제 2 교시

수학 영역

KSM

5 지 선 다 형

1. 두 다항식

$$A=3x^2+2x-1,\ B=-x^2+x+3$$

에 대하여 $A+B$를 간단히 하면? [2점]

① $2x^2-x+2$ ② $2x^2+x-2$ ③ $2x^2+3x+2$ ④ $4x^2+x+4$ ⑤ $4x^2+3x+4$

2. $1+\dfrac{2}{1-i}$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

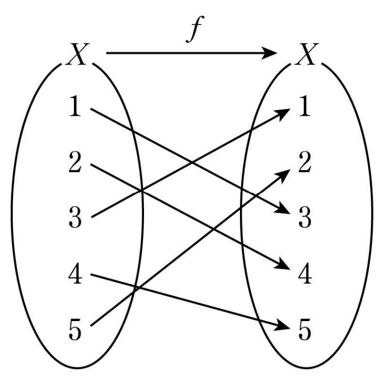
① i ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ $2+i$ ⑤ $2+2i$

$1+(1+i)$

3. ${}_4C_2$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

4. 그림은 함수 $f: X \to X$를 나타낸 것이다.



$f^{-1}(4)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+12를 $x-2$로 나눈 나머지가 $2a-8$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -6 ② -8 ③ -10 ④ -12 ⑤ -14

$x=2 \rightarrow 8+4a+12=2a-8$

$2a=-28$

$a=-14$

6. 원 $(x+5)^2+(y+11)^2=25$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후, x축에 대하여 대칭이동한 원이 점 $(0, a)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$(-5,-11) \rightarrow (-5,-10) \rightarrow (-5,10)$

$(x+5)^2+(y-10)^2=25$ $(0,a)$

$25+(a-10)^2=25$, $a=10$

7. 연립부등식

$$\begin{cases} 2x+1<3 \\ x^2-2x-15 \le 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$$\begin{cases} x<1 \\ -3 \le x \le 5 \end{cases}$$

$-3 \le x < 1$

$-3, -2, -1, 0$

8. 함수 $y=\dfrac{b}{x-a}$의 그래프가 점 $(2,\ 4)$를 지나고 한 점근선의 방정식이 $x=4$일 때, $a-b$의 값은? (단, $a,\ b$는 상수이다.) [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$a=4$

$y=\dfrac{b}{x-4}$ $(2,4)$

$4=\dfrac{b}{-2}$, $b=-8$

$a-b=12$

9. 두 직선 $x+3y+2=0$, $2x-3y-14=0$의 교점을 지나고 직선 $2x+y+1=0$과 평행한 직선의 x절편은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

기울기 -2

$3x-12=0$

$x=4$

$y=-2$ $(4,-2)$

$y=-2(x-4)-2$

$y=-2x+6$ $(3,0)$

10. 삼차방정식 $x^3+x^2-2=0$의 한 허근을 $a+bi$라 할 때, $|a|+|b|$의 값은? (단, $a,\ b$는 실수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점]

① 4 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 3 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 2

$(x-1)(x^2+2x+2)=0$

$x=-1\pm i$

$a=-1$

$b=\pm1$

$|a|+|b|$

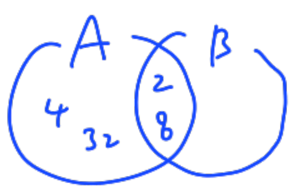
$=1+1=2$

11. 전체집합 $U=\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A\cap B=\{2, 8\}$
(나) $A^C\cup B=\{1, 2, 8, 16\}$

집합 A의 모든 원소의 합은? [3점]

① 26 ② 31 ③ 36 ④ 41 ⑤ 46



12. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}(a+7)x-1 & (x<1)\\(-a+5)x+2a+1 & (x\geq 1)\end{cases}$$

의 역함수가 존재하도록 하는 모든 정수 a의 개수는? [3점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

