제 4 장

현대물리

1 특수상대론

1.1 개요

특수 상대성 이론, 줄여서 특수상대론은 빛의 속도에 가까운 관성계를 다루는 역학 이론이다. 여기에는 일반적인 상식을 깨는 여러가지 현상이 등장한다. 대부분의 몰이해는 자신도 모르게 고전적인 전제를 깔고 논의를 전개하기 때문에 발생하거나 상대적인 운동을 상상하지 못하여 무시하기 때문에 발생한다.

특수 상대성 이론은 2007 개정 교육과정부터 물리 I 교육과정에 포함되었다. 여기에는 상대성 원리, 광속 불변 원리, 동시성의 상대성, 시간 팽창, 길이 수축, 질량-에너지 동등성 등이 포함된다. 실제 고등학교 교육과정 상에서는 로런츠 변환을 이용한 정량적 계산보다는 사례의 이해를 통한 정성적인 이해를 추구한다.

1.2 가정

아인슈타인이 제시한 특수 상대성 이론은 다음 두 가지 가정을 기초로 구성되어있다. 사실상 이것들이 특수상대론의 전부라고 할 수 있다.

공리 1 (상대성 원리) *모든 관성계에서 관측되는 물리 법칙은 동일하다. 모든 운동은 상대적이며, 절대적인 좌표계는 존재하지 않는다.*

예제 1 *상대성 원리*

우주 공간에서 유영하던 두 우주인 A와 B가 서로 스쳐 지나갔다. 이때 A는 B가 다가오다가 자신을 지나쳐 멀어져갔다고 주장하였다. B의 주장은 어떠한가?

A의 관성계에서 A는 정지해 있다. 따라서 B가 다가와 A를 스쳐 지나가야 한다. 한편, B의 관성계에서 B는 정지해 있다. 따라서 A가 다가와 B를 스쳐 지나가야 한다. 따라서 B는 필연적으로 A가 다가오다가 스쳐 지나갔다고 주장한다. 상대성 원리에 의하여 두 주장 중 어느 것도 거짓이 아니다. 모두 각 관성계에서의 사실이다.

공리 2 (광속 불변 원리) *모든 관성계에서 관측되는 (진공에서의) 빛의 속력은 광원의 운동 상태와 무관하게 동일하다.*

예제 2 *광속 불변 원리*

지면에 대하여 5 m/s의 속력으로 등속도 운동하는 자동차 위에서 앞, 뒤로 공을 자동차에 대하여 2 m/s의 속력으로 던졌다. 한편, 지면에 대하여 $0.5c$로 등속도 운동하는 우주선에서 앞, 뒤로 레이저를 쏘았다. 이때 공과 레이저의 지면에 대한 속력은?

자동차에서 앞으로 던진 공의 속력은 $5 + 2 = 7$ m/s이다. 자동차에서 뒤로 던진 공의 속력은 $5 - 2 = 3$ m/s이다. 고전적인 상대 속도를 적용하면 된다. 한편, 우주선에서 쏜 레이저의 속력은 우주선의 운동 상태와는 무관하게 c이다. 우주선도 c로 측정하고, 지면에서도 c로 측정한다.

정의 1 (사건) *시공간 상에서 나타난 어떤 사건은 그 사건이 일어난 시공간 상의 지점으로 나타낸다.*

예를 들어 위치 s에서 시각 t일 때 일어난 사건은 순서쌍 (s, t)로 나타낼 수 있다. 이 값이 동일하면 하나의 사건으로 취급하고, 이 값이 다르면 다른 사건으로 취급한다. 위치와 시각은 원점에 따라 값이 바뀌므로, 사건도 시공간 상의 원점에 따라 값이 바뀌게 된다. 그러나 두 사건 사이의 공간 간격(거리)과 시간 간격(시간)은 원점에 무관하다.

모든 사건은 모든 좌표계에서 발생한다. 어떤 좌표계에서 발생한 사건이 다른 좌표계에서는 발생하지 않는 일은 없다. 그렇게 되면 인과율이 어긋나게 되기 때문이다.

문제 상황에서 어떤 사건이 일어났는지를 설정하는 것은 중요한 일이다. 상대론적 효과에 의한 현상[1]은 서로 다른 두 사건 사이의 간격이 다른 관성계에서 다르게 관측되기 때문에 일어난다. 특히, 두 사건의 발생 시각이 다르게 관측되는 것을 동시성의 상대성, 두 사건 사이의 시간 간격이 증가하는 현상을 시간 팽창, 두 사건 사이의 공간 간격이 감소하는 현상을 길이 수축이라고 한다.

정의 2 (관측) *관측은 좌표계에서 발생한 사건의 위치와 시각을 구하는 것이다.*

지금부터 관측은 관측 시의 오차, 신호의 전달 시간 등을 모두 제외하는 것으로 약속한다. 예를 들어 위치 s에서 시각 t일 때 발생한 빛이 s로부터 L만큼 떨어진 관찰자에게 도달하려면 $\frac{L}{c}$의 시간이 추가로 걸린다. 그러나 조건이 충분하다면 측정된 시간에서 $\frac{L}{c}$을 뺌으로써 발생 시각이 t임을 구할 수 있다. 이렇게 가정하면 같은 좌표계에 있는 모든 관찰자는 동일한 관측을 하게 된다. 그러면 실제 관찰자의 존재 유무도 중요하지 않다. 어떤 관성계에 대하여 항상 임의의 관찰자를 가정해도 일반성을 잃지 않는다. 또, 측정과 관측은 구분하기 애매하므로 편의 상 같은 의미로 사용한다고 보고 혼용한다.

