{x+1}-a & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 $x=3$에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

[3점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

해설 작성자	오성원

해설

함수

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & (x<3) \\ \sqrt{x+1}-a & (x \geq 3) \end{cases}$$

가 $x=3$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3+}f(x)=f(3)$$

$$\lim_{x\to 3-}f(x)=\lim_{x\to 3-}(2x+a)=6+a \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

$$\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3+}(\sqrt{x+1}-a)=2-a \qquad \cdots\cdots \ ㉡$$

㉠, ㉡에서

$6+a=2-a$,

$2a=-4$,

$\therefore\ a=-2$

#5

부정적분

다항함수 $f(x)$가

$f'(x)=x(3x+2)$, $f(1)=6$

을 만족시킬 때, $f(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

해설 작성자	오성원

해설

$f'(x)=x(3x+2)=3x^2+2x$

$\int f'(x)dx=\int(3x^2+2x)dx=x^3+x^2+C$

(C는 적분상수)

$f(x)=x^3+x^2+C$에서

$f(1)=1+1+C=2+C=6$, $\therefore\ C=4$

$f(x)=x^3+x^2+4$에서 $f(0)=4$

#6 등비수열

공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2}=5,\ a_5=48$$

일 때, a_1+a_4의 값은? [3점]

① 39 ② 36 ③ 33
④ 30 ⑤ 27

해설 작성자	오성원

해설

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>1)$이라 하자.

$$\frac{S_4}{S_2}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a_1+a_2}$$

$$=1+\frac{a_3+a_4}{a_1+a_2}$$

$$=1+\frac{a_1\times r^2+a_2\times r^2}{a_1+a_2}$$

$$=1+\frac{r^2(a_1+a_2)}{a_1+a_2}$$

$$=1+r^2$$

$1+r^2=5,\ r^2=4$

$\therefore\ r=2$

$a_5=48$이므로

$a_1=a_5\times r^{-4}=48\times 2^{-4}=\frac{48}{16}=3,$

$a_4=a_5\times r^{-1}=48\times 2^{-1}=\frac{48}{2}=24$

$\therefore\ a_1+a_4=3+24=27$

〔다른 풀이〕

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>1)$이라 하자.

$$S_2=\frac{a_1(r^2-1)}{r-1},\ S_4=\frac{a_1(r^4-1)}{r-1}$$

$$\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{a_1(r^4-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^2-1)}{r-1}}=\frac{r^4-1}{r^2-1}=\frac{(r^2+1)(r^2-1)}{r^2-1}$$

$$=r^2+1$$

$r^2+1=5,\quad r^2=4$

$r=2$

Comment

하나의 등비수열에서 일정한 간격, 일정한 개수로 항들을 택해서 더한 합의 수열은 다시 등비수열이 된다.

예를 들어, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \cdots$ 의 나열에서

$b_1=(a_1+a_2),b_2=(a_3+a_4),\ b_3=(a_5+a_6),$
$\cdots$

와 같이 선택하여 만든 수열 $\{b_n\}$은 공비가 r^2인 등비수열이 된다.

#7

함수의 증가와 감소

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x+1$이 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소할 때, $b-a$의 최댓값은? (단, a, b는 $a<b$인 실수이다.) [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설 작성자	이경민

해설

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 감소하려면 이 구간에서 $f'(x) \le 0$이어야 한다.

$f'(x)=x^2-4x-5$
$\quad =(x+1)(x-5)$

이므로 부등식 $f'(x) \le 0$의 해는

$-1 \le x \le 5$

$-1 \le a < b \le 5$이므로

$b-a$의 최댓값은 $a=-1$, $b=5$일 때,

$b-a=5-(-1)=6$

Comment

2024 수능 7번과 거의 유사한 문항.
최소/최대 소재가 나와서 겁먹은 학생이 있을 수도 있겠으나 실상은 아무것도 아닌 문제.

#8

다항함수의 미분법

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$(x+1)f(x)+(1-x)g(x)=x^3+9x+1$, $f(0)=4$

일 때, $f'(0)+g'(0)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설 작성자	이경민

해설

주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=1$

$f(0)=4$이므로 $g(0)=-3$이다. …… ㉠

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x+1)f'(x)-g(x)+(1-x)g'(x)=3x^2+9$

양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f'(0)-g(0)+g'(0)=9$

㉠에서 $f(0)=4$, $g(0)=-3$이므로

$4+f'(0)-(-3)+g'(0)=9$,

$\therefore\ f'(0)+g'(0)=2$

Comment

$f'(0)$과 $g'(0)$의 값이 하나로 정해지지 않아 당황했을 수 있지만 굳이 구하지 않아도 답이 나온다.

#9 로그의 성질

좌표평면 위의 두 점 $(0, 0)$, $(\log_2 9, k)$를 지나는 직선이 직선 $(\log_4 3)x+(\log_9 8)y-2=0$에 수직일 때, 3^k의 값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 16 ② 32 ③ 64
④ 128 ⑤ 256

해설 작성자	이경민

해설

두 점 $(0,\ 0)$, $(\log_2 9,\ k)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{k}{\log_2 9}$,

직선 $(\log_4 3)x+(\log_9 8)y-2=0$의 기울기는 $-\dfrac{\log_4 3}{\log_9 8}$

두 직선이 수직이려면 두 직선의 기울기의 곱이 -1이어야 하므로

$$\frac{k}{\log_2 9}\times\left(-\frac{\log_4 3}{\log_9 8}\right)=-\frac{k\log_4 3}{\log_2 9\times\log_9 8}=-\frac{k\log_4 3}{\log_2 8}=-\frac{\log_4 3}{3}k$$

$$-\frac{\log_4 3}{3}k=-1,$$

$$\therefore\ k=\frac{3}{\log_4 3}=3\log_3 4=\log_3 64$$

$$\therefore\ 3^k=3^{\log_3 64}=64$$

#10 속도와 가속도

시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t-2,\ v_2(t)=-2t+6$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q가 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

해설 작성자	원민식

해설

두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치를 각각 $\mathrm{P}_1(t)$, $\mathrm{P}_2(t)$라 하자.

$v_1(t)-v_2(t)=3t^2-4t-8$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_1(t)-\mathrm{P}_2(t) &= \int_0^t (v_1(x)-v_2(x))dx \\ &= \int_0^t (3x^2-4x-8)dx \\ &= [x^3-2x^2-8x]_0^t \\ &= t^3-2t^2-8t\end{aligned}$$

$\mathrm{P}_1(t)-\mathrm{P}_2(t)=t^3-2t^2-8t=t(t+2)(t-4)=0$ 에서 두 점 P, Q는 $t=4$일 때 다시 만난다.

점 Q가 $t=0$에서 $t=4$까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}&\int_0^4 |v(t)|dt \\ &= \int_0^4 |-2t+6|dt \\ &= \int_0^3 (-2t+6)dt + \int_3^4 (2t-6)dt \\ &= [-t^2+6t]_0^3 + [t^2-6t]_3^4 \\ &= 9+1=10\end{aligned}$$

Comment

시각 $t(t \geq 0)$에 대하여

$$\int_0^t (v_1(x)-v_2(x))dx=0$$

을 만족시키는 t의 값이 두 점의 위치가 같아지는 지점이라는 것만 알면 간단한 문제이다.

또, 이동한 거리를 구하는 것이므로 절댓값을 반드시 고려해야 한다.

일차함수이므로 적분을 직접 계산하는 것도 좋지만, 그래프를 그려 삼각형의 넓이를 구하는 방법도 있다.

#11 등차수열

공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6 = -2,\ \sum_{k=1}^{8}|a_k| = \sum_{k=1}^{8}a_k + 42$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값은? [4점]

① 40 ② 44 ③ 48
④ 52 ⑤ 56

해설 작성자	김서영

Comment 01

등차수열이 n에 대한 일차식라는 것은 잘 알려진 사실이다. 이 사실에 기반하여 11번 문제처럼 등차수열이 절댓값과 같이 등장하는 경우가 많은데, 절댓값이 나올 경우 $a_n = 0$이 되는 항을 기준으로 좌, 우의 같은 간격으로 떨어진 항끼리 절댓값이 같고 부호가 반대인 특징을 갖는다 .
특히 이 문제의 경우 $a_6 = -2$이고 공차가 음의 정수라는 조건이 있어 꼼꼼히 확인할 필요가 있다.

Comment 02

등차수열의 합은
(등차중항) × (항의 개수)
이다.

해설

$\sum_{k=1}^{8}|a_k| - \sum_{k=1}^{8}a_k = 42$에서

7이하의 자연수 m에 대하여 $a_m < 0$라 하자.

$\sum_{k=1}^{8}|a_k| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m| + \cdots + |a_8|$

$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} - (a_m + a_{m+1} + \cdots a_8)$

이고,

$\sum_{k=1}^{8}a_k = a_1 + a_2 + \cdots a_m + a_{m+1} + \cdots + a_8$

이므로

$\sum_{k=1}^{8}|a_k| - \sum_{k=1}^{8}a_k$

$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} - (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_8)$

$-(a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_8)$

$= -2(a_m + a_{m+1} + \cdots a_8) = 42$

$\therefore\ a_m + a_{m+1} + \cdots + a_8 = -21$ …… ㉠

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d < 0)$이라 하자.

a_6, d가 모두 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

(i) $d = -1$인 경우

$a_4 = a_6 - 2d = -2 + 2 = 0$,

$a_5 = a_6 - d = -2 + 1 = -1$

이므로 $m = 5$

㉠에서

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 4 \times \frac{a_5 + a_8}{2}$$
$$= 4 \times \frac{-1 + (-4)}{2} = -10$$

이므로 모순이다.

(ii) $d = -2$인 경우

$a_5 = a_6 - d = -2 + 2 = 0$,

$a_6 = -2$

이므로 $m = 6$

㉠에서

$a_6 + a_7 + a_8 = 3a_7 = 3 \times (-4) = -12$

이므로 모순이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $d<-2$이고, $a_5>0$, $a_6<0$

이다.

$n\le 5$일 때 $a_n>0$이고 $|a_n|=a_n$

$n\ge 6$일 때 $a_n<0$이고 $|a_n|=-a_n$

이므로 $m=6$

㉠에서 $a_6+a_7+a_8=3a_7=3\times(-2+d)=-21$,

$-2+d=-7$, $\quad d=-5$

$a_1=a_6-5d=-2+25=23$,

$a_8=a_6+2d=-2-10=-12$

이므로

$$\sum_{k=1}^{8}a_k=8\times\frac{a_1+a_8}{2}=8\times(23-12)=44$$

#12 정적분의 활용

실수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+3x+a & (x<0) \\ 3x+a & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. 함수

$$g(x)=\int_{-4}^{x} f(t)dt$$

가 $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은? [4점]

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

해설 작성자	김대현

Comment

함수 $f(x)$는 연속함수이고, 함수 $g(x)$는 열린구간 $(-4,\ x)$에서 함수 $f(x)$의 정적분이므로 함수 $g(x)$는 미분가능하고
모든 실수 x에 대하여 $g'(x)=f(x)$이다.
모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이면
$x>-4$에서 함수 $g(x)$는 증가하므로
$x=2$일 때, 극솟값을 가지지 않는다.
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 교점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면, 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 $f(x)<0$이다.

(i) $\alpha<-4$인 경우
$\alpha<-4$이면 열린구간 $(-4,\ \beta)$에서 $f(x)<0$이므로
함수 $g(x)$는 이 구간에서 감소하고,
열린구간 $(\beta,\ \infty)$에서 $f(x)>0$이므로
함수 $g(x)$는 이 구간에서 증가한다.
따라서 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다.

(ii) $\alpha\ge-4$인 경우
$\alpha\ge-4$이면, 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 $f(x)<0$이므로
함수 $g(x)$는 감소하고, 열린구간 $(\beta,\ \infty)$에서 $f(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 이 구간에서 증가한다.
따라서 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값을 갖는다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$는 $x=\beta$에서 극솟값을 가지므로 $\beta=2$이다.