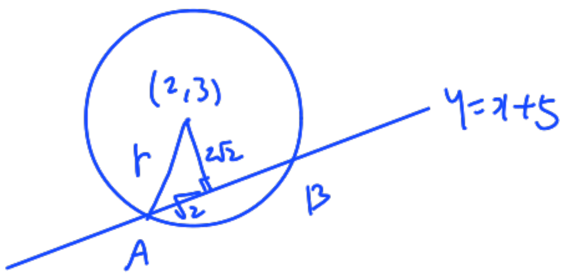
$(a+7)(-a+5)>0$

$(a+7)(a-5)<0$

$-7<a<5$

13. 좌표평면에서 원 $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$과 직선 $y=x+5$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$이다. 양수 r의 값은? [3점]

① 3　② $\sqrt{10}$　③ $\sqrt{11}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{13}$

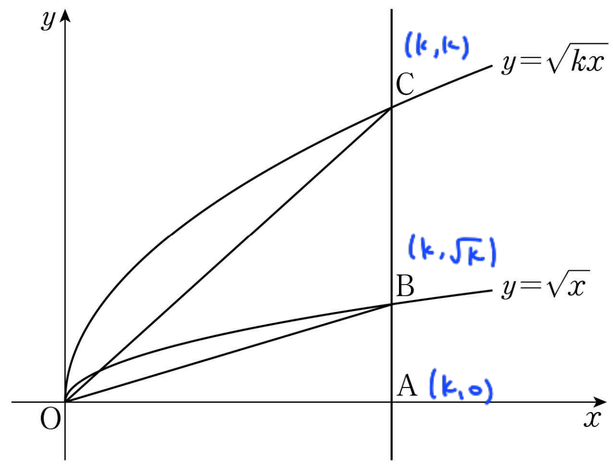


$(2,3) \sim x-y+5=0$

$\frac{|2-3+5|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$r^2 = 8+2 = 10,\quad r = \sqrt{10}$

14. 그림과 같이 $k>1$인 상수 k에 대하여 점 A$(k,\ 0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{kx}$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 OBC의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 2배일 때, 삼각형 OBC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27

BC : BA = 2:1

$k = 3\sqrt{k},\quad k = 9$

$\triangle OBC = \frac{1}{2} \times 9 \times (9-\sqrt{9}) = 27$

15. 다음 조건을 만족시키는 복소수 z가 존재하도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [4점]

(가) $\bar{z}=-z$
(나) $z^2+(k^2-3k-4)z+(k^2+2k-8)=0$

① -32　② -16　③ -8　④ -4　⑤ -2

$z=a+bi$

(가) $z+\bar{z}=0 \rightarrow a=0,\ z=bi$

(나) $z=0 \rightarrow k^2+2k-8=0,\ k=-4, 2$

$z=bi \rightarrow k^2-3k-4=0,\ k^2+2k-8-b^2=0$

(b는 실수)

$k=4, -1 \rightarrow$

$k=4 \rightarrow b^2=12$ (o)

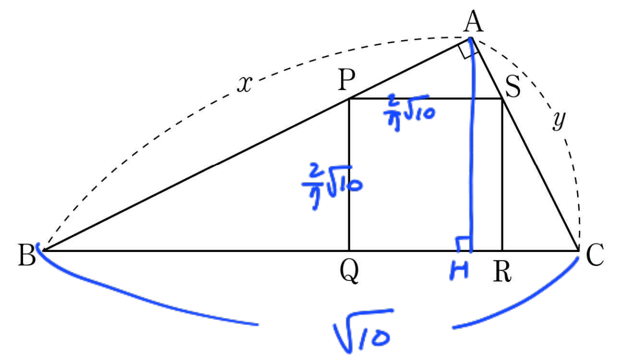
$k=-1 \rightarrow b^2=-9$ (x)

$\therefore k=-4, 2, 4$

$(-4)\times 2\times 4=-32$

16. 그림과 같이 $\angle A=90^\circ$, $\overline{BC}=\sqrt{10}$, $\overline{AB}=x$, $\overline{AC}=y$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB 위에 점 P, 선분 BC 위에 두 점 Q, R, 선분 AC 위에 점 S를 사각형 PQRS가 정사각형이 되도록 잡는다. $\overline{PQ}=\frac{2}{7}\sqrt{10}$일 때, x^3-y^3의 값은? (단, $x>y$)

[4점]