[1]이것은 사건이 아니다. '어떤 물체의 길이가 절반으로 관측된다'나 '두 벽에 빛이 동시에 도달한다'같은 것은 사건이 아니다. 사건은 하나의 순서쌍으로 나타난다.

정의 3 (로렌츠 상수) *두 관성계의 상대 속도의 크기가 v일 때 로렌츠 상수는*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

이다.

로렌츠 상수의 식 자체는 중요하지 않으나, 그 경향성은 이해해두어야 한다. $v = 0$일 때 $\gamma = 1$이다. v의 값이 증가할 수록 γ의 값도 증가한다. 이때 로렌츠 상수의 값이 커지면 상대론적 효과의 정도도 커지게 된다. 거칠게 말하자면, v가 클수록 시간 팽창, 길이 수축 등의 효과가 커진다.

1.3 동시성의 상대성

동시성의 상대성은 한 관성계에서 동시[2]에 일어난 서로 다른 두 사건이 다른 관성계에서는 동시에 일어나지 않게 되어 '동시성'이 붕괴하게 되는 현상이다.

정리 1 (동시성의 상대성) *한 관성계에서 동시에 일어난 서로 다른 두 사건은 다른 관성계에서는 동시에 일어나지 않는다.*

이에 대한 간단한 증명은 광속 불변 원리로부터 보일 수 있다.

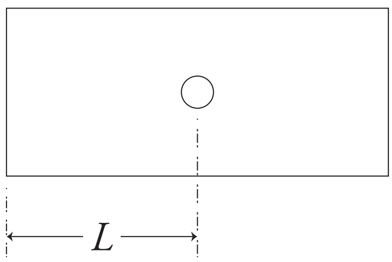

그림 4.1: 우주선과 광원

그림 4.1은 길이가 $2L$인 우주선의 중앙에 광원이 설치된 모습을 나타낸 것이다. 광원에서 빛을 방출하면 빛이 사방으로 퍼져서 양쪽 벽에 도달하게 된다. 왼쪽 벽에 빛이 도달하는 사건 A와 오른쪽 벽에 빛이 도달하는 사건 B를 우주선 외부의 관찰자와 우주선 내부의 관찰자가 각각 어떻게 관측하는 지 살펴보자.

[2]여기서 '동시'는 사건 A가 (s_A, t_A)에 발생하고 사건 B가 (s_B, t_B)에 발생하였을 때, $t_A = t_B$임을 의미한다.

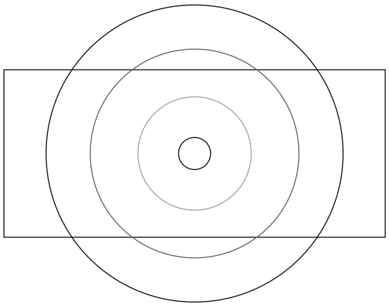

그림 4.2: 우주선의 좌표계

그림 4.2은 우주선의 좌표계에서 보이는 모습을 나타낸 것이다. 광원에서 빛이 방출되는 사건 O를 $(0, 0)$으로 두자. 광원과 두 벽이 모두 우주선에 대하여 정지해 있으므로, 사건 A와 B는 각각 다음과 같다.

$$A = (-L, \frac{L}{c}),\ B = (L, \frac{L}{c})$$

여기서 왼쪽을 $(-)$방향, 오른쪽을 $(+)$방향으로 두었다. A의 시각과 B의 시각이 $\frac{L}{c}$로 동일하므로 우주선의 좌표계에서 A와 B는 동시에 발생한다.

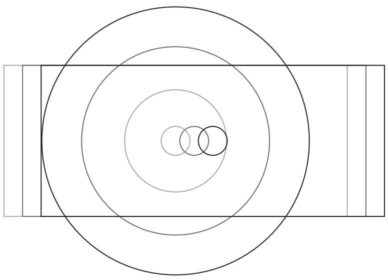

그림 4.3: 외부 관찰자의 좌표계

그림 4.3은 우주선 외부에 있는 어떤 관찰자의 좌표계에서 보이는 모습을 나타낸 것이다. 외부에서 볼 때, 우주선이 오른쪽(즉, $(+)$방향)으로 등속도 운동한다고 하여도 일반성을 잃지 않는다. 빛의 궤적을 추적해보면, 빛이 광원에서 출발한 후 왼쪽 벽에 먼저 도달함을 알 수 있다. 앞에서와 마찬가지로 광원에서 빛이 방출되는 사건 O를 $(0, 0)$으로 두고 사건 A와 B를 구하자.