해설

$g(x)=\int_{-4}^{x} f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$이므로

$$g'(x)=\begin{cases}3x^2+3x+a & (x<0)\\ 3x+a & (x\geq 0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$g'(2)=6+a=0$, $\quad a=-6$

$$g'(x)=\begin{cases}3(x+2)(x-1) & (x<0)\\ 3(x-2) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이므로

$g(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$$g(-2)=\int_{-4}^{-2}(3t^2+3t-6)dt$$

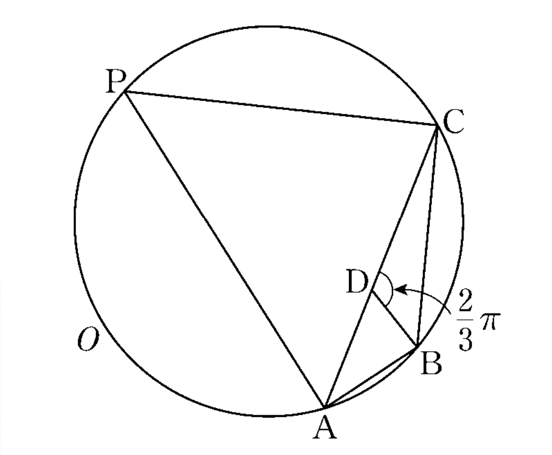
$$=\left[t^3+\frac{3}{2}t^2-6t\right]_{-4}^{-2}=26$$

#13 사인법칙과 코사인법칙

그림과 같이

$$2\overline{AB}=\overline{BC},\ \cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{QA}=6\sqrt{10}$이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle CDB=\frac{2}{3}\pi$일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는? [4점]



① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

해설 작성자	오성원

해설

삼각형 PAC에서 선분 AC의 길이는 변하지 않으므로 넓이가 최대가 되려면 점 P가 $\overline{PA}=\overline{PC}$이고, 점 B를 포함하지 않는 호 AC 위에 존재해야한다.

이때의 점 P가 점 Q이므로 $\overline{QA}=\overline{QC}=6\sqrt{10}$

사각형 ABCQ에서 $\angle AQC+\angle ABC=\pi$이므로

$\angle AQC=\pi-\angle ABC$

삼각형 AQC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=\overline{QA}^2+\overline{QC}^2-2\times\overline{QA}\times\overline{QC}\times\cos(\angle AQC)\\&=2\times(6\sqrt{10})^2-2\times(6\sqrt{10})^2\times\cos(\pi-\angle ABC)\\&=720+720\times\cos(\angle ABC)\\&=720+720\times\left(-\frac{5}{8}\right)\\&=270\quad(\because\ \cos(\pi-\angle ABC)=-\cos(\angle ABC))\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{AC}=3\sqrt{30}$

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=k(k>0)$라 하면 $\overline{BC}=2k$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$,

$$\begin{aligned}270&=k^2+(2k)^2-2\times k\times(2k)\times\left(-\frac{5}{8}\right)\\&=k^2+4k^2+\frac{5}{2}k^2\\&=\frac{15}{2}k^2\end{aligned}$$

$\frac{15}{2}k^2=270,\quad\therefore\ k=6$

삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이를 $R(R>0)$이라 할 때, 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)}=\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{24}{\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$$

$2R=8\sqrt{3},\quad\therefore\ R=4\sqrt{3}$

#14 함수의 그래프

두 정수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\dfrac{a^2}{4}+b^2 & (x \le 0) \\ x^3-3x^2+5 & (x>0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수가 2가 되도록 하는 두 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

해설 작성자	오성원

Comment 01

14번 문항은 객관식 문항 중에서는 가장 어려운 문제이지만 2024학년도 수능 14번과 거의 같은 문제라고 봐도 무방할 만큼 닮았다. 그리고 14번과 같이 구간별로 정의된 함수와 직선과의 교점의 개수를 함수로 두고, 그 함수의 불연속 지점을 묻는 문제는 이제는 너무 흔한 소재이다.

<u>기출공부를 소홀히 하지 말자</u>

Comment 02

곡선과 직선 사이의 교점의 개수의 변화는 특수한 기준점들이 존재한다. 곡선의 극점, 불연속점, 점근선 위의 점 등이다.
실전에서는 이 지점들을 기준으로 변화를 관찰하는 것이 현명하다.

해설

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+\dfrac{a^2}{4}+b^2 & (x \le 0) \\ x^3-3x^2+5 & (x>0) \end{cases}$에서

$f_1(x)=x^2-2ax+\dfrac{a^2}{4}+b^2$, $f_2(x)=x^3-3x^2+5$

라 하자.

함수 $f_2(x)=x^3-3x^2+5$에 대하여

$f'_2(x)=3x^2-6x$이고,

방정식 $f'_2(x)=0$의 두 실근은 $x=0$, $x=2$ 이므로

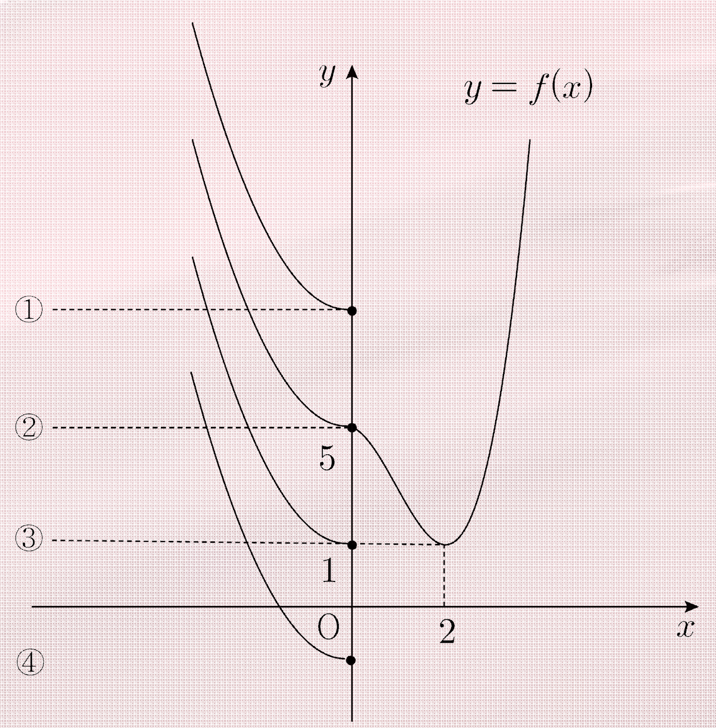
함수 $f_2(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'_2(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_2(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f_1(x)=(x-a)^2+b^2-\dfrac{3}{4}a^2$이므로 a, b의 값에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

(i) $a=0$인 경우

$f_1(x)=x^2+b^2$이고, $f(0)=f_1(0)=b^2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $f(0)$의 값에 따라 다음과 같이 그려진다.



① $b^2>5$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t=b^2$, $t=5$, $t=1$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 3이다

② $b^2=5$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t=1$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 1이다.

③ $1<b^2<5$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t=5$, $t=b^2$, $t=1$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 3이다.

④ $b^2=1$ 일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t=5$, $t=1$에서 불연속이므로 실수 k의 개수는 2이다.

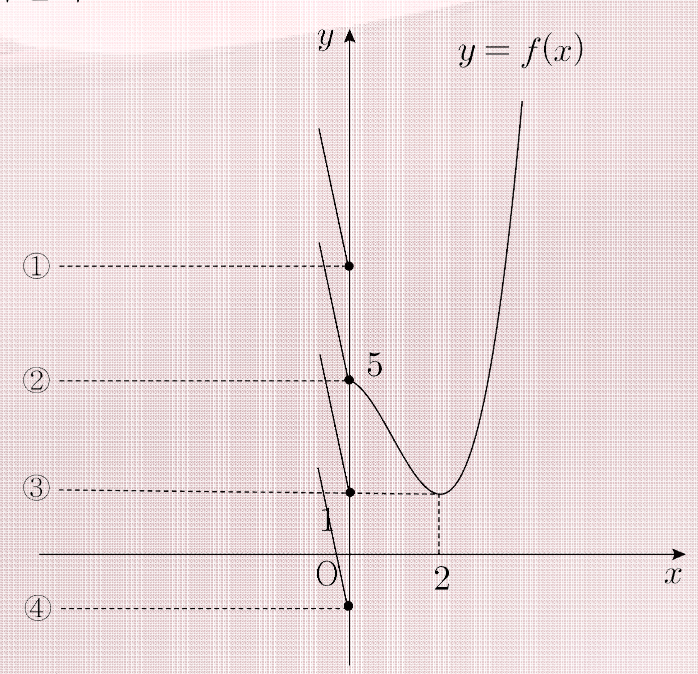
⑤ $b^2<1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t=5$, $t=1$, $t=b^2$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 3이다.

④인 경우에 실수 k의 개수가 2이므로 $a=0$, $b^2=1$이다. 두 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$로 가능한 것은 $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$이므로 개수는 2이다.

(ii) $a>0$인 경우

$f_1(x)=(x-a)^2+b^2-\dfrac{3}{4}a^2$이고,

$f(0)=f_1(0)=\dfrac{1}{4}a^2+b^2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $f(0)$의 값에 따라 다음과 같이 그려진다.



① $\dfrac{1}{4}a^2+b^2>5$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$

는 $t=\frac{1}{4}a^2+b^2$, $t=5$, $t=1$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 3이다.

② $\frac{1}{4}a^2+b^2=5$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t=1$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 1이다.

③ $1<\frac{1}{4}a^2+b^2<5$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t=5$, $t=\frac{1}{4}a^2+b^2$, $t=1$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 3이다.

④ $\frac{1}{4}a^2+b^2=1$ 일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t=5$, $t=1$에서 불연속이므로 실수 k의 개수는 2이다.

⑤ $\frac{1}{4}a^2+b^2<1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t=5$, $t=1$, $t=a^2+b^2$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 3이다.

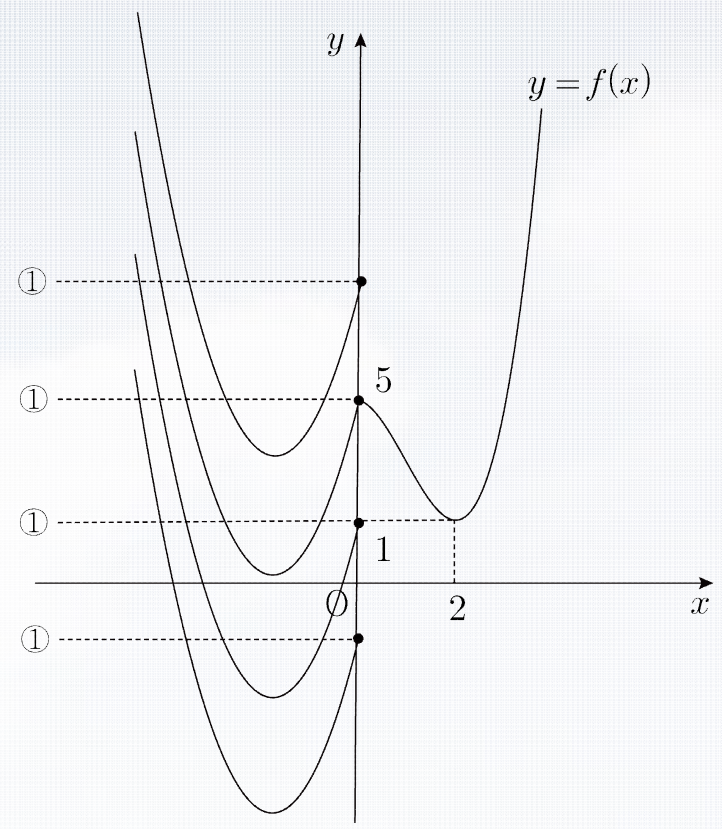
④인 경우에 실수 k의 개수가 2이므로 $\frac{1}{4}a^2+b^2=1$이다. 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)로 가능한 것은 $(2, 0)$뿐이므로 개수는 1이다.

