도쿄공업대 2019 이과 수학

번역자: astar@astar.moe

1

(1) $h > 0$로 하자. 좌표평면 상의 점 O$(0, 0)$, 점 P(h, s), 점 Q(h, t)에 대하여, 삼각형 OPQ의 면적을 S라고 하자. 단, $s < t$이다. 삼각형 OPQ의 변 OP, OQ, PQ의 길이를 각각 p, q, r이라 할 때, 부등식

$$p^2 + q^2 + r^2 \geqq 4\sqrt{3}\,S$$

이 성립함을 보여라. 또한, 등호가 성립할 때의 s, t의 값을 구하라.

(2) 사면체 ABCD의 표면적을 T라 하고, 변 BC, CA, AB의 길이를 각각 a, b, c라 하며, 변 AD, BD, CD의 길이를 각각 l, m, n이라 하자. 이때, 부등식

$$a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2 \geqq 2\sqrt{3}\,T$$

이 성립함을 보여라. 또한, 등호가 성립하는 경우 사면체 ABCD가 어떤 사면체인지 대답하라.

2

다음 등식이 $1 \leqq x \leqq 2$에서 성립하도록 하는 함수 $f(x)$와 상수 A, B를 구해라.

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} |\log y| f(xy) dy = 3x(\log x - 1) + A + \frac{B}{x}$$

여기서 $f(x)$는 $1 \leqq x \leqq 2$에 대해 정의되는 연속 함수로 한다.

3

i를 허수단위로 하자. 실수부와 허수부가 모두 정수인 복소수 z에 의해 $\dfrac{z}{3+2i}$로 표현되는 복소수 전체의 집합을 M이라고 하자.

(1) 원점을 중심으로 하는 반지름 r의 원 위나 그 내부에 속하는 M의 원소의 개수를 $N(r)$로 하자. 이때, 집합 $\{r \mid 10 \leqq N(r) < 25\}$를 구하시오.

(2) 복소수 평면에서 서로 다른 2점 z와 w를 잇는 선분을 $L(z,\, w)$로 나타낼 때, 6개의 선분 $L(0,\, 1)$, $L\left(1,\, 1+\dfrac{i}{2}\right)$, $L\left(1+\dfrac{i}{2},\, \dfrac{1+i}{2}\right)$, $L\left(\dfrac{1+i}{2},\, \dfrac{1}{2}+i\right)$, $L\left(\dfrac{1}{2}+i,\, i\right)$, $L(i,\, 0)$로 둘러싸인 영역의 내부나 경계에 속하는 M의 원소의 개수를 구하시오.

4

「$H_1, \cdots, H_n$」을 공간 내의 서로 다른 n개의 평면으로 한다. 공간을 $T(H_1, \cdots, H_n)$개의 공간 영역으로 분할한다고 하자. 예를 들어, 공간의 좌표를 (x, y, z)라고 한다면,

- 평면 $x = 0$을 H_1로, 평면 $y = 0$을 H_2로, 평면 $z = 0$을 H_3으로 한다면 $T(H_1, H_2, H_3) = 8$,
- 평면 $x = 0$을 H_1로, 평면 $y = 0$을 H_2로, 평면 $x + y = 1$을 H_3으로 한다면 $T(H_1, H_2, H_3) = 7$,
- 평면 $x = 0$을 H_1로, 평면 $x = 1$을 H_2로, 평면 $y = 0$을 H_3으로 한다면 $T(H_1, H_2, H_3) = 6$,
- 평면 $x = 0$을 H_1로, 평면 $y = 0$을 H_2로, 평면 $z = 0$을 H_3로, 평면 $x + y + z = 1$을 H_4로 한다면 $T(H_1, H_2, H_3, H_4) = 15$,

이다.

(1) 각 n에 대하여 $T(H_1, \cdots, H_n)$의 가능한 값들 중에서 가장 큰 값을 구하시오.

(2) 각 n에 대하여 $T(H_1, \cdots, H_n)$의 가능한 값들 중에서 두 번째로 큰 값을 구하시오. 단, $n \geqq 2$이다.

(3) 각 n에 대하여 $T(H_1, \cdots, H_n)$의 가능한 값들 중에서 세 번째로 큰 값을 구하시오. 단, $n \geqq 3$이다.

5 $a = \frac{2^8}{3^4}$로 하여, 수열

$$b_k = \frac{(k+1)^{k+1}}{a^k k!} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 고려한다.

(1) 함수 $f(x) = (x+1)\log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$는 $x > 0$에서 감소한다는 것을 보여라.

(2) 수열 $\{b_k\}$의 항의 최댓값 M을 기약분수로 표현하고, $b_k = M$이 되는 k를 모두 구하라.