우주선의 속력을 v라 하자. 빛이 왼쪽 벽으로 다가가는 경우, 벽도 빛을 향해

다가간다. 따라서 A가 일어난 시각 t_A는

$$vt_A + ct_A = L', \quad t_A = \frac{L'}{c+v}$$

빛이 오른쪽 벽으로 다가가는 경우, 벽이 빛으로부터 멀어진다. 따라서 B가 일어난 시각 t_B는

$$ct_B - vt_B = L', \quad t_B = \frac{L'}{c-v}$$

여기서 L'은 L이 길이 수축[3]된 것을 나타낸다. 이제 사건 A와 B는 각각 다음과 같다.

$$A = (-\frac{cL'}{c+v}, \frac{L'}{c+v}), \ B = (\frac{cL}{c-v}, \frac{L'}{c-v})$$

$\frac{L'}{c+v} < \frac{L'}{c-v}$이므로 외부 관찰자의 좌표계에서 A가 B보다 먼저 발생한다. 빛의 속력은 동일하지만 이동 거리가 달라지기 때문이다. 빛의 궤적을 살펴보면 이를 쉽게 이해할 수 있다.

이를 일반적인 경우로 확장해보자. 서로 상대적으로 운동하는 두 좌표계 O와 O'을 생각하자. O에서 두 사건 A와 B가 동시에 일어났다고 하자. 그러면 A와 B의 중앙의 광원을 상상해서 그 광원이 방출한 빛이 A와 B가 일어나는 위치에 도달한 그 순간에 마침 A와 B가 발생했다고 가정할 수 있다. 이렇게 되면 O에서 A와 B는 그 위치에 빛이 도달하는 것도 '포함'하게 된다. 이는 모든 좌표계에서 그러하다. 그런데 앞에서 보인 바와 같이 광원에서 방출된 두 빛이 벽에 도달하는 두 사건은 O'에서 보면 동시에 일어나지 않는다. 따라서 O'에서 두 사건 A와 B는 동시에 일어나지 않는다.

정의 4 (동기화) *서로에 대해 정지한 두 시계가 항상 같은 시각을 가리키도록 만드는 것을 동기화라고 한다.*

한 좌표계 내의 관측자들은 어떤 기준 시각을 시간의 원점으로 두고 사건을 측정해야 할 것이다. 따라서 모든 관측에서 같은 시각을 원점으로 하기 위해서는 시계를 동기화시키는 작업이 필요하다. 물론 이는 비유적인 것이다.

[3] 뒤에서 소개한다.

이때, 두 시계를 한 자리에서 맞춘 후 각자의 자리에 가져다 두는 것은 유효하지 않다. 정지해 있던 시계를 이동시키고 다시 정지시키는 과정에서 시계는 반드시 가속을 겪는다. 따라서 일반 상대론적 효과에 의해 이동한 시계가 시간 지연을 겪었으므로 두 시계가 서로 다른 시각을 가리키게 된다. 즉, 동기화는 각 시계가 그 자리에 정지해 있는 상태에서 행해져야 한다.

어떤 방식으로 동기화하든, 앞에서 살펴본 바와 같이 중앙의 광원에서 각 시계에 빛이 도달하는 순간부터 시계가 움직이기 시작하는 것으로 바꾸어 생각할 수 있다. 서로에 대해 정지한 두 시계 C와 C'을 생각하자. 시계에 대해 정지한 좌표계에서 C와 C'이 각각 s_1, s_2에 위치해 있고, 서로 동기화되어 있다고 하자. 그러면 C가 시각 t를 가리키는 사건은 (s_1, t)이고 C'이 시각 t를 가리키는 사건은 (s_2, t)가 된다. 이제 두 시계의 중앙에 광원이 있어서 시각 t에 각 시계에 빛이 도달하도록 하는 그 순간 광원에서 빛을 방출했으며, 두 시계가 각자에게 빛이 도달한 순간을 시각 t로 하여 작동하기 시작했다고 해도 상관 없기 때문이다.

따름정리 1 (동기화의 오류) *한 관성계에서 동기화된 두 시계는 다른 관성계에서는 동기화되어 있지 않다.*

동기화된 두 시계는 임의의 시각 t에 대하여 두 시계가 시각 t를 가리키는 사건이 항상 동시에 일어난다. 그러나 동시성의 상대성에 의하여 (두 시계가 운동하는 것으로 관측되는) 다른 좌표계에서 관측하면 두 시계가 시각 t를 가리키는 사건이 항상 동시에 일어나지 않는다. 따라서 다른 좌표계에서는 두 시계가 동기화되어 있지 않다. 이와 같은 수많은 역설들이 동시성의 붕괴로부터 나온다.

예제 3 *우주선과 화산*

철수가 탄 우주선이 지구를 빛에 가까운 속력으로 등속 직선 운동하고 있다. 우주선은 화산 A에서 화산 B 방향으로 이동 중이고, 그 사이 어딘가에 영희가 서있다. 영희가 관측할 때 두 화산이 동시에 폭발했다면, 철수가 관측할 때 두 화산 중

어느 것이 먼저 폭발하는가?