① $12\sqrt{2}$　② $13\sqrt{2}$　③ $14\sqrt{2}$
④ $15\sqrt{2}$　⑤ $16\sqrt{2}$

$x^2+y^2=10$

$\triangle APS \backsim \triangle ABC$　$2:7$

$PQ:AH=5:7$　$\therefore AH=\frac{2}{5}\sqrt{10}$

$AB\times AC=AH\times BC,\ xy=4$

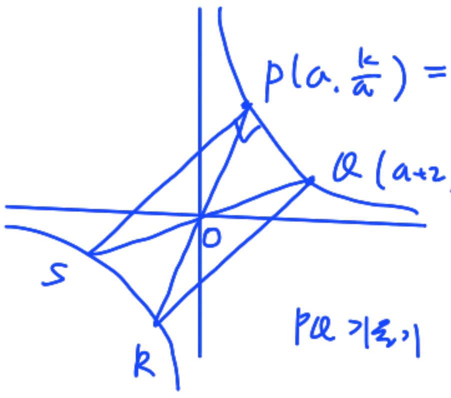
$(x-y)^2=10-8=2,\ x-y=\sqrt{2}$

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)=14\sqrt{2}$

17. 두 양수 a, k에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{k}{x}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(a+2,\ f(a+2))$가 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값은? [4점]

> (가) 직선 PQ의 기울기는 -1이다.
> (나) 두 점 P, Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 각각 R, S라 할 때, 사각형 PQRS의 넓이는 $8\sqrt{5}$이다.

① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$



$p(a, \frac{k}{a}) = (a, a+2)$

$Q(a+2, \frac{k}{a+2}) = (a+2, a)$

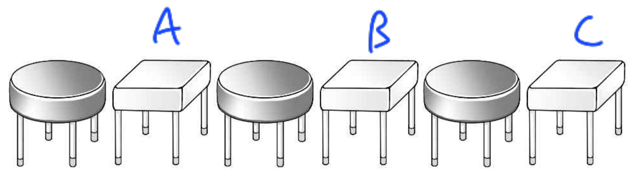
PQ 기울기 $\dfrac{\frac{k}{a+2}-\frac{k}{a}}{2} = \dfrac{-2k}{2a(a+2)} = -1$

$k = a(a+2)$

$\triangle OPQ = \frac{1}{2}\left|(a+2)^2 - a^2\right| = 2\sqrt{5}$

$4a+4 = 4\sqrt{5}$ $a = \sqrt{5}-1$, $a+2 = \sqrt{5}+1$) $\therefore k = 4$

18. 그림과 같이 둥근 의자 3개와 사각 의자 3개가 교대로 나열되어 있다.



1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 2명이 다음 조건을 만족시키도록 이 6개의 의자에 모두 앉는 경우의 수는? [4점]

> (가) 2학년 학생은 사각 의자에만 앉는다.
> (나) 같은 학년 학생은 서로 이웃하여 앉지 않는다.

① 64 ② 72 ③ 80 ④ 88 ⑤ 96

2학년

A B $2\times(4!-8) = 32$

A C $2\times(8) = 16$

B C $2\times(8) = 16$

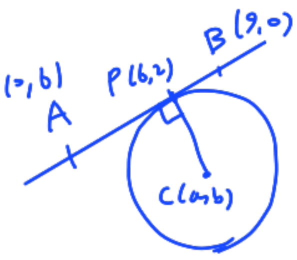
64

19. 좌표평면 위의 두 점 A(0, 6), B(9, 0)에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 하자. 원 $x^2+y^2-2ax-2by=0$과 직선 AB가 점 P에서만 만날 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{16}{9}$ ② 2 ③ $\frac{20}{9}$ ④ $\frac{22}{9}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