(iii) $a<0$인 경우

$f_1(x)=(x-a)^2+b^2-\frac{3}{4}a^2$이고,

$f(a)=b^2 f(0)=f_1(0)=\frac{1}{4}a^2+b^2$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $f(a)$, $f(0)$의 값에 따라 다음과 같이 그려진다.



① $\frac{1}{4}a^2+b^2>5$일 때, $b^2>1$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{4}a^2+b^2$, $t=5$, $t=b^2$, $t=1$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 4이고,

$b^2=1$이면 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{4}a^2+b^2$, $t=5$, $t=1$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 3이다.

$b^2<1$이면 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{4}a^2+b^2$, $t=5$, $t=1$, $t=b^2$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 4이다.

② $\frac{1}{4}a^2+b^2=5$일 때, $b^2>1$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t=5$, $t=b^2$, $t=1$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 3이고, $b^2=1$이면 함수 $g(t)$는 $t=5$, $t=1$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 2이다. 또, $b^2<1$이면 함수 $g(t)$는 $t=5$, $t=1$, $t=b^2$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 3이다.

③ $1 < \frac{1}{4}a^2 + b^2 < 5$일 때, $b^2 > 1$이면 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t = 5$, $t = \frac{1}{4}a^2 + b^2$, $t = b^2$, $t = 1$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 4이고,

$b^2 = 1$이면 함수 $g(t)$는 $t = 5$, $t = \frac{1}{4}a^2 + b^2$, $t = 1$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 3이다.

또한, $b^2 < 1$이면 함수 $g(t)$는 $t = 5$, $t = \frac{1}{4}a^2 + b^2$, $t = 1$, $t = b^2$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 4이다.

④ $\frac{1}{4}a^2 + b^2 = 1$ 일 때, $b^2 < 1$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t = 5$, $t = 1$, $t = b^2$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 3이다.,

⑤ $\frac{1}{4}a^2 + b^2 < 1$일 때, $b^2 < 1$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 개수 $g(t)$는 $t = 5$, $t = 1$, $t = \frac{1}{4}a^2 + b^2$, $t = b^2$에서만 불연속이므로 실수 k의 개수는 4이다.

②인 경우에 $\frac{1}{4}a^2 + b^2 = 5$, $b^2 = 1$일 때, 실수 k의 개수가 2이다 두 정수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$로 가능한 것은 $(-4,\ 1)$, $(-4,\ -1)$이므로 개수는 2이다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 가능한 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$, $(2,\ 0)$, $(-4,\ 1)$, $(-4,\ -1)$ 이므로 개수는 5

#15 수학적 귀납법

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & (a_n>n) \\ 3n-2-a_n & (a_n \le n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱은? [4점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

해설 작성자	오성원

해설

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & (a_n>n) \\ 3n-2-a_n & (a_n \le n) \end{cases}$$

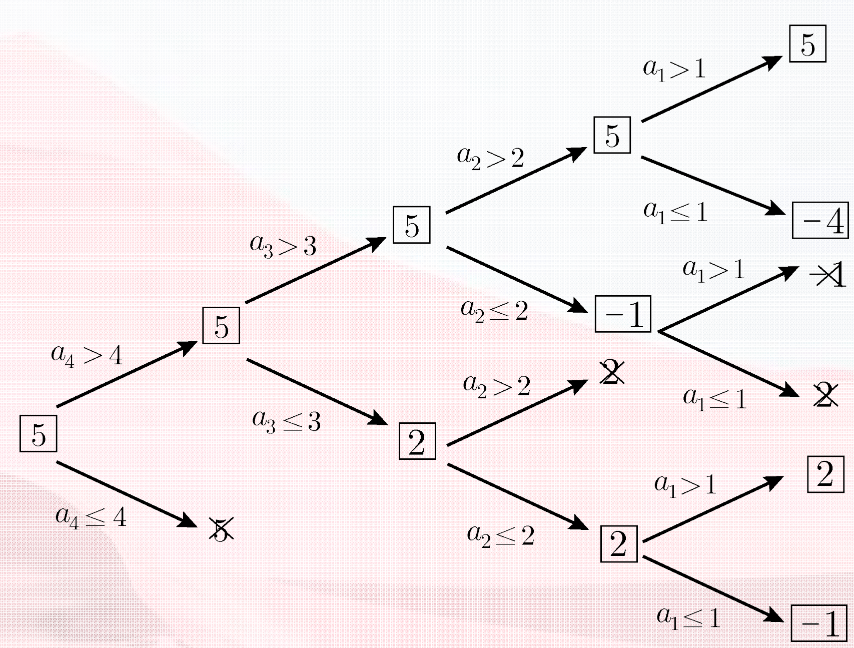
이므로 a_n에 대하여 정리하면

$$a_n=\begin{cases} a_{n+1} & (a_n>n) \\ 3n-2-a_{n+1} & (a_n \le n) \end{cases}$$

이다.

$a_5=5$이므로 위 식에 $n=4$부터 $n=1$까지 대입하여 조건에 맞게 수형도를 그리면 다음과 같다.

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1



따라서 모든 a_1의 값은 -1, -4, 2, 5이므로 그 곱은 40

Comment

15번 문항도 아주 흔한 수열 역추적 문항이다. 점화식이 주는 겉보기 등급에 위축될 필요가 없다. 수형도를 그려가며 조건을 만족시키는 가지만 남기는 느낌으로 차근차근 도전하자.

#16

지수방정식

방정식 $4^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-9}$ 을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

해설 작성자	이경민

해설

$2^{2x} = 2^{9-x}$

$2x = 9 - x$, $\quad \therefore \ x = 3$

#17

정적분

$\int_0^2 (3x^2-2x+3)dx - \int_2^0 (2x+1)dx$의 값을 구하시오. [3점]

해설 작성자	이경민

해설

$$\int_0^2 (3x^2-2x+3)dx - \int_2^0 (2x+1)dx$$
$$= \int_0^2 (3x^2-2x+3)dx + \int_0^2 (2x+1)dx$$
$$= \int_0^2 (3x^2+4)dx$$
$$= \left[x^3+4x\right]_0^2$$
$$= 16$$

#18 수열의 합

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{9} a_k = 137, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{9} 2a_k = 101$$

일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [3점]

해설 작성자	이경민

해설

$\sum_{k=1}^{10} a_k = a_{10} + \sum_{k=1}^{9} a_k$이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{9} a_k = a_{10} + 2\times\sum_{k=1}^{9} a_k = 137 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{9} 2a_k = a_{10} + \sum_{k=1}^{9} a_k - 2\times\sum_{k=1}^{9} a_k$$

$$= a_{10} - \sum_{k=1}^{9} a_k = 101 \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$3\sum_{k=1}^{9} a_k = 36$, $\therefore \sum_{k=1}^{9} a_k = 12$

㉠에서 $a_{10} + 2\sum_{k=1}^{9} a_k = 137$

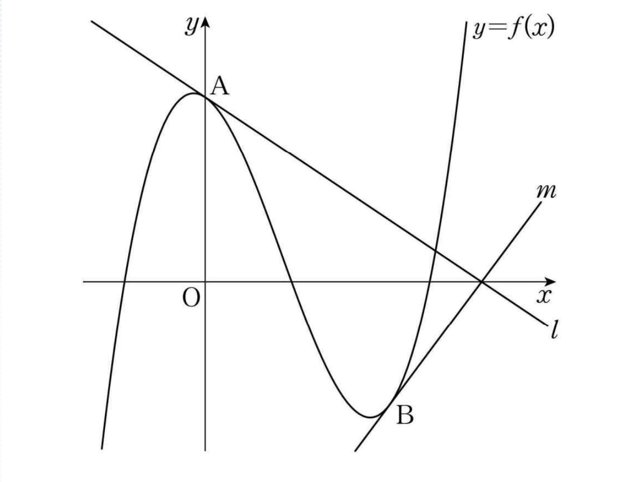
$\therefore a_{10} = 113$

#19

접선의 방정식

실수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2+ax+2$

이다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,2)$, $\mathrm{B}(2,f(2))$에서의 접선을 각각 l, m이라 하자. 두 직선 l, m이 만나는 점이 x축 위에 있을 때, $60\times|f(2)|$의 값을 구하시오. [3점]



해설 작성자	이경민

해설

$f'(x)=3x^2-5x+a$이므로

$f'(0)=a$, $f'(2)=a+2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y=ax+2$

$f(2)=2a$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선의 방정식은

$y=(a+2)(x-2)+2a$

두 직선이 x축 위의 점에서 만나므로 두 직선의 교점의 x좌표를 k라 할 때,

$$\begin{cases} ak+2=0 \\ (a+2)(k-2)+2a=0 \end{cases}$$

$ak=-2$이므로

$(a+2)(k-2)+2a=ak+2k-4=2k-6=0$

$2k-6=0$, $\quad\therefore k=3$

$3a=-2$, $\quad\therefore a=-\frac{2}{3}$

$|f(2)|=|2a|=\frac{4}{3}$

$\therefore\ 60\times|f(2)|=60\times\frac{4}{3}=80$

#20 삼각방정식

두 함수 $f(x)=2x^2+2x-1$, $g(x)=\cos\frac{\pi}{3}x$에 대하여 $0 \le x < 12$에서 방정식

$f(g(x))=g(x)$

를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합을 구하시오. [4점]

해설 작성자	오성원

Comment

삼각함수의 그래프는 대칭성과 주기성이 핵심이 되는 주제이다.
특히, 삼각방정식의 실근의 합을 구할 때, 자주 사용해야 한다.

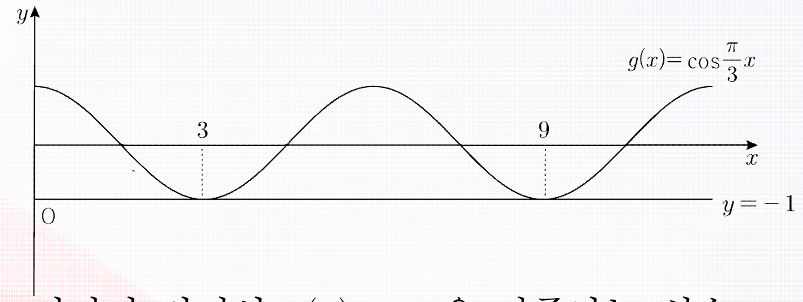
해설

방정식 $f(g(x))=g(x)$에서 $g(x)=t(-1 \le t \le 1)$라 하면 방정식 $f(t)=t$, 즉 $2t^2+2t-1=t$에서

$(2t-1)(t+1)=0$, $\quad \therefore\ t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

(i) $t=-1$인 경우, 즉 $g(x)=-1$인 경우

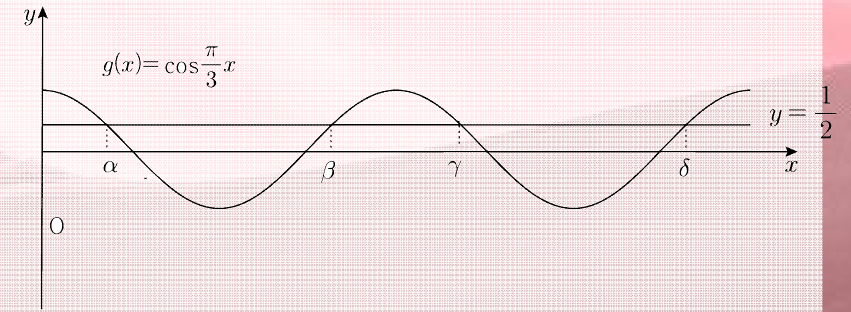
함수 $g(x)$의 주기 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$이므로 $0 \le x < 12$에서 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$의 그래프를 각각 그리면 다음과 같다.



따라서 방정식 $g(x)=-1$을 만족하는 실수 x의 값은 3, 9이다.