우선 영희의 좌표계에서 A가 폭발하는 사건 E_A, B가 폭발하는 사건 E_B, A에서 방출된 빛과 B에서 방출된 빛이 A와 B의 중앙 O에서 만나는 사건 E_O를 생각하자. 철수의 좌표계에서도 E_O는 A와 B의 중앙인 O에서 반드시 발생한다. 그런데 철수가 관측할 때 A와 B와 지구와 영희가 모두 B에서 A를 향하는 방향으로 운동한다. 따라서 A와 B의 중앙인 O도 '움직이는 점'이 된다. O는 A에 가까워지는 방향으로 움직이고 B에 멀어지는 방향으로 움직이므로, 'A에서 방출된 빛이 O에 도달하는데 걸리는 시간'은 'B에서 방출된 빛이 O에 도달하는데 걸리는 시간'보다 짧다. 그런데 두 빛이 O에 도달하는 것은 동시[4]이므로 결국 E_B가 E_A보다 먼저 일어나야 한다. 그래야 도달하는 시각이 동일할 수 있기 때문이다. 따라서 철수는 화산 B가 먼저 폭발한 것으로 관측한다.

예제 4 *기차와 번개*

기차가 지면에 대하여 빛에 가까운 속력으로 서쪽을 향해 등속 직선 운동하고 있다. 지면에 서있던 철수는 기차의 양 끝에 동시에 번개가 치는 것을 관측하였다. (1) 이때, 기차의 승객인 영희는 서쪽 끝과 동쪽 끝 중 어느 쪽에 먼저 번개가 친 것으로 관측하는가? (2) 거꾸로, 영희가 기차의 양 끝에 동시에 번개가 친 것으로 관측했다고 하자. 그러면 철수의 관측은 어떻게 되는가?

---

(1) 우선 철수의 좌표계에서 서쪽 끝에 번개가 치는 사건 A와 동쪽 끝에 번개가 치는 사건 B, 여기서 방출된 빛이 '철수의 좌표계에서 번개가 친 그 위치'의 중앙에 도달하는 사건 O를 생각하자. 영희의 좌표계에서는 '철수가 생각하는 그 중앙'이 동쪽으로 운동한다. 앞선 예시와 마찬가지 방법으로 영희의 좌표계에서는 A가 먼저 일어나야 서쪽 끝에서 오는 빛이 동쪽 끝에서 오는 빛과 동시에

[4]여기서 동시는 같은 위치, 같은 시각을 의미한다. 즉, 하나의 사건으로 나타난다.

동쪽으로 이동하는 중앙에서 만나 O가 일어난다. 따라서 영희는 서쪽 끝에 먼저 번개가 친 것으로 관측한다.

(2) 영희의 좌표계에서 서쪽 끝에 번개가 치는 사건 A와 동쪽 끝에 번개가 치는 사건 B, 여기서 방출된 빛이 기차의 중앙에 도달하는 사건 O를 생각하자. 철수의 좌표계에서는 '기차의 중앙'이 서쪽으로 운동한다. 앞선 예시와 마찬가지 방법으로 철수의 좌표계에서는 B가 먼저 일어나야 동쪽 끝에서 오는 빛이 서쪽 끝에서 오는 빛과 동시에 서쪽으로 이동하는 중앙에서 만나 O가 일어난다. 따라서 철수는 동쪽 끝에 먼저 번개가 친 것으로 관측한다.

따름정리 2 (사건의 발생 순서) *관성계 O에서 두 사건 A와 B가 동시에 일어난 것으로 관측했다면, 다른 관성계 O'은 O에 대하여 O'이 다가가는 방향에 있는 사건이 먼저 발생한 것으로 관측한다.*

앞선 예시들을 살펴보면 위와 같이 일반화할 수 있음을 알 수 있다. A와 B가 반드시 빛의 방출을 동반하지 않는다면, 그 자리에 광원을 설치했다고 상상하면 될 일이다.

1.4 시간 팽창

시간 팽창은 빠르게 운동하는 관성계의 시간이 느리게 간다는 것이다. 이렇게 적으면 애매한 구석이 많은데 조금 더 엄밀하게 접근해보도록 하자.

정의 5 (고유 시간) *두 사건 사이의 공간 간격이 0으로 관측되는 좌표계에서 관측한 두 사건 사이의 시간 간격을 고유 시간이라고 한다.*

고유 시간의 정의를 더 쉽게 풀어 쓰면 다음과 같다. **두 사건이 한 장소에서 일어나는 좌표계에서 측정한 시간 간격이 고유 시간이다**. 문제 상황이 주어지면 거기서 설정한 두 사건의 고유 시간을 측정하는 좌표계가 어느 쪽인지를 파악하는 것이 중요하다.

정리 2 (시간 팽창) *두 사건 사이의 공간 간격이 0이 아닌 좌표계에서 관측한 두 사건 사이의 시간 간격은 고유 시간보다 길다.*

이에 대한 간단한 증명은 동시성의 상대성과 마찬가지로 광속 불변 원리로부터 보일 수 있다.

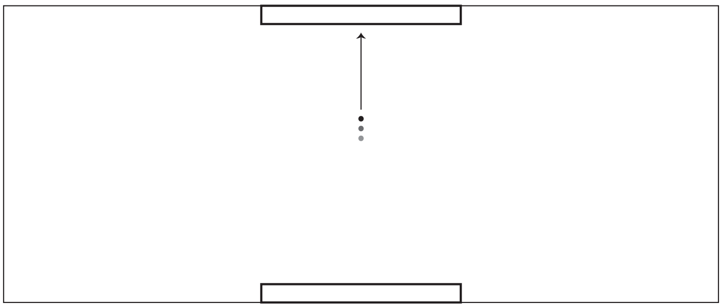

그림 4.4: 우주선과 광자시계

그림 4.4은 우주선에 길이가 L인 광자시계가 설치된 모습을 나타낸 것이다. 광자시계는 두 개의 거울로 이루어져 있다. 광자시계의 주기는 아래쪽 거울에서 방출된 광자 하나가 위쪽 거울에 반사되어 다시 아래쪽 거울에 돌아오는 동안의 시간을 광자의 이동 거리를 광자의 속력 c로 나누어 구한다. 이때, 아래쪽 거울에서 광자가 출발하는 사건을 A, 반사된 광자가 다시 아래쪽 거울에 도달하는 사건을 B라 하자.