P(6, 2)   AB: $y=-\frac{2}{3}x+6$

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$



$\frac{b-2}{a-6}=\frac{3}{2}$, $3a-18=2b-4$

$3a-2b=14$

P (6,2) → $36+4-12a-4b=0$ $3a+b=10$ $b=-\frac{4}{3}$, $a=\frac{34}{9}$

$a+b=\frac{22}{9}$

20. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

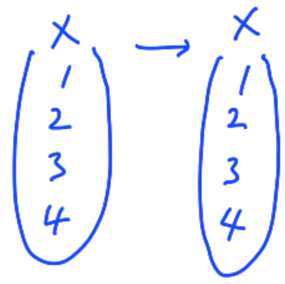
(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $x+f(f(x)) \le 5$이다.
(나) 함수 f의 치역은 $\{1, 2, 4\}$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f(f(4))=1$
ㄴ. $f(3)=4$
ㄷ. 가능한 함수 f의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



(가) $f(f(1)) \le 4$
$f(f(2)) \le 3$
$f(f(3)) \le 2$
ㄱ. $f(f(4)) \le 1 \to f(f(4))=1$

$f(4)=3$ (×) 치역 {1,2,4}
$f(4)=4 \to f(4) \le 1$ (×)
∴ $f(4)=1$ or $f(4)=2$

i) $f(4)=1$, $f(1)=1$ → $f(2)$ $f(3)$
2 4
4 2 → $f(3)=2 \to f(2) \le 2$ (×)

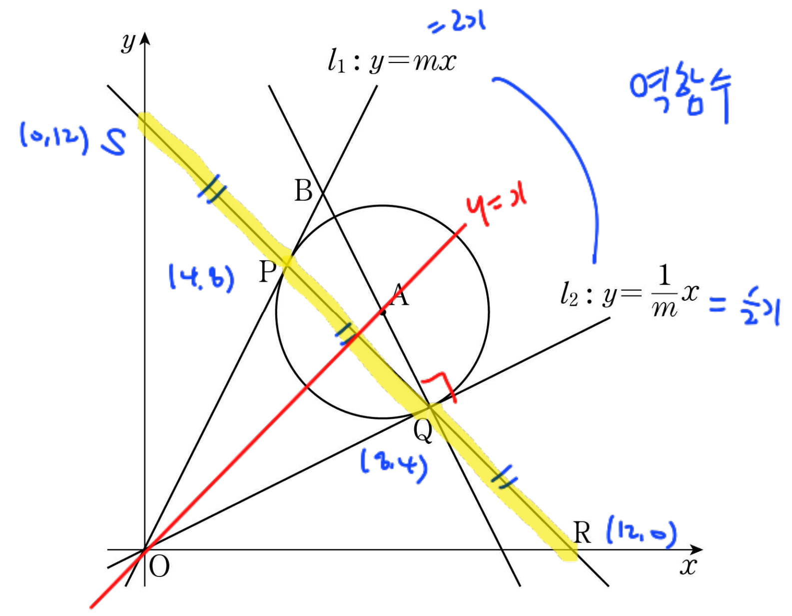
ii) $f(4)=2$, $f(2)=1$ → $f(1)$ $f(3)$
4 → $f(4)=1 \to f(1) \le 3$ (×)
1 4
2 4

∴ $f(3)=4$ / 가능한 f: 3개

21. 그림과 같이 두 직선 $l_1 : y = mx\,(m > 1)$과 $l_2 : y = \frac{1}{m}x$에 동시에 접하는 원의 중심을 A라 하자. 직선 l_1과 원의 접점을 P, 직선 l_2와 원의 접점을 Q, 직선 PQ가 x축과 만나는 점을 R이라 할 때, 세 점 P, Q, R이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{QR}}$
> (나) 삼각형 OPQ의 넓이는 24이다.

직선 l_1과 직선 AQ의 교점을 B라 할 때, 선분 BQ의 길이는? (단, 원의 중심 A는 제1사분면 위에 있고, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3}{2}\sqrt{5}$　② $2\sqrt{5}$　③ $\frac{5}{2}\sqrt{5}$　④ $3\sqrt{5}$　⑤ $\frac{7}{2}\sqrt{5}$

△OPQ=24 → △OPR=72　∴ $\overline{OR} = \overline{OS} = 12$

$\overline{SP} = \overline{PQ} = \overline{QR}$ 이므로 P(4,8), Q(8,4)

$y=mx \to 8=4m,\ m=2$

OQ 기울기 $\frac{1}{2}$ ⇒ BQ 기울기 -2 → $y=-2x+20$

$\left.\begin{array}{l} y=2x \\ y=-2x+20 \end{array}\right) \Rightarrow$ B(5,10)