(ii) $t=\frac{1}{2}$인 경우, 즉 $g(x)=\frac{1}{2}$인 경우

$0 \le x < 12$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 그래프를 각각 그리면 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 그래프의 교점의 x좌표를 크기가 작은 순서대로 α, β, γ, δ라 하자.
함수 $y=g(x)$의 그래프는 $0 \le x < 12$에서 직선 $x=6$에 대하여 선대칭인 함수이므로

$\frac{\alpha+\delta}{2}=6$, $\quad \therefore\ \alpha+\delta=12$

$\frac{\beta+\gamma}{2}=6$, $\quad \therefore\ \beta+\gamma=12$

(i), (ii)에 의하여 방정식 $f(g(x))=g(x)$를

만족시키는 실수 x의 값의 합은

$3+9+(\alpha+\delta)+(\beta+\gamma)=36$

#21 지수함수와 로그함수

$a>2$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1인 직선이 두 곡선

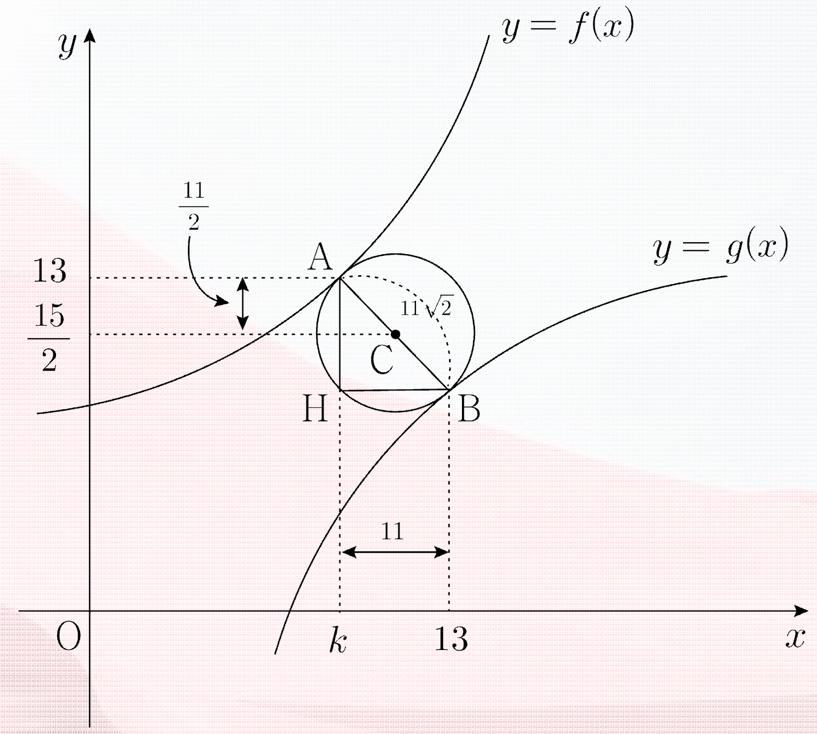
$$y=a^x+2,\ y=\log_a x+2$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 하자.
선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y좌표가 $\frac{19}{2}$이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$일 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

해설 작성자	오성원

해설

두 함수 $y=a^x+2$, $y=\log_a x+2$의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프를 각각 $y=f(x)$, $y=g(x)$라 하자.
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 기울기가 -1인 직선이 만나는 점을 각각 A′, B′이라 하면 두 점 A′, B′을 지름으로 하는 원은 두 점 A, B를 지름으로 하는 원과 합동이고 중심의 y좌표는 $\frac{15}{2}$이다. 원의 넓이가 $\frac{121\pi}{2}$이므로 원의 반지름의 길이는 $\frac{11}{2}\sqrt{2}$, $\therefore\ \overline{\mathrm{A'B'}}=11\sqrt{2}$



원의 중심을 C, 점 A′을 지나고 y축에 평행한 직선과 점 B′을 지나고 x축에 평행한 직선이 만나는 점을 H이라 할 때, 삼각형 A′HB′은 빗변의 길이가 $11\sqrt{2}$인 직각이등변삼각형이다.
삼각형 A′HB′에서 $\overline{\mathrm{A'B'}}=11\sqrt{2}$이고,
$\angle \mathrm{A'B'H}=\frac{\pi}{4}$이므로 $\overline{\mathrm{A'H}}=\overline{\mathrm{B'H}}=11$ …… ㉠
점 C에서 선분 AM에 내린 수선의 발을 N이라 할 때, $\overline{\mathrm{A'N}}=\overline{\mathrm{B'N}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A'H}}=\frac{11}{2}$ …… ㉡
이므로 점 A′의 y좌표는 13
점 A′의 x좌표를 k라 하면 $a^k=13$
㉠, ㉡에 의하여 점 B′의 좌표는 $(k+11,\ 2)$
점 A′, B′은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로
$k+11=13$, $\therefore\ k=2$
$\therefore\ a^k=a^2=13$

Comment 01

이 문제는 2022학년도 6월 평가원 모의고사에 출제되었던 지수함수와 로그함수의 그래프 문제와 핵심내용이 동일하다.
마찬가지로 기출공부를 잘 했다면 너무나 익숙한 문항이다.

Comment 02

밑이 같은 지수함수와 로그함수가 함께 등장하면 역함수 관계를 우선으로 떠올리며 역함수 관계인 함수들의 성질을 이용하도록 하자
또, 기울기가 1 또는 -1인 직선은 기하적으로 45°의 각을 만들어 낸다는 것을 기억하고, 직각삼각형 위주로 분석해 나가는 것이 좋다.

#22 도함수 활용

함수 $f(x)=|x^3-3x+8|$과 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 미분가능하지 않다. $\alpha\beta=m+n\sqrt{6}$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이다.) [4점]

해설 작성자	이경민

Comment

기존의 22번은 항상 함수 추론 형태의 문제가 나왔으나 이번 문항의 경우는 함수 전체를 주고 그 함수의 특징을 파악하는 문제였다. 이 문제는 이미 함수가 제공되었기에 절대적인 난이도가 그다지 어려운 편은 아니었지만, 22번의 이전 출제 기조와는 확실히 다르게 단순한 개형 추론 문제 뿐만 아니라 다른 유형의 문제도 충분히 출제할 수 있기 때문에 정리해둘 필요가 있다.

해설

함수 $h(x)=x^3-3x+8$이라 하자.

$h'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

이므로 함수 $h(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

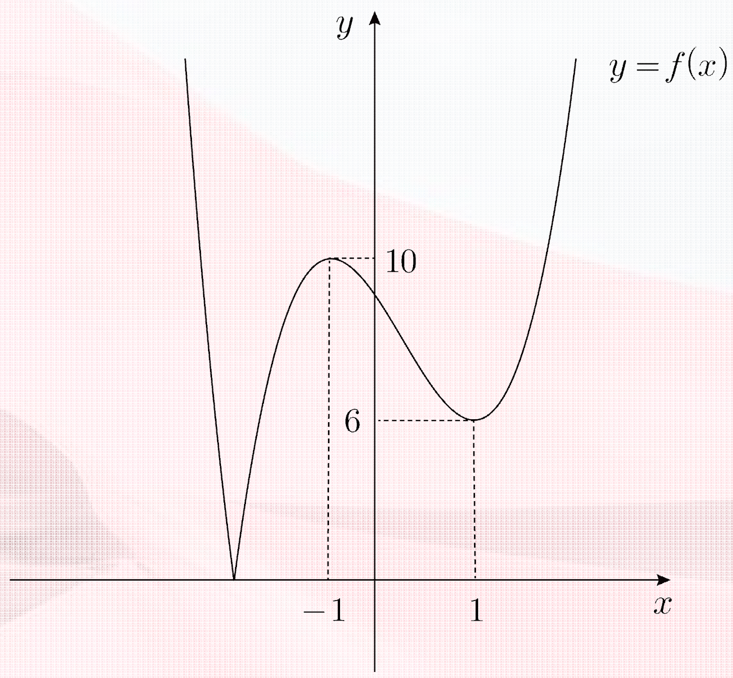
함수 $h(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=1$에서 극소이고 극댓값은 $h(-1)=10$, 극솟값은 $h(1)=6$이다.

$f(x)=|h(x)|$이고

$h(-1)>0$, $h(1)>0$이므로 함수 $f(x)$도

$x=-1$에서 극대이고, $x=1$에서 극소이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=10$의 그래프가 $x=-1$이 아닌 점에서 만날 때, 교점의 x의 좌표는 방정식 $|h(x)|=10$의 실근이다.

$|x^3-3x+8|=10$, $x^3-3x+8=\pm 10$

$x^3-3x+18=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$x^3-3x-2=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $(x+3)(x^2-3x+6)=0$이고

방정식 $x^2-3x+6=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-3)^2-4\times 6<0$이므로 실근을 갖지 않는다.

$\therefore\ x=-3$

㉡에서 $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=2$

닫힌구간 $[t, t+2]$에서의 $f(x)$의 최댓값 $g(t)$는

다음과 같다.

(i) $t<-3$인 경우

$f(t)>f(-1)$이므로 $g(t)=f(t)$.

(ii) $-3\le t<-1$인 경우

$f(t)\le f(-1)=10$이므로 $g(t)=10$

(iii) $t\ge -1$인 경우

방정식 $f(t)=f(t+2)$에서

$t^3-3t+8=(t+2)^3-3(t+2)+8$

$6t^2+12t+2=0$

$\therefore\ t=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}\ \ (\because\ t>-1)$

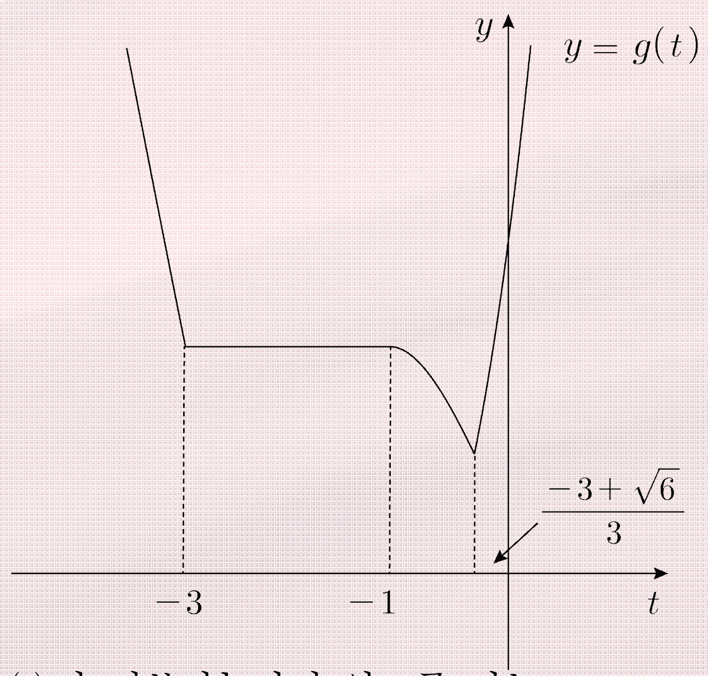
$-1\le t<\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$일 때, $f(t)=g(t)$이고,

$t\ge\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$일 때, $g(t)=f(t+2)$

(i) ~ (iii)에 의하여 함수

$$g(t)=\begin{cases} f(t) & (t<-3) \\ 10 & (-3\le t<-1) \\ f(t) & \left(-1\le t<\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}\right) \\ f(t+2) & \left(t\ge\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}\right) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(t)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



$g(t)$가 미분가능하지 않도록 하는

모든 t의 값은 $t=-3$, $t=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$이다.