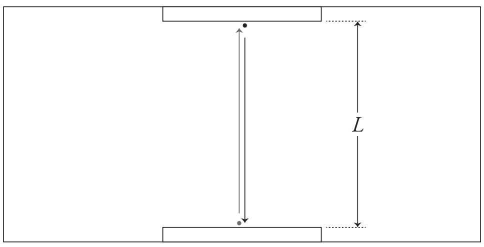

그림 4.5: 우주선의 좌표계

그림 4.5은 우주선의 좌표계에서 광자가 왕복하는 모습을 나타낸 것이다. 빛이 이동한 거리는 $2L$이므로 측정된 주기 $t_0 = \frac{2L}{c}$이다. 우주선이 관측할 때 A와 B가 일어나는 위치는 동일하다. 따라서 우주선에서 관측한 시간 t_0는 고유시간이다.

그림 4.6은 우주선 외부에 있는 관찰자의 좌표계에서 광자가 왕복하는 모습

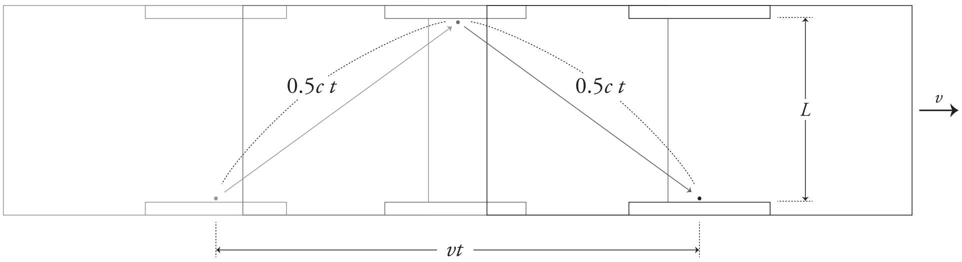

그림 4.6: 외부 관찰자의 좌표계

을 나타낸 것이다. 우주선이 오른쪽으로 v의 속력으로 운동하고 있다고 가정해도 일반성을 잃지 않는다. 광자가 아래쪽 거울에서 출발하는 사건, 위쪽 거울에 도달하는 사건, 아래쪽 거울로 되돌아오는 사건이 '외부 관찰자의 좌표계'에서도 발생해야 하므로 광자의 경로가 그림 4.6과 같이 나타난다.[5] 여기서 사건 A와 B의 공간 간격이 vt임을 알 수 있다.

외부 관찰자의 좌표계에서 측정된 주기를 t라 하면, 우주선이 오른쪽으로 이동한 거리는 vt이고 광자가 이동한 거리는 ct이다. 광자의 이동 경로가 빗변이므로

$$\frac{ct}{2} = \sqrt{(\frac{vt}{2})^2 + L^2} = \sqrt{(\frac{vt}{2})^2 + (\frac{ct_0}{2})^2}$$

이므로

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \gamma\, t$$

이다. 구체적인 식은 암기 사항이 아니다. 알아두어야 할 것은 $\gamma \geq 1$이므로 $t \geq t_0$라는 것이다. 즉, 두 사건 사이의 공간 간격이 0이 아닌 좌표계에서 관측한 두 사건 사이의 시간 간격은 고유 시간보다 길다. 만일 광자 시계가 진행 방향에 나란하게 설치되어 있어도 똑같은 결과를 얻게 될까?[6]

예제 5 *빛의 경로*

시간 팽창의 증명을 조금 비틀어보자. 그림 4.4에서 아래쪽 거울에서 광자가 출

[5]광자의 운동이 상식과 벗어난다고 생각될 수 있겠으나, 광자의 행동은 본래 일반의 상식에서 더 벗어난다. 출발한 광자는 가능한 모든 경로로 운동하여 도착점에 도달한다.

[6]그렇다. 그냥 고유 시간으로 접근하면 된다.

발하는 사건을 A, 위쪽 거울에 광자가 도달하는 사건을 B라 하자. A와 B 사이의 시간 간격은 우주선 내부의 관찰자가 측정한 것과 우주선 외부의 관찰자가 측정한 것 중 어느 것이 긴가? 두 관찰자는 서로에 대해 등속도 운동하고 있다.