∴ $\overline{BQ} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$

단답형

22. 두 집합

$A = \{3, 8, 12\}$, $B = \{3, 5, 9\}$

에 대하여 집합 $A - B$의 모든 원소의 합을 구하시오. [3점]

$\boxed{20}$

$A-B = \{8, 12\}$

23. 좌표평면 위의 두 점 A(3, 3), B(7, 11)에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표가 (a, b)일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{30}$

$\left(\frac{14-3}{2-1}, \frac{22-3}{2-1}\right) = (11, 19)$

24. 직선 $y=-x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x+6$의 그래프와 만나도록 하는 자연수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

$x^2-x+6-k=0$ $\boxed{6}$

$D=1-24+4k\ge 0$

$k\ge \frac{23}{4}$

25. 좌표평면 위의 점 A(3, −1)을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 −4만큼 평행이동한 점을 B라 하자. 직선 AB를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 y절편을 구하시오. [3점]

$\boxed{24}$

$A(3,-1)$

$B(4,-5)$ 기울기 -4

$y=-4(x-3)-1$

$y=-4x+11$

$y=-4(x-3)+11+1$

$y=-4x+24$ $(0,24)$

26. 실수 x에 대한 두 조건

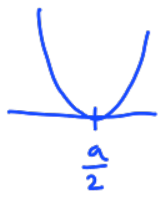
$p: 2x-a=0,$ $x=\frac{a}{2}$

$q: x^2-bx+9>0$

이 있다. 명제 $p\to\ \sim q$와 명제 $\sim p\to q$가 모두 참이 되도록 하는 두 양수 a, b의 값의 합을 구하시오. [4점]

$\sim q\to p$ $\boxed{12}$

$P=Q^c$



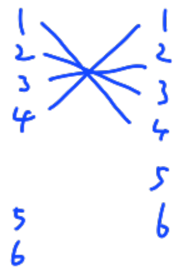
$(x-\frac{a}{2})^2=x^2-ax+\frac{a^2}{4}=x^2-bx+9$

$a^2=36,\ a=6$

$a=b$ $b=6$

27. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점] $\boxed{510}$

(가) $x_1 \in X$, $x_2 \in X$인 임의의 x_1, x_2에 대하여 $1 \le x_1 < x_2 \le 4$이면 $f(x_1) > f(x_2)$이다.
(나) 함수 f의 역함수가 존재하지 않는다.



$_6C_4 \times (6^2-2) = 510$

28. 1보다 큰 자연수 k에 대하여 전체집합

$U=\{x \mid x$는 k 이하의 자연수$\}$

의 두 부분집합

$A=\{x \mid x$는 k 이하의 짝수$\}$, $B=\{x \mid x$는 k의 약수$\}$

가 $n(A) \times n((A \cup B)^C)=15$를 만족시킨다. 집합 $(A \cup B)^C$의 모든 원소의 곱을 구하시오. [4점] $\boxed{189}$

$\cancel{1 \times 15}$ k

3×5 < 6 (×), 7 (×)

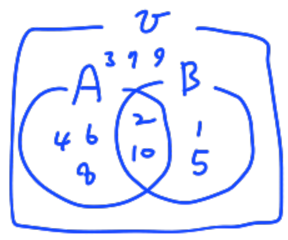
5×3 < 10, 11 (×)

$\cancel{15 \times 1}$

$k=10$

2 4 6 8 10

1 2 5 10



$3 \times 7 \times 9 = 189$

29. 다항식 $f(x)=x^4+(a+2)x^3+bx^2+ax+6$과 최고차항의 계수가 1이고 계수와 상수항이 모두 실수인 두 다항식 $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.
> (나) 다항식 $f(x)$는 두 다항식 $g(x)$, $h(x)$를 인수로 갖고, $h(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지는 $-4x-1$이다.