$\alpha=-3,\ \beta=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}\ \ \alpha\beta=3-\sqrt{6}$

$\therefore\ m+n=3+(-1)=2$

#23

중복조합

${}_{3}H_{3}$의 값은? [2점]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

해설 작성자	김서영

해설

${}_{3}H_{3} = {}_{3+3-1}C_{3} = {}_{5}C_{3} = 10$

#24 중복순열

숫자 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중 홀수의 개수는? [3점]

① 30 ② 36 ③ 42
④ 48 ⑤ 54

해설 작성자	김서영

해설

네 자리 자연수가 홀수가 되려면 일의 자리 숫자가 홀수여야 한다.
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3이므로
2가지
남은 세 자리에 올 수 있는 숫자는 각각
3가지이므로 ${}_3\Pi_3 = 27$
따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 27 = 54$

Comment

[배수 판별법]
2의 배수
: 일의 자리 숫자가 0 또는 짝수인 수
3의 배수
: 각 자리의 수의 합이 3의 배수가 되는 수
4의 배수
: 끝의 두 자리가 00이거나 4의 배수인 수
5의 배수
: 일의 자리 숫자가 0 또는 5인 수
9의 배수
: 각 자리의 수의 합이 9의 배수인 수

#25 원순열

남학생 5명, 여학생 2명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 여학생끼리 이웃하여 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 200 ② 240 ③ 280
④ 320 ⑤ 360

해설 작성자	김서영

해설

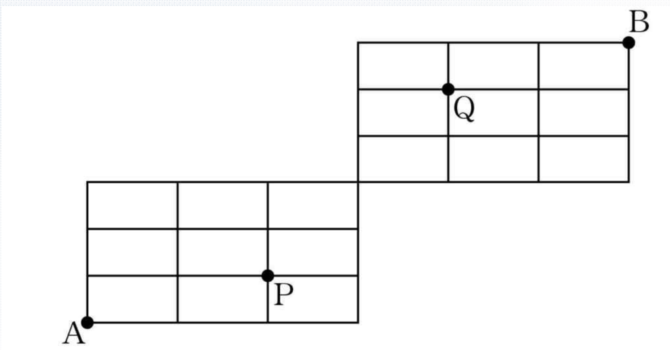
이웃하는 여학생 2명을 한 묶음으로 보면 6명을 원순열로 나열하는 것과 같다.
6명을 나열하는 원순열의 수는 $(6-1)! = 120$
여학생 2명의 자리를 정하는 방법의 수는 $2!$
구하는 경우의 수는 $120 \times 2! = 240$

Comment

이웃하는 것들을 하나로 보더라도, 이웃하는 것들 사이의 순서도 고려해야 한다.

#26 같은 것이 있는 순열

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 최단 거리로 갈 때, P지점을 지나면서 Q지점을 지나지 않는 경우의 수는? [3점]



① 72 ② 81 ③ 90
④ 99 ⑤ 108

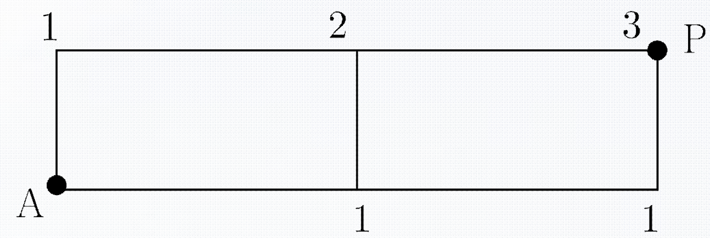
해설 작성자	김서영

해설

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 갈 때, P지점을 지나면서 Q 지점을 지나지 않는 경우의 수는 A 지점에서 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 A 지점에서 P 지점과 Q 지점을 모두 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것 과 같다.

(i) A → P → B인 경우

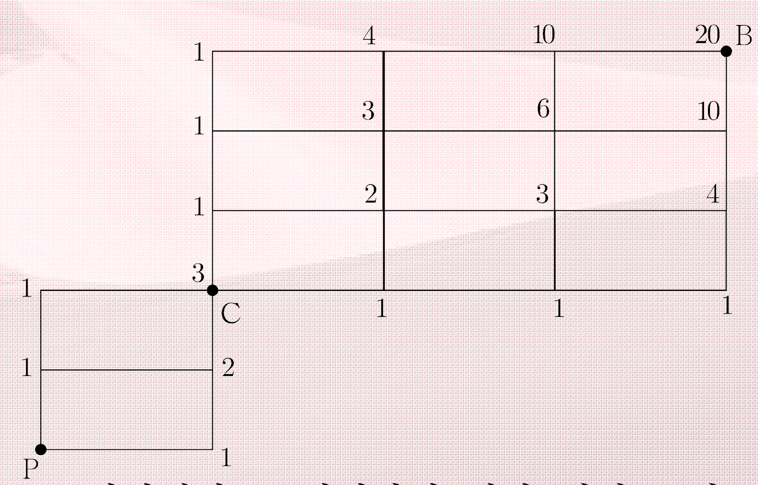
① A → P인 경우



오른쪽으로 한 칸을 가는 경우를 a, 위로 한 칸을 가는 경우를 b라 할 때, A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 aab를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$

또는 그림과 같이 합의 법칙에 의하여 경우의 수는 3

② P → B 인 경우



P 지점에서 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 abb를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$,

C지점에서 B 지점까지 최단 거리고 가는 경우의 수는 $aaabbb$를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{6!}{3!3!}=20$

또는 그림과 같이 합의 법칙에 의하여

P 지점에서 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3,

C 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 20

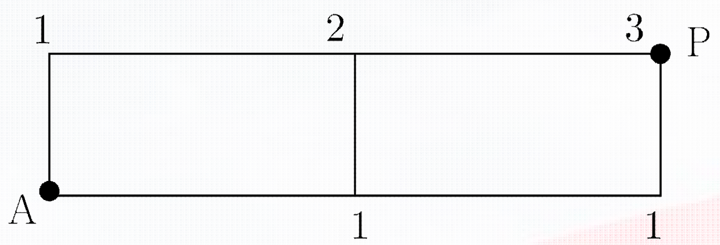
이므로 P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $3 \times 20 = 60$

따라서 A 지점에서 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$3 \times 60 = 180$

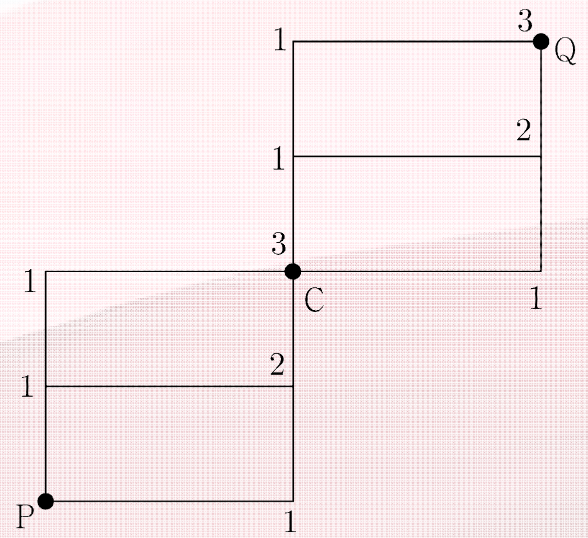
(ii) A → P → Q → B인 경우

① A → P인 경우



(i) 에 ①에 의하여 3

② P → Q인 경우



P 지점에서 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 abb를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!} = 3$,

C지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 abb를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!} = 3$

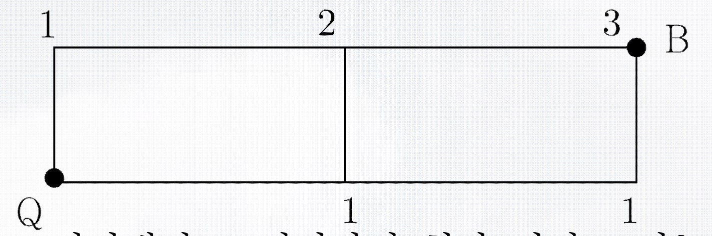
또는 그림과 같이 합의 법칙에 의하여

P 지점에서 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3,

C 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3

이므로 P 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$

③ Q → B인 경우



Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 aab를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!} = 3$

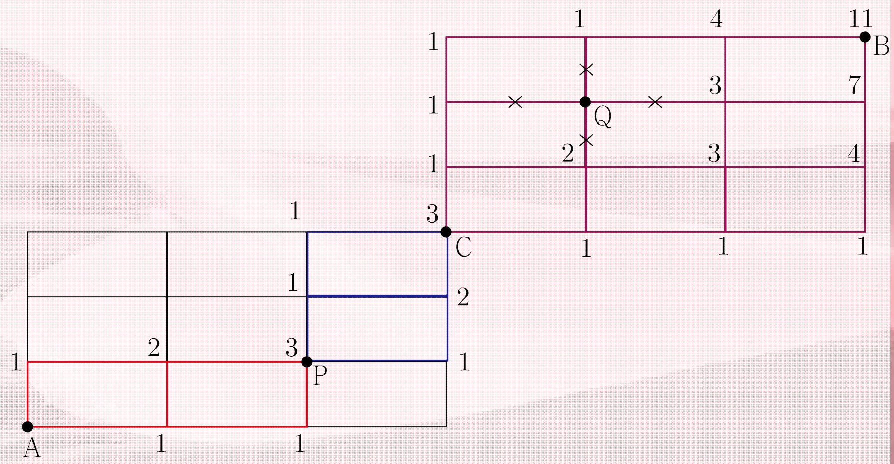
또는 합의 법칙에 의하여 경우의 수는 3

따라서 A 지점에서 P 지점과 Q 지점을 모두 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $3 \times 9 \times 3 = 81$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$180 - 81 = 99$

〔다른 풀이〕



전체 경로에서 Q 지점을 지나는 경로를 제외하면 합의 법칙에 의하여 A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3,

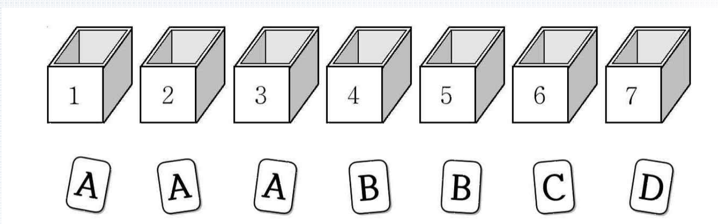
P 지점에서 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3,

C 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 11

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 3 \times 11 = 99$

#27 같은 것이 있는 순열

그림과 같이 문자 A, A, A, B, B, C, D가 각각 하나씩 적혀 있는 7장의 카드와 1부터 7까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 7개의 빈 상자가 있다.



각 상자에 한 장의 카드만 들어가도록 7장의 카드를 나누어 넣을 때, 문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되도록 나누어 넣는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [3점]

① 144 ② 168 ③ 192
④ 216 ⑤ 240

해설 작성자	김서영

해설

문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 홀수가 적힌 상자의 개수가 1인 경우

홀수가 적힌 상자 1개와 짝수가 적힌 상자 2개를 선택하는 경우의 수는

$_4C_1 \times {_3C_2} = 4 \times 3 = 12$

선택한 상자에 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누어 넣는 경우의 수는 $\frac{3!}{3!} = 1$이므로

$12 \times 1 = 12$

(ii) 홀수가 적힌 상자의 개수가 3인 경우

홀수가 적힌 상자 3개를 선택하는 경우의 수는 $_4C_3 = 4$

선택한 상자에 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누어 넣는 경우의 수는 $\frac{3!}{3!} = 1$이므로

$4 \times 1 = 4$

(i), (ii)에 의하여 문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우의 수는 $12 + 4 = 16$

나머지 4개의 상자에 남은 4개의 카드 B, B, C, D를 나누어 넣는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$

따라서 구하는 경우의 수는 $16 \times 12 = 192$

#28 경우의 수

다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [4점]

(가) $ab^2c = 720$
(나) a와 c는 서로소가 아니다.

① 38 ② 42 ③ 46
④ 50 ⑤ 54

해설 작성자	김서영

Comment 01

자주 헷갈리는 내용들
- 1은 모든 자연수와 서로소이다. (O)
- 서로 다른 두 소수는 항상 서로소이다. (O)
- 서로소인 두 자연수는 모두 소수이다. (X)

Comment 02

조건 (나)에 의하여 a, c는 서로소가 아니기 때문에 2 또는 3를 공약수로 가진다.
이를 이용해 a, c가 각각 2 또는 3을 약수로 가지는 케이스를 나누어서 풀어도 좋지만, 조건 (나)가 여사건을 사용할 여지를 주고 있으므로 이 문제는 전체 약수의 개수에서 a, c가 서로소인 경우 (즉, 공약수가 1뿐인 경우)를 빼는 것이 쉽다.