내부에서 측정한 것을 t_0라 하고 외부에서 측정한 것을 t라 하면, $t_0 = \frac{L}{c}$이고

$$ct = \sqrt{(vt)^2 + L^2} = \sqrt{(vt)^2 + (ct_0)^2}$$

이므로

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \gamma\ t$$

이다. $\gamma \geq 1$이므로 $t \geq t_0$이다. t_0가 수직 경로를 측정한 시간인 반면, t는 빗변 경로를 측정한 시간이기 때문이다. 여기서 주목해야 할 점은 t_0가 고유시간은 아니지만 원본과 동일한 결과를 얻었다는 점이다. 그 이유는 마침 여기서의 t_0와 t가 원본에서의 정확히 절반이기 때문이다. 만일 광자 시계가 진행 방향에 나란하게 설치되어 있어도 똑같은 결과를 얻게 될까?[7]

예제 6 *뮤온의 수명*

우주 공간을 유영하던 과학자 철수는 $\beta-$붕괴에 의해 형성된 뮤온이 생성 직후 $0.6c$의 속력으로 등속도 운동하다가 T_1의 시간이 지난 후 소멸하는 현상을 관측하였다. 한편 철수에 대해 $0.6c$의 속력으로 등속도 운동하던 과학자 영희는 $\beta-$붕괴에 의해 형성된 뮤온이 생성되어 정지하였다가 T_2의 시간이 지난 후 소멸하는 현상을 관측하였다. T_1과 T_2의 크기를 비교하여라.

뮤온이 형성되는 사건을 A, 뮤온이 소멸하는 사건을 B라 하자. 철수가 관측할 때, A와 B는 $0.6cT_1$의 공간 간격을 가지므로 T_1은 고유 시간이 아니다. 한편,

[7] 진행 방향에 나란하게 설치한 광자시계에서는 (외부에서 관측할 때) 그 자체의 길이도 달라지고, 광자가 왼쪽으로 이동하는 거리와 오른쪽으로 이동하는 거리가 달라지므로 각각의 경우에 걸리는 시간이 다르다.

영희의 관측에서는 뮤온이 정지해 있었으므로[8] A와 B의 공간 간격이 0이다. 즉, 한 자리에서 일어난다. 따라서 T_2는 고유 시간이다. 그러므로 $T_1 \geq T_2$가 성립한다. 정량적으로 계산[9]해보면 $T_1 = \frac{5}{4}T_2$를 얻는다.

예제 7 *미사일과 지구*

지구의 어떤 위대한 국가에서 우주로 미사일을 쏘았다. 미사일은 어떤 변수에도 굴하지 않고 대기권을 통과한 순간부터 v의 속력으로 일정하게 등속도 운동한다. 지구의 관제탑에서는 미사일이 대기권을 통과한 순간 우주로 1차 신호를 보내고 시간 t만큼 기다렸다가 2차 신호를 보낸다. 지구에서 1차 신호를 보낸 순간부터 2차 신호를 보낸 순간까지, 지구에서 측정한 우주선의 이동 거리와 우주선에서 측정한 지구의 이동 거리를 적당히 표현해보자.

지구에서 측정한 우주선의 이동 거리는 자명하게 vt이다. 우주선의 좌표계에서는 지구가 우주선에서 멀어지는 방향으로 움직인다. 그리고 지구의 이동 거리는 우주선에서 측정한 '1차 신호가 발생하는 사건'과 '2차 신호가 발생하는 사건'의 시간 간격에 지구의 속력(v)을 곱한 것이다. 그런데 1차 신호가 발생하는 사건과 2차 신호가 발생하는 사건은 지구에서 측정한 t가 고유 시간이다. 따라서 우주선에서 측정한 두 사건 사이의 시간 간격은 고유 시간이 아니므로[10] t보다 길다. 따라서 우주선에서 측정한 지구의 이동 거리는 vt보다 길다. 정확하게는 γvt이다.

예제 8 *결투*

[8]따라서 둘은 같은 좌표계에 있다. 영희의 관측은 뮤온의 관측과 일치한다. 뮤온이 관측을 할 수 있는가는 부차적인 문제이다. 같은 좌표계에 있다는 것은 세상을 동일하게 관측한다는 뜻이다. 원점만 일치시킨다면 그렇다. 서로에 대해 정지하는 것이 그렇게 될 조건이다.

[9]교과외이므로 여기까지 할 필요는 없다.

[10]신호의 발생 위치는 지구인데, 지구가 이동하기 때문에.

서부의 황무지에 정지해 있는 철수와 영희가 서로를 향해 동시에 총을 쏘았다. 철수는 북쪽, 영희는 남쪽에 서있고 총알은 같은 속력으로 등속도 운동한다. 황무지에 정지해 있던 민수는 당연히 철수와 민수가 동시에 총을 쏘고 동시에 총에 맞은 것으로 관측하였다. 미개한 인간들을 관측하는 외계학자가 빛의 속력에 가까운 UFO를 타고 남쪽에서 북쪽으로 운동한다고 하자. 외계학자가 관측할 때, 먼저 총을 쏘는 사람은 누구인가? 또, 먼저 총에 맞는 사람은 누구인가?