a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

$\boxed{5}$

$f(x)=g(x)\cdot☆$
$f(x)=h(x)\cdot□$

$h(x)=\underline{g(x)}\,Q(x)-4x-1$
2차이상

i) $Q(x)=0 \rightarrow h(x)=-4x-1$ (X) (∵ 최고차항 계수 : 1)

ii) $Q(x)\neq 0 \rightarrow h(x)$: 2차이상 4차이하

$h(x)$:4차 → $h(x)=f(x)$ → $g(x)$로 나눈 나머지 $-4x-1$ (X)

$h(x)$:3차 → $f(x)=h(x)(x-\alpha)$, $x=\alpha$ 실근 가지므로 (X)

∴ $h(x)$:2차, $g(x)$:2차

$g(x)=h(x)+4x+1$

iii) $g(\alpha)=h(\alpha)=0 \Rightarrow 4\alpha+1=0,\ \alpha=-\frac{1}{4}$

$f(\alpha)=g(\alpha)☆=0$ ∴ $f(x)$는 $x+\frac{1}{4}$ 인수 가짐 (X)

∴ $g(x)$와 $h(x)$는 공통인수 X

$f(x)=g(x)\times h(x)$, $h(x)=x^2+px+q$, $D_1=p^2-4q<0$

$g(x)=x^2+(p+4)x+q+1$, $D_2=(p+4)^2-4(q+1)<0$

상수항 ⇒ $q(q+1)=6$, $q=-3$ or $q=2$

$q=-3 \Rightarrow D_1=p^2+12>0$ (X)

∴ $q=2 \rightarrow (p+4)^2<12$

$f(x)=(x^2+ax+2)(x^2+(a+4)x+3)$

3차항 ⇒ $a+(a+4)=a+2$ ∴ $a=-2$

2차항 ⇒ $b=3-4+2=1$

$a^2+b^2=5$

30. 두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\sqrt{-x+a}-b$라 하자. 함수

$y=f(x)$
$(a,\ b)$

$$g(x)=\begin{cases} |f(x)|+b & (x\le a) \\ -f(-x+2a)+|b| & (x>a) \end{cases}$$

$= |\sqrt{-x+a}-b|+b$
$= -\sqrt{x-a}+b+|b|$

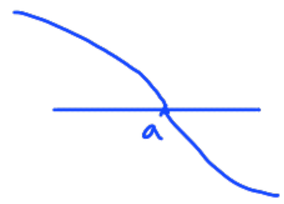
와 두 실수 α, $\beta(\alpha<\beta)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수를 $h(t)$라 하면 $h(\alpha)\times h(\beta)=4$이다.
> (나) 방정식 $\{g(x)-\alpha\}\{g(x)-\beta\}=0$을 만족시키는 실수 x의 최솟값은 -30, 최댓값은 15이다.

$\{g(150)\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

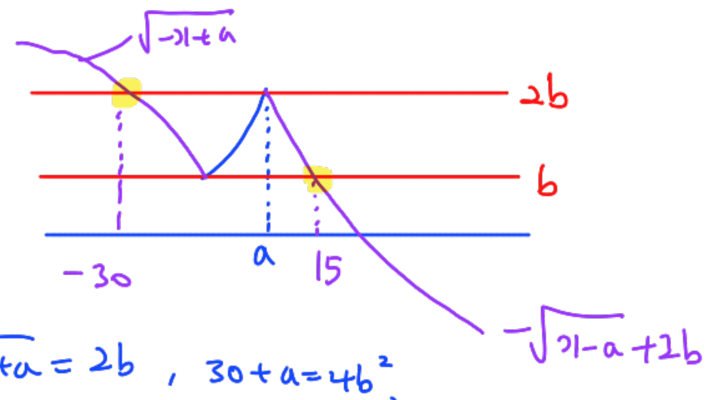
$\boxed{36}$

i) $-b\ge 0$, $b<0$



$h(b)=1$
(가) X

ii) $-b<0$, $b>0$



$g(-30)=\sqrt{30+a}=2b$, $30+a=4b^2$

$g(15)=-\sqrt{15-a}+2b=b$, $15-a=b^2$

$b^2=9$, $b=3$ $(b>0)$

$a=6$

$g(150)=-\sqrt{150-6}+6=-6$

∴ $(g(150))^2=36$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기) 했는지 확인하시오.