해설

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$이므로 자연수 b의 값에 따라 순서쌍 a, c는 다음과 같이 정해진다.

(ⅰ) $b = 1$인 경우

$ac = 2^4 \times 3^2 \times 5$이므로 a, c는 $2^4 \times 3^2 \times 5$의 약수이다. 가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^4 \times 3^2 \times 5$의 약수의 개수에서 서로소일 때를 뺀 것이다.

$2^4 \times 3^2 \times 5$의 약수의 개수는
$(4+1) \times (2+1) \times (1+1) = 5 \times 3 \times 2 = 30$
이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로
2^4이 a 또는 c의 약수인 2가지
3^2이 a 또는 c의 약수인 2가지
5가 a 또는 c의 약수인 2가지
이므로 $2 \times 2 \times 2 = 8$
서로소가 아닌 자연수 a, c의 모든 순서쌍 (a, c)의 개수는 $30 - 8 = 22$

(ⅱ) $b = 2$인 경우

$ac = 2^2 \times 3^2 \times 5$
약수의 개수는
$(2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$
이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로
2^2이 a 또는 c의 약수인 2가지
3^2이 a 또는 c의 약수인 2가지
5가 a 또는 c의 약수인 2가지
이므로 $2 \times 2 \times 2 = 8$
서로소가 아닌 자연수 a, c의 모든 순서쌍 (a, c)의 개수는 $18 - 8 = 10$

(ⅲ) $b = 3$인 경우

$ac = 2^4 \times 5$
약수의 개수는 $(4+1) \times (1+1) = 5 \times 2 = 10$
이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로
2^4이 a 또는 c의 약수인 2가지
5가 a 또는 c의 약수인 2가지

이므로 $2\times2=4$

서로소가 아닌 자연수 a, c의 모든 순서쌍 (a, c)의 개수는 $10-4=6$

(ⅳ) $b=4$인 경우

$ac=3^2\times5$이므로 a와 c가 서로소가 아닌 모든 순서쌍 (a, c)는 $(3, 15)$ 또는 $(15, 3)$이므로 순서쌍의 개수는 2

(ⅴ) $b=6$인 경우

$ac=2^2\times5$이므로 a와 c가 서로소가 아닌 모든 순서쌍 (a, c)는 $(2, 10)$ 또는 $(10, 2)$이므로 순서쌍의 개수는 2

(ⅵ) $b=12$인 경우

조건을 만족하는 순서쌍 (a, c)는 존재하지 않는다.

(ⅰ)~(ⅵ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$22+10+6+2+2=42$

#29 경우의 수

세 명의 학생에게 서로 다른 종류의 초콜릿 3개와 같은 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(가) 적어도 한 명의 학생은 초콜릿을 받지 못한다.
(나) 각 학생이 받는 초콜릿의 개수와 사탕의 개수의 합은 2 이상이다.

해설 작성자	김서영

Comment 01

초콜릿이 다르기에 중복 조합으로 풀지 않도록 주의하자.

Comment 02

'적어도~' 의 조건은 꼭 여사건이 아닐 수도 있다.
(가) 조건만 보고 '모두에게 초콜릿 하나씩 주는 사건을 빼면 되겠네?' 싶어서 여사건으로 접근했다면 어려움을 느꼈을 것이다. (나) 조건에서 '각 학생이 받는' 개수를 주었기에 초콜릿을 하나씩 주고 사탕을 주는 경우는 구하기 쉽지만,
(나) 조건을 만족하는 전체 사건을 구하기 어려웠을 것이다.
이 문제는 (나) 조건을 지키면서 (가) 조건을 고려하기 어렵기에 이 문제는 여사건이 아닌 못 받는 학생 수를 기준으로 문제를 푸는 것이 좋다.
발문만 보고 여사건으로 접근 하더라도 막히면 다른 방법으로 풀 줄 알아야 한다.

해설

(ⅰ) 1명의 학생이 초콜릿을 받지 못하는 경우

초콜릿을 받지 못하는 1명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

남은 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 2개, 1개씩 나누어 주는 경우의 수는

${}_3C_2 \times {}_1C_1 \times 2! = 6$

조건 (나)를 만족시키도록 초콜릿을 받지 못한 1명의 학생에게 사탕 2개, 초콜릿 1개를 받은 1명의 학생에게 사탕 1개를 나누어주고, 남은 사탕 2개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$이므로 $3 \times 6 \times 6 = 108$

(ⅱ) 2명의 학생이 초콜릿을 받지 못하는 경우

초콜릿을 받지 못하는 2명을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$

남은 1명의 학생에게 초콜릿 3개를 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3C_3 = 1$

조건 (나)를 만족시키도록 초콜릿을 받지 못한 2명의 학생에게 사탕을 각각 2개씩 나누어 주고, 남은 사탕 1개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$이므로 $3 \times 1 \times 3 = 9$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$108 + 9 = 117$

#30 경우의 수

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(1) \le f(2) \le f(3)$
(나) $1 < f(5) < f(4)$
(다) $f(a)=b$, $f(b)=a$를 만족시키는
집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b가
존재한다.

해설 작성자	김서영

Comment

단순하게 (가) 조건을 보면 중복 조합,
(나) 조건은 조합을 활용하며 두 조건으로 발생하는 사건은 독립이다.
그러나 (다) 조건 때문에 두 조건은 연결될 수 있다.
일반적으로 조건을 3개 이상인 경우는 세 조건을 따로 보지 않고, 적당한 관계를 찾아 2개의 조건으로 해석해야 한다.

해설

(ⅰ) $a \in \{1, 2, 3\}$, $b \in \{1, 2, 3\}$인 경우
$f(a) > f(b)$이므로 조건 (가)에 모순이다.

(ⅱ) $a \in \{1, 2, 3\}$, $b \in \{4, 5\}$인 경우
가능한 (a, b)의 순서쌍은
$(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$이고 이 중 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍은 $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$뿐이다.

① $f(2)=5$, $f(5)=2$인 경우
조건 (가)를 만족하도록 $f(1)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 $f(1) \le 5 \le f(3)$에서 ${}_5H_1 \times {}_1H_1 = 5$
조건 (나)를 만족하도록 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $1 < 2 < f(4)$, ${}_3C_1 = 3$
함수 f의 개수는 $5 \times 3 = 15$

② $f(3)=4$, $f(4)=3$인 경우
조건 (가)를 만족하는 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $f(1) \le f(2) \le 4$에서
${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$
조건 (나)에 의하여 $1 < f(5) < 3$에서
$f(5)=2$
함수 f의 개수는 $10 \times 1 = 10$

③ $f(3)=5$, $f(5)=3$인 경우
조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $f(1) \le f(2) \le 5$에서 ${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$
조건 (나)를 만족하는 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $1 < 3 < f(4)$에서 ${}_2C_1 = 2$이므로 함수 f의 개수는 $15 \times 2 = 30$

(ⅲ) $a \in \{4, 5\}$, $b \in \{4, 5\}$인 경우
$f(4)=5$, $f(5)=4$, $1 < f(5)=4 < f(4)=5$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.
조건 (가)를 만족하는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$

(ⅰ) ~ (ⅲ)에 의하여 구하는 함수의 개수는
$15+10+30+35=90$

#23

등비수열의 극한

$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n-3^n}$ 의 값은? [2점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0

④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설 작성자	원민식

해설

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{2^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=-\frac{1}{3}$$

#24 수열의 극한의 성질

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 1,\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n+b_n}{1+2b_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

해설 작성자	원민식

해설

$\lim_{n\to\infty} na_n = 1$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2a_n+b_n}{1+2b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+\frac{b_n}{n}}{\frac{1}{n}+2\times\frac{b_n}{n}}=\frac{1+3}{0+2\times 3}=\frac{2}{3}$$

#25 수열의 극한의 성질

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n+3<a_n<2n+4$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설 작성자	원민식

해설

$2n+3<a_n<2n+4$에서 $2+\frac{3}{n}<\frac{a_n}{n}<2+\frac{4}{n}$

$\lim_{n \to \infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)=\lim_{n \to \infty}\left(2+\frac{4}{n}\right)=2$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \to \infty}\frac{a_n}{n}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+1)^2+6n^2}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n}\right)^2+6}{\frac{a_n}{n}}=5$$

Comment

수열의 극한의 대소 관계, 즉 샌드위치 정리를 이용하는 기본적인 계산 문제.

식 조작을 통해 부등식의 좌,우변이 모두 같은 값으로 수렴하도록 변형하는 것이 핵심이며, 항상 구하는 형태가 부등식의 중심에 오도록 해야한다.

#26 수열의 극한과 등차수열

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=a_1+2$$

를 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-n+1}=3$일 때, a_{10}의 값은? (단, $a_1>0$) [3점]

① 35　② 36　③ 37
④ 38　⑤ 39

해설 작성자	원민식

해설

$a_{n+1}-a_n=a_1+2$에서

$a_1+2=d\,(d>0)$라 할 때,

수열 $\{a_n\}$은 공차가 $d\,(d>0)$인 등차수열이다.

$a_n=dn+\alpha\,(\alpha$는 실수$)$라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+n}{a_n-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(dn+\alpha)+n}{dn+\alpha-n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2d+1)n+2\alpha}{(d-1)n+\alpha+1}$$
$$=\frac{2d+1}{d-1}$$

$\frac{2d+1}{d-1}=3$,

$2d+1=3d-3$

$\therefore\ d=4$

$a_1+2=4$,

$\therefore\ a_1=2$

$a_n=4n-2$이므로 $a_{10}=38$

Comment

수열 $\{a_n\}$이 등차수열임을 단번에 파악하는 것이 핵심인 문제.
$a_{n+1}-a_n=d$라는 조건은 등차수열임을 나타낸다는 것을 기억하자.

#27 수열의 극한

$a_1 = 3$, $a_2 = 6$인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (b_k)^2 = n^3 - n + 3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ 3
④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 6

해설 작성자	원민식

해설

$\sum_{k=1}^{n} a_k (b_k)^2 = S_n$이라 하면

$a_n(b_n)^2 = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$

$= (n^3 - n + 3) - (n^3 - 3n^2 + 2n + 3)$

$= 3n^2 - 3n$

등차수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 3$, $a_2 = 6$이므로 $a_n = 3n$

$a_n(b_n)^2 = 3n^2 - 3n = 3n(n-1)$에서

$(b_n)^2 = (n-1)$이므로

$b_n = \sqrt{(n-1)}$ $(\because b_n > 0)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n b_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n-1}\sqrt{2n-1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Comment

$S_n - S_{n-1} = a_n (n \geq 2)$, $S_1 = a_1$을 활용하는 문제.

합이 주어지면 일반항을, 일반항이 주어지면 합을 구할 수 있다는 것을 기억하자.

#28 수열의 극한의 활용

자연수 n에 대하여 직선 $y=2nx$가 곡선 $y=x^2+n^2-1$과 만나는 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 원 $(x-2)^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 P_n이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

해설 작성자	원민식

Comment

고1 수학의 중요성을 보여주는 문제.
삼각형의 높이가 최대인 조건을 구하기 위해선 반드시 고1 내용이 필요하다.

해설

$2nx=x^2+n^2-1$, $x^2-2nx+n^2-1=0$

$\{x-(n-1)\}\{x-(n+1)\}=0$에서

두 점 A_n, B_n의 좌표는 각각

$(n-1,\ 2n^2-2n)$, $(n+1,\ 2n^2+2n)$이다.

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{P}$의 밑변은 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$, 높이를 h라고 하자.

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{2^2+(4n)^2}=2\sqrt{4n^2+1}$이고,

직선 $2nx-y=0$와 원의 중심 $(2,\ 0)$까지의 거리는 $\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}$

원의 반지름이 1이므로

$\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}-1\le h\le\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1$이다.