사건의 발생 순서에 대한 따름정리로부터 둘 다[11] 북쪽에 있는 철수임을 알 수 있다. 여기서 독특한 점은, '철수가 총을 쏜 순간부터 철수가 총에 맞은 순간까지의 시간' = '영희가 총을 쏜 순간부터 영희가 총에 맞은 순간까지의 시간' 이라는 것이다. 각각의 시간은 철수–영희–민수가 관측한 것이 고유 시간이다. 전자는 철수의 위치에서 일어난 두 사건의 고유 시간, 후자는 영희의 위치에서 일어난 두 사건의 고유 시간이다. 총알의 속력과 이동한 거리가 같으므로 걸린 시간도 같게 된다. 외계 학자는 각각이 팽창되어 관측된다. 그리고 그 팽창 정도는 γ로 동일하다. 그래서 외계학자에게도 '철수가 총을 쏜 순간부터 철수가 총에 맞은 순간까지의 시간' = '영희가 총을 쏜 순간부터 영희가 총에 맞은 순간까지의 시간'이 된다.

외계학자의 관측을 풀어 쓰면 다음과 같다. 철수와 영희는 모두 남쪽으로 운동하고 있다. 먼저 철수가 총을 (남쪽으로) 쏜다. 영희는 잠시 후에 총을 (북쪽으로) 쏜다. 이후 영희(남쪽으로)는 총알(남쪽으로)에서 도망가는 방향으로 운동하고, 철수남쪽으로)는 총알(북쪽으로)과 하나되는 방향으로 운동하므로 계산을 해보면 철수가 먼저 총알과 합일을 이루게 된다.

따름정리 3 (시간이 가는 정도 1) *서로에 대해 등속도 운동하는 두 관찰자는 각자 자신보다 상대의 시간이 느리게 가는 것으로 관측한다.*

[11] 먼저 총을 쏜 사람, 먼저 총을 맞은 사람.

'시간이 느리게 간다'라는 문장은 다소 모호한 면이 있다. 다음과 같은 기준을 세워보자. 모든 관찰자에 대하여 길이가 L인 광자 시계를 생각할 수 있다. 이제 '시간이 느리게 가는 정도' = '광자 시계의 주기'로 생각하면 자연스럽다.

모든 관찰자에 대하여 자신의 광자 시계의 주기 $T_0 = \frac{2L}{c}$이다. 자신의 시간은 항상 기준이 되는 정도로 간다. 관측의 기준이 항상 자기 자신이라는 점에서 자명하다. 그러나 상대의 광자 시계의 주기 $T = \gamma\, T_0$이다. 상대의 광자 시계의 주기는 항상 자신의 광자 시계의 주기보다 길거나 같다. 자신의 광자 시계 속 광자가 10번 왕복하는 동안, 상대의 광자 시계 속 광자는 8번 왕복하는 식이다.

따름정리 4 (시간이 가는 정도 2) *모든 관찰자는 자신에 대해 등속도 운동하는 두 관찰자 중 자신에 대한 속력이 더 빠른 관찰자의 시간이 더 느리게 가는 것으로 관측한다.*

앞에서 살펴본 바와 같이 상대의 광자 시계의 주기 $T = \gamma\, T_0$이다. 여기서 비례상수 γ 상대 속도의 크기가 크면 클수록 커진다. 따라서 '속력이 더 큰 상대의 광자 시계의 주기'가 그에 비해 '속력이 느린 상대의 광자 시계의 주기'보다 길다. 따라서 전자의 시간이 느리게 가는 정도가 후자의 시간이 느리게 가는 정도보다 더 크므로, 전자의 시간이 후자의 시간보다 더 느리게 간다.

예제 9 *경주*

우주 경주장에서 우주선 A와 우주선 B가 경주장 관리인에 대하여 (적당히) 오른쪽으로 등속도 운동하고 있다. 관리인이 관측할 때, A가 B보다 왼쪽에 있으며 둘 사이가 점점 가까워지고 있다. (1) 관리인의 관점에서 A와 B의 시간이 가는 정도를 비교하라. (2) A의 관점에서 관리인과 B의 시간이 가는 정도를 비교하라. (3) B의 관점에서 관리인과 A의 시간이 가는 정도를 비교할 수 있는가?

관리인의 좌표계에서부터 시작하자. A와 B가 순서대로 서서 오른쪽으로 운동하는데 둘 사이의 간격이 줄어들고 있으므로, A의 속력이 B의 속력보다 크다. 따라서 (1) A의 시간이 B의 시간보다 느리게 간다. A가 관측할 때는 관리인과 B가 왼쪽으로 운동하는데 (i) 관리인이 B의 왼쪽에 있고 둘 사이의 간격이 늘어나는 경우, (ii) 관리인이 B의 오른쪽에 있고 둘 사이의 간격이 줄어드는 경우가 있을 수 있다. 둘 다 B의 속력보다 관리인의 속력이 큰 경우이다. 따라서 (2) 관리인의 시간이 B의 시간보다 느리게 간다. B가 관측할 때는 관리인은 왼쪽, A는 오른쪽으로 운동한다. 그런데 상대론적 상대 속도를 교과내에서 계산할 수도 없고, 공식이 주어지더라도 조건이 부족하므로 (3) 비교할 수 없다.

1.5 길이 수축

길이 수축은 빠르게 운동하는 관성계의 길이가 줄어든다는 것이다. 이렇게 적으면 시간 팽창에서와 마찬가지로 애매한 구석이 많은데 조금 더 엄밀하게 접근해보도록 하자.

정의 6 (고유 길이) *두 사건 사이의 시간 간격이* 0*으로 관측되는 좌표계에서 관측한 두 사건 사이의 공간 간격을 고유 길이이라고 한다.*

고유 길이의 정의는 고유 시간의 정의와 대칭적이지만 이해하기 쉽지 않다. 정의를 아주 쉽게 풀어 쓰면 다음과 같다. **두 지점이 모두 정지한 것으로 관측되는 좌표계에서 측정한 것이 고유 길이이다**. 여기서 두 지점은 물체의 양 끝일 수도 있고, 서로 다른 각 물체일 수도 있다.

정리 3 (길이 수축) *두 사건 사이의 시간 간격이* 0*이 아닌 좌표계에서 관측한 두 사건 사이의 공간 간격은 고유 길이보다 짧다.*

이에 대한 비직관적인 증명은 동기화의 오류로부터 보일 수 있으나, 복잡하고 중요하지 않으므로 여기서는 수록하지 않는다. 결과적으로 고유 길이가 아닌 길이 L과 고유 길이 L_0에 대하여 $L = \sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}L_0 = \frac{L_0}{\gamma}$이다. 이것은 암기 사항이 아니다. 알아두어야 할 사항은 따로 있다.

1: 고유 길이가 가장 길다.

2: 길이 수축은 두 좌표계의 상대적인 운동 방향과 나란한 방향으로만 일어나며, 수직한 방향으로는 일어나지 않는다.

3: 길이 수축은 좌표계 O에서 좌표계 O'을 관측할 때, O' 자체의 '격자'가 줄어드는 것이다.

4: 고유 길이는 두 지점이 관찰자에 대해 계속해서 정지해 있을 때만 성립한다.

5: 두 좌표계의 상대적인 운동의 연직 방향으로 '길이 수축'이 일어나지는 않지만, 연직 방향으로의 운동을 분석할 때는 '대각선 운동'을 고려해야 한다. 광자 시계에서 빛의 경로가 빗변이 되는 것이 한 예이다.

예제 10 *기차와 터널*

지면에 고정된 철로에 대해 광속에 가까운 일정한 속력 v로 직선 철로를 따라 운동하는 기차가 지면에 고정된 터널을 통과한다. 철로에 가만히 서있던 한 관찰자는 기차의 앞쪽 끝과 뒤쪽 끝이 각각 길이가 L인 터널의 출구와 입구에 동시에 도달한 것으로 관측하였다. (1) 기차 안의 관찰자가 볼 때, 기차의 길이와 터널의 길이는 L에 대해 어떠한가? (2) 기차의 앞쪽 끝이 터널의 출구에 도달하는 것과 기차의 뒤쪽 끝이 터널의 입구에 도달하는 것은 동시인가?

터널의 길이는 철로에 서있는 관찰자가 측정한 것이 고유 길이이고, 기차의 길이는 기차 안의 관찰자가 측정한 것이 고유 길이이다. 철로의 관찰자가 기차의 앞쪽 끝과 뒤쪽 끝이 터널의 출구와 입구에 동시에 도달한 것으로 관측했으므로, 철로의 관찰자가 측정한 기차의 길이는 L이다. 이것은 고유 길이가 아니므로 기차의 고유 길이는 L보다 길다. 고유 길이가 가장 길기 때문이다. 기차의 관찰자가 측정한 터널의 길이는 수축되어 측정되므로 L보다 짧다. 따라서 (1) 기차 안의 관찰자가 볼 때, 기차의 길이는 L보다 길고($\frac{L}{\gamma}$) 터널의 길이는 L보다 짧다(γL).

그러므로 자연스럽게 (2) 기차의 앞쪽 끝이 출구에 도달하는 것이 먼저이고, 앞쪽 끝이 어느 정도 빠져나간 다음 뒤쪽 끝이 입구에 도달하게 된다. 전자가 먼저 발생한다는 것은 **사건의 발생 순서에 대한 따름정리**로부터 쉽게 도출해낼 수 있다.

예제 11 *행성 간 이동*

우주 미아인 철수에 대하여 두 행성 A와 B가 정지해 있다. 어느 날, 영희가 빛의 속력에 가까운 우주선을 타고 행성 A에서 출발한 후 등속도 운동하여 행성 B에 도달하였다. 태생이 이과인 철수의 관측에 의하면 우주선이 A에서 B까지 이동하는데 걸린 시간은 T이고 A와 B 사이의 거리는 L이다. (1) 우주선이 A에서 B까지 이동하는데 걸린 시간을 영희가 측정한 것과 T를 비교하라. (2) A와 B 사이의 거리를 영희가 측정한 것과 L을 비교하라.

우주선이 A에서 출발하는 사건을 E_A, 우주선이 B에 도달하는 사건을 E_B라 하자. 철수가 관측한 E_A와 E_B의 공간 간격은 L이므로 0이 아니다. 영희가 관측한 E_A와 E_B의 공간 간격은 '우주선의 위치' − '우주선의 위치'이므로 0이다. 따라서 (1) 영희가 측정한 것이 고유 시간이므로 T보다 짧다. 고유 시간이 가장 짧기 때문이다. 한편, A와 B는 철수에 대하여 정지해 있으므로 A와 B 사이의 거리는 철수가 관측한 것($= L$)이 고유 길이이다. 따라서 (2) 영희가 측정한 것은 고유 길이가 아니므로 L보다 짧다.