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}\times\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{4n^2+1}\times\left(\frac{4n}{\sqrt{4n^2+1}}+1\right)$$

$$=4n+\sqrt{4n^2+1}$$

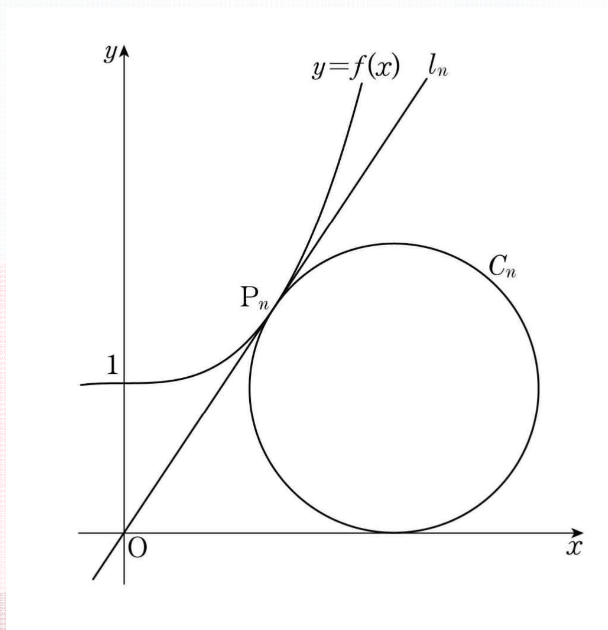
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+\sqrt{4n^2+1}}{n}=6$$

#29 수열의 극한의 활용

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{4}{n^3}x^3+1$$

이라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 l_n, 접선 l_n의 접점을 P_n이라 하자. x축과 직선 l_n에 동시에 접하고 점 P_n을 지나는 원 중 중심의 x좌표가 양수인 것을 C_n이라 하자. 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, $40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)$의 값을 구하시오. [4점]



해설 작성자	원민식

Comment

고1 수학, 수학 2, 계산 모두가 중요했던 문제.
원에 접하는 두 직선의 특징을 활용하는 풀이를 고려해볼 수 있다.

해설

양의 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{P}_n(t,\ f(t))$라 하면

$f(x)=\dfrac{4}{n^3}x^3+1$에서 $f'(x)=\dfrac{12}{n^3}x^2$이므로

$$f'(t)=\frac{f(t)-0}{t-0}$$

$$\frac{12}{n^3}t^2=\frac{\frac{4}{n^3}t^3+1}{t}$$

$$\frac{12}{n^3}t^3=\frac{4}{n^3}t^3+1$$

$$\frac{8}{n^3}t^3=1$$

$$\therefore\ t=\frac{n}{2}$$

점 P_n에 접하는 직선 l_n의 방정식은

$$y=\frac{3}{n}x$$

원 C_n의 중심을 Q_n, 이 원이 x축과 접하는 점을 R_n이라 할 때, $\overline{\mathrm{OP}_n}=\overline{\mathrm{OR}_n}=\dfrac{\sqrt{n^2+9}}{2}$이고,

두 점 Q_n, R_n을 지나는 직선과 두 점 O, R_n을 지나는 직선이 서로 수직이므로

$\mathrm{Q}_n\left(\dfrac{\sqrt{n^2+9}}{2},\ r_n\right)$이다.

직선 $3x-ny=0$과 점 Q_n 사이의 거리는 r_n이므로

$$\frac{\left|\frac{3\sqrt{n^2+9}}{2}-nr_n\right|}{\sqrt{n^2+9}}=r_n,\quad \left|\frac{3}{2}-\frac{n}{\sqrt{n^2+9}}r_n\right|=r_n,$$

$$\frac{3}{2}=r_n\left(1+\frac{n}{\sqrt{n^2+9}}\right)$$

$$\therefore\ r_n=\frac{3\sqrt{n^2+9}}{2\left(\sqrt{n^2+9}+n\right)}\quad(\because\ r_n>0)$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{6\sqrt{n^2+9}}{\sqrt{n^2+9}+n}-3\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}3n^2\left(\frac{\sqrt{n^2+9}-n}{\sqrt{n^2+9}+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{27n^2}{\left(\sqrt{n^2+9}+n\right)^2}$$

$$=\frac{27}{4}$$

$$\therefore\ 40\times\lim_{n\to\infty}n^2(4r_n-3)=40\times\frac{27}{4}=270$$

#30 등비수열의 극한으로 정의된 함수

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 자연수 m에 대하여 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)\left(\frac{x}{m}\right)^n+x}{\left(\frac{x}{m}\right)^n+1}$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하고, $g'(m+1)\le 0$이다.
(나) $g(k)g(k+1)=0$을 만족시키는 자연수 k의 개수는 3이다.
(다) $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 자연수 l의 개수는 3이다.

$g(12)$의 값을 구하시오. [4점]

해설 작성자	원민식

해설

$x>0$에서 함수 $g(x)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $0<x<m$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^n=0$이므로 $g(x)=x$

(ii) $x=m$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^n=1$이므로 $g(m)=\frac{f(m)+m}{2}$

(iii) $x>m$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^n=\infty$이므로 $g(x)=f(x)$

$$\therefore\ g(x)=\begin{cases} x & (0<x<m) \\ \frac{f(m)+m}{2} & (x=m) \\ f(x) & (x>m)\end{cases}$$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x=m$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to m-}g(x)=\lim_{x\to m+}g(x)=g(m)$

$\lim_{x\to m-}g(x)=m,\ \lim_{x\to m+}g(x)=f(m)$

$\therefore\ f(m)=m$

$g'(x)=\begin{cases} 1 & (0<x<m) \\ 0 & (x=m) \\ f'(x) & (x>m)\end{cases}$ 에서

$\lim_{x\to m-}g'(x)=\lim_{x\to m+}g'(x)=g'(m)$

$\lim_{x\to m-}g'(x)=1,\ \lim_{x\to m+}g(x)=f'(m)$

$\therefore\ f'(m)=1$

조건 (나)에서 방정식 $g(x)=0$을 만족시키는 자연수 x는 연속된 2개의 자연수이다.

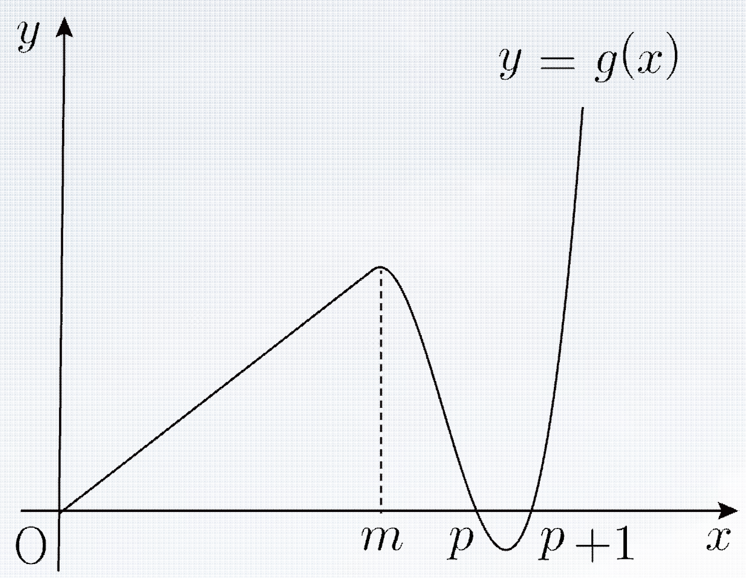
두 자연수가 연속되지 않았을 경우,

$g(k)=0$을 만족시키는 자연수 α, β에 대하여

$\alpha-1$, $\beta-1$이 $g(k+1)=0$을 만족시키는데,

$|\beta-\alpha|\ne 1$이기 때문에 자연수 k의 개수가 4이므로 모순이다..

두 자연수를 p, $p+1$이라고 하면, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x)=x$의 실근 중 $x=m$이 아닌 실근을 t라 할 때,

$f(x)-x=(x-m)^2(x-t)$, $f(x)=(x-m)^2(x-t)+x$

(ⅰ) $g(m)<g(m+1)$인 경우

$g'(m+1)\le 0$이므로 조건 (다)에서

$g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 세 자연수 l은

$m+1$, $m+2$, $m+3$이므로 $p=m+3$이다

$f(p)=f(m+3)$

$=9(m-t+3)+m+3$

$=10m-9t+30=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(p+1)=f(m+4)$

$=16(m-t+4)+m+4$

$=17m-16t+68=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $m=\dfrac{132}{7}$이므로 모순이다.

(ⅱ) $g(m)\ge g(m+1)$인 경우

조건 (다)에서 $g(l)\ge g(l+1)$을 만족시키는 세 자연수 l은 m, $m+1$, $m+2$이므로

$p=m+2$이다.

$f(p)=f(m+2)$

$=4(m-t+2)+m+2$

$=5m-4t+10=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(p+1)=f(m+3)$

$=10m-9t+30=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $m=6$, $t=10$이므로

$f(x)=(x-6)^2(x-10)+x$

$f'(x)=(x-6)(3x-26)+1$

$g'(m+1)=f'(m+1)=f'(7)=-4$이고,

$g(m)=f(m)\ge f(m+1)=g(m+1)$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(x)=(x-6)^2(x-10)+x$

$\therefore\ g(12)=f(12)=6^2\times 2+12=84$

#23 타원의 방정식

타원 $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점 사이의 거리는? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

해설 작성자	김대현

해설

타원 $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$의 두 초점의 좌표를

$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면

$c=\sqrt{17-8}=\sqrt{9}=3$

두 초점 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{FF}'}=2c=6$

#24 포물선의 방정식

초점이 F인 포물선 $y^2=20x$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=15$일 때, 점 P의 x좌표는? [3점]

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

해설 작성자	김대현

해설

포물선 $y^2=20x$의 초점의 좌표를 $(p,\ 0)$이라 하면
$4p=20$, $\therefore\ p=5$
포물선의 초점은 $\mathrm{F}(5,\ 0)$이고 준선은 $x=-5$ 이다.
점 P의 x좌표를 k라 할 때, 포물선의 정의에 의하여 점 P에서 준선까지의 거리는 $\overline{\mathrm{PF}}$이므로
$k-(-5)=k+5=15$.
$\therefore\ k=10$

Comment

초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$인 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}=x_1+p$가 성립한다.

#25 쌍곡선의 방정식

두 초점이 x축 위에 있고, 두 초점 사이의 거리가 30인 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=\frac{3}{4}x$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

해설 작성자	김대현

해설

쌍곡선의 초점이 x축 위에 있고 한 점근선의 방정식이 $y=\frac{3}{4}x$

이므로 양수 a, b에 대하여 쌍곡선의 방정식을

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

이라 하면

$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$, $\quad \therefore\ b=\frac{3}{4}a$ …… ㉠

쌍곡선의 두 초점의 좌표를 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$이라 하면 두 초점 사이의 거리는 $\overline{\mathrm{FF'}}$이므로

$\overline{\mathrm{FF'}}=2c=2\sqrt{a^2+b^2}=30$,

$\therefore\ \sqrt{a^2+b^2}=15$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\frac{9}{16}a^2}=\frac{5}{4}a$$

$\frac{5}{4}a=15$, $\quad \therefore\ a=12$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2a=24$이다.

#26 포물선의 성질

두 실수 a, b에 대하여 포물선

$C: (y-a+1)^2 = (a+b)x+1$ (단, $a+b \neq 0$)

이 있다. 포물선 C가 원점을 지나고 초점과 준선 사이의 거리가 2일 때, $a-b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

해설 작성자	김대현

해설

포물선 C가 원점을 지나므로

$(-a+1)^2 = 1$, $\quad \therefore\ a=0$ 또는 $a=2$

포물선 C의 초점의 x좌표는

$\dfrac{a+b}{4} - \dfrac{1}{a+b}$,

준선의 방정식은

$x = -\dfrac{a+b}{4} - \dfrac{1}{a+b}$

이고

포물선의 초점과 준선 사이의 거리가 2이므로

$$\left| -\frac{a+b}{4} - \frac{1}{a+b} - \frac{a+b}{4} + \frac{1}{a+b} \right| = \left| \frac{a+b}{2} \right| = 2$$

두 정수 a, b에 대하여 가능한 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$, $(2,\ 2)$, $(2,\ -6)$

이고

각각의 순서쌍에 대하여 $a-b$의 값은 각각

-4, 4, 0, 8이므로

$a-b$의 최댓값은 8, 최솟값은 -4

$\therefore\ M-m = 12$

Comment

포물선의 초점과 준선 사이의 거리는 포물선의 평행이동에 의해 변하지 않는다.

그러므로 포물선의 기본형

$y^2 = 4px$

의 초점과 준선 사이의 거리가 $2|p|$일 때,

표준형

$(y-b)^2 = 4p(x-a)$

의 초점과 준선 사이의 거리

도 마찬가지로 $2|p|$이다. 따라서 위의 포물선의 방정식에서 초점과 준선 사이의 거리는

$2 \times \left| \dfrac{a+b}{4} \right| = \left| \dfrac{a+b}{2} \right|$

로 바로 계산할 수 있다.

#27 쌍곡선의 성질

두 초점이 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=-1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P에 대하여 각 FPF′의 이등분선이 점 $(0, 1)$을 지날 때, $\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{F'P}}$의 값은? [3점]

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

해설 작성자	김대현

해설

쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=-1$의 두 초점을 각각

$\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F'}(0,\ -c)$이라 하면

$c=\sqrt{7+9}=\sqrt{16}=4$

점 $(0,\ 1)$을 A라 할 때, 각 FPF′의 이등분선이 점 A를 지나므로

$\overline{\mathrm{FP}}:\overline{\mathrm{F'P}}=\overline{\mathrm{FA}}:\overline{\mathrm{F'A}}$

$\overline{\mathrm{AF}}=3$, $\overline{\mathrm{AF'}}=5$이므로

$\overline{\mathrm{FP}}:\overline{\mathrm{F'P}}=3:5$, $\therefore\ \overline{\mathrm{F'P}}=\frac{5}{3}\overline{\mathrm{FP}}$ …… ㉠

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{FP}}=6$이므로

㉠에 의하여

$\frac{2}{3}\overline{\mathrm{FP}}=6$, $\therefore\ \overline{\mathrm{FP}}=9$

$\overline{\mathrm{FP}}=9$, $\overline{\mathrm{F'P}}=15$이므로

$\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{F'P}}=24$

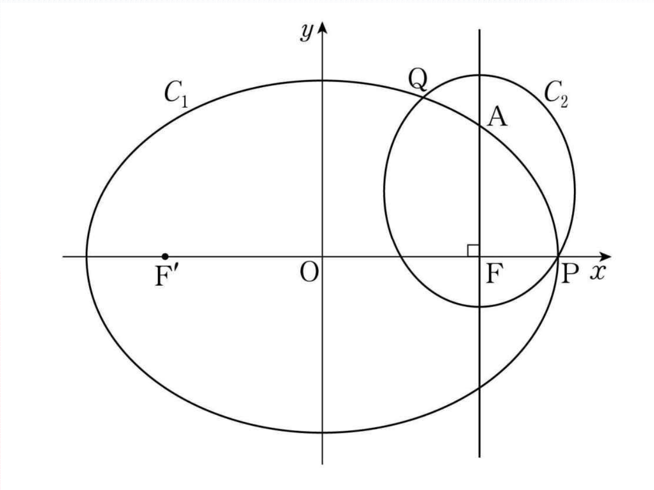
Comment

쌍곡선의 두 초점 F, F′과 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 각 FPF′의 이등분선은 쌍곡선의 점 P에서의 접선이다.

#28 타원의 성질

두 초점이 $\mathrm{F}(c,\,0)$, $\mathrm{F}'(-c,\,0)$ $(c>0)$이고 장축의 길이가 18인 타원을 C_1이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 타원 C_1과 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하고, 두 초점이 F, A이고 점 $\mathrm{P}(9,\,0)$을 지나는 타원을 C_2라 하자. 두 타원 C_1과 C_2가 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하자.

$\cos(\angle\mathrm{FF'A})=\dfrac{12}{13}$일 때, $\overline{\mathrm{F'Q}}-\overline{\mathrm{AQ}}$의 값은? [4점]



① $14-\sqrt{34}$ ② $20-2\sqrt{34}$
③ $15-\sqrt{34}$ ④ $21-2\sqrt{34}$
⑤ $16-\sqrt{34}$

해설 작성자 | 김대현

해설

직각삼각형 FF′A에서 $\cos(\angle\mathrm{FF'A})=\dfrac{12}{13}$이므로

$\overline{\mathrm{F'A}}=13k$, $\overline{\mathrm{FF'}}=12k\,(k>0)$라 하자.

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{\overline{\mathrm{F'A}}^2-\overline{\mathrm{FF'}}^2}=5k$

타원 C_1의 장축의 길이가 18이므로

$\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{FA}}=18k=18$, $\quad\therefore\ k=1$

$\overline{\mathrm{FP}}=\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OF}}=9-6=3$이고

직각삼각형 AFP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{FA}}^2+\overline{\mathrm{FP}}^2}=\sqrt{25+9}=34$이므로

타원 C_2의 장축의 길이는 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{FP}}=3+\sqrt{34}$

$\overline{\mathrm{FQ}}+\overline{\mathrm{AQ}}=3+\sqrt{34}$이고, …… ㉠

$\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{FQ}}=18$이므로 …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{\mathrm{F'Q}}-\overline{\mathrm{AQ}}=15-\sqrt{34}$

Comment

이차곡선에서 두 선분의 길이의 합이나 차 혹은 최대, 최소를 물어볼 때, 좌표를 이용하여 선분의 길이를 직접 구하는 경우는 흔치 않다.
그러므로 이차곡선의 정의를 활용할 수 있도록 구하고자 하는 식을 적절히 변형하는 것이 필요하다.

#29 포물선의 성질

포물선 $x^2 = ay$ $(a > 0)$이 두 포물선

$C_1 : y^2 = 8x$, $C_2 : y^2 = -x$

와 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 각각 P, Q라 하고, 두 포물선 C_1, C_2의 초점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_2}$라 하자. 직선 PQ의 기울기가 $2\sqrt{2}$일 때, $\overline{\mathrm{F_1P}} + \overline{\mathrm{F_2Q}} = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

해설 작성자	김대현

해설

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

주어진 조건에 의하여

$2\sqrt{2}\sqrt{x_1} = \dfrac{x_1^{\,2}}{a}$, $\sqrt{-x_2} = \dfrac{x_2^{\,2}}{a}$이므로

$x_1 = 2\sqrt[3]{a^2}$, $x_2 = -\sqrt[3]{a^2}$ …… ㉠

직선 PQ의 기울기가 $2\sqrt{2}$이므로

$$(\text{직선 PQ의 기울기}) = \frac{\dfrac{x_1^{\,2}}{a} - \dfrac{x_2^{\,2}}{a}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{1}{a} \times \frac{x_1^{\,2} - x_2^{\,2}}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{1}{a} \times (x_1 + x_2) = 2\sqrt{2}$$

㉠에 의하여 $x_1 + x_2 = \sqrt[3]{a^2}$이므로

$\dfrac{1}{a} \times \sqrt[3]{a^2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} = 2\sqrt{2}$, $\quad \therefore\ a = \dfrac{1}{16\sqrt{2}}$

따라서 $x_1 = 2\sqrt[3]{a^2} = \dfrac{1}{4}$, $x_2 = -\sqrt[3]{a^2} = -\dfrac{1}{8}$이다.

포물선 C_1의 준선의 방정식은 $x = 2$이고,

포물선 C_2의 준선의 방정식은 $x = -\dfrac{1}{4}$이므로

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{F_1P}} + \overline{\mathrm{F_2Q}} = \left|\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right| + \left|-\frac{1}{8} - 2\right|$$

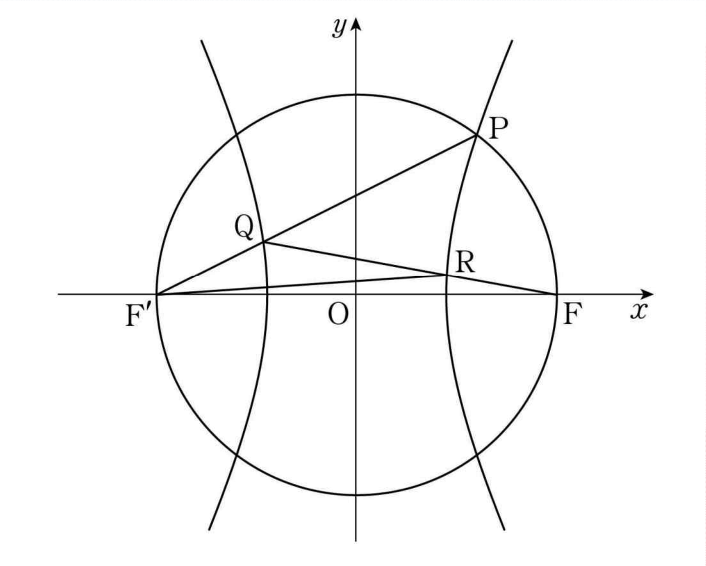
$$= \frac{1}{2} + \frac{17}{8}$$

$$= \frac{21}{8}$$

$p = 8$, $q = 21$이므로 $p + q = 29$

#30 포물선의 성질

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$ $(c>0)$을 초점으로 하고 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선이 선분 FF'을 지름으로 하는 원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{P}$가 쌍곡선과 만나는 점 중 점 P가 아닌 점을 Q라 하고, 선분 FQ가 쌍곡선과 만나는 점 중 점 Q가 아닌 점을 R라 하자. 점 Q가 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{P}$를 $1:2$로 내분할 때, 삼각형 $\mathrm{QF}'\mathrm{R}$의 넓이를 S라 하자. $20S$의 값을 구하시오. [4점]



해설 작성자	김대현

해설

점 Q가 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{P}$를 $1:2$로 내분하므로

$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}=k\ (k>0)$라 할 때, $\overline{\mathrm{QP}}=2k$이고

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}}=3k-6\ (\because\ \overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{PF}'})$

점 Q가 쌍곡선 위의 점이고 $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}=k$이므로

$\overline{\mathrm{FQ}}=6+\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}=k+6\ (\because\ \overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}<\overline{\mathrm{FQ}})$

점 P는 선분 $\mathrm{F}'\mathrm{F}$를 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\angle\mathrm{FPQ}=\dfrac{\pi}{2}$이고,

삼각형 FPQ에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{FQ}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PQ}}^2$

$(k+6)^2=(3k-6)^2+(2k)^2$

$k^2+12k+36=13k^2-36k+36$

$12k^2-48k=0, \quad \therefore\ k=4$

점 R은 쌍곡선 위의 점이고, $\overline{\mathrm{FR}}=l\,(l>0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{QR}}=10-l$, $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{R}}=l+6\ (\because\ \overline{\mathrm{FR}}<\overline{\mathrm{F}'\mathrm{R}})$

$\angle\mathrm{F}'\mathrm{QR}=\pi-\angle\mathrm{FQP}$이므로

$\cos(\angle\mathrm{F}'\mathrm{QR})=-\cos(\angle\mathrm{FQP})$

삼각형 $\mathrm{F}'\mathrm{QR}$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{R}}^2=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}^2+\overline{\mathrm{QR}}^2-2\times\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\cos(\angle\mathrm{F}'\mathrm{QR})$,

$(l+6)^2=16+(10-l)^2-8\times(10-l)\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)$,

$l^2+12l+36=l^2-\dfrac{132}{5}l+180$,

$\dfrac{192}{5}l=144, \quad \therefore\ l=\dfrac{15}{4}$

삼각형 $\mathrm{QF}'\mathrm{R}$의 넓이는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{F}'\mathrm{Q}}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\sin(\angle\mathrm{F}'\mathrm{QR})$$

$$=\frac{1}{2}\times4\times\left(10-\frac{15}{4}\right)\times\frac{3}{5}$$

$$=\frac{15}{2}$$

$$\therefore\ 20S=20\times\frac{15}{2}=150$$