1

2017 6월 모의고사 30번

(가) $f(x)=f(-x)$ $\cdots$㉠

"$f(x)$는 우함수네."

(나) $\int_{x}^{x+a} f(t)dt=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ $\cdots$이 조건을 (가)와 같이 $f(x)$꼴로 만드려면 미분해야겠다.

(나)를 미분하면 다음과 같다.

$f(x+a)-f(x)=\cos(x+\frac{\pi}{3})$ $\cdots$㉡

㉠을 통해 **$f(x)$가 우함수임**을, ㉡을 통해 **$f(x)$가 a주기로 규칙성을 가짐**을 알 수 있다.

"이 두 조건을 연립하여 소거하려면, ㉠과 ㉡에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입해봐야겠다."

($x=-\frac{a}{2}$을 바로 떠올리려면 숫자에 대한 감이 어느정도 필요하다. 다양한 문제를 풀어보며 감을 키워두는 것이 좋다)

$f(\frac{a}{2})=f(-\frac{a}{2})$ $\cdots$둘이 값이 같다.

$f(\frac{a}{2})-f(-\frac{a}{2})=\cos(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3})$ $\cdots$둘이 값이 같으니 $\cos(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3})=0$이네.

그리고, $0<\frac{a}{2}<\pi$이므로

$\therefore\ a=\frac{5}{3}\pi$

이제 a를 구했고, 동시에 $f(x)$의 **대칭성과 a주기의 규칙**을 모두 설명할 수 있게 되었다.

그러나, 우리는 아직 <u>$f(x)$의 미분가능성</u>을 조건을 통해 알 뿐 설명하지 못한다.
$f(x)$가 미분가능한 이유를 설명하기 위해 ㉠과 ㉡를 각각 미분해보자.

$f'(x)=-f'(-x)$ …㉢

$f'(x+a)-f'(x)=-\sin(x+\frac{\pi}{3})$ …㉣

㉢을 통해 <u>$f'(x)$가 기함수임</u>을, ㉣을 통해 <u>$f'(x)$가 a주기로 규칙성을 가짐</u>을 알 수 있다.

“$f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$가 닫힌 구간 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$에서만 적용되는데, 하필이면 $x=\frac{a}{2}$와 $x=-\frac{a}{2}$사이의 <u>간격이 a이면서</u> 동시에 <u>$f'(x)$가 원점 대칭이네</u>.”

“그렇다면 $x=\frac{a}{2}$에서의 미분값과 $x=-\frac{a}{2}$에서의 미분값 간의 관계를 구해봐야겠다”

이를 위해 ㉢과 ㉣에 $x=-\frac{a}{2}$, 즉 $x=-\frac{5}{6}\pi$를 대입해보자.

$f'(\frac{a}{2})=-f'(-\frac{a}{2})$

$f'(\frac{a}{2})-f'(-\frac{a}{2})=-\sin(\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3})=-\sin(-\frac{\pi}{2})=1$

“$f'(\frac{a}{2})$가 $f'(-\frac{a}{2})$보다 1만큼 더 큰데, 둘이 부호가 반대고 값이 같다고?”

$f'(\frac{a}{2})=f'(\frac{5}{6}\pi)=\frac{1}{2}$이다.

이제, $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$를 미분한 식인
$f'(x)=-3b\sin(3x)-5c\sin(5x)$는 $f'(\frac{5}{6}\pi)=\frac{1}{2}$를 만족하므로 $x=\frac{5}{6}\pi$를 대입하여 정리하면

$-3b-\frac{5}{2}c=\frac{1}{2}$ …㉤

이 과정으로 우리는 b와 c의 관계식을 구하고, <u>$f(x)$의 미분가능성</u> 또한 설명할 수 있게 되었다.
그러나 우리가 아직 간과한 한 가지가 있다..

우리는 ㉡에 대한 모든 것을 구했지만, ㉡은 (나)의 미분식이기에 아직 (나)를 온전히 설명하지 못한다.

(나) $\int_{x}^{x+a} f(t)dt = \sin(x+\frac{\pi}{3})$

를 있는 그대로 기하적으로 해석해보자.

"(나)는 $[x,\ x+a]$ **구간의 적분값**을 정의하고 있네."

"우리가 구해온 방법을 되짚어보면, 유일하게 $f(x) = b\cos(3x) + c\cos(5x)$로 정의되는 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$를 1순위로 살펴보는 것이 현명하겠지."

"그리고 $f(x)$**는 우함수니까** $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$에 대한 선대칭을 가지는 $\left[-\frac{a}{2},\ 0\right]$구간 또한 2순위로 살펴보아야겠다."

"종합적으로 **구간** $[x,\ x+a]$ **의 적분값**을 살펴보아야 한다면, $\left[-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right]$를 살펴보는 것이 가장 현명하겠지?"

(이 부분은 최대한 직관적으로 접근할 수 있도록 익혀두자)

$\left[-\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right]$를 살펴보기 위해 (나)에 $x = -\frac{a}{2}$, 즉 $x = -\frac{5}{6}\pi$를 대입해보자.

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = 2\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = \sin(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}) = -1$$

이를 통해 $\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = -\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

"문제를 끝낼 시간이다."

이제 $f(x) = b\cos(3x) + c\cos(5x)$를 구간 $\left[0,\ \frac{a}{2}\right]$에 대해 적분하고, 적분식에 $\frac{a}{2} = \frac{5}{6}\pi$를 대입하여

$\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = -\frac{1}{2}$를 구하고, 이를 통해 b와 c의 2번째 관계식을 구하면

$\frac{b}{3} + \frac{c}{10} = -\frac{1}{2}$ …㉥

마지막으로 ㉤와 ㉥을 연립하면,

$b = -\frac{9}{4}$, $c = \frac{5}{2}$이므로 이전에 구한 $a = \frac{5}{3}\pi$와 함께

$\therefore\ abc = -\frac{75}{8}$

답: 83

| 무엇을 기준으로 학생들을 변별했는가?

1. 함수의 **주기성(이 문제에서는 a주기로 가지는 규칙성)과 대칭성**을 연결하는 과정에서 함수를 구체화할 수 있다.

2. 구간 함수 또는 미분가능성이 불명확한 문제에서 문제 조건에 미분가능성이 주어졌다면 **미분식이 연속인 이유를 찾기 위해** 조건을 미분할 수 있다.

3. 적분식을 미분하는 과정에서 **정보의 손실**이 발생함을 인지하고, 적분식으로 돌아와 **값을 대입하여** 조건을 온전히 사용할 수 있다.

| NOTES

- 이 문제에서 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$구간에 정의된 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$는 **그 자체로 우함수의 성질을 지니고 있기**에, (가)와 ㉡을 결합하여 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$가 $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$에서 정의되었다고도 생각할 수 있습니다.
- $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 정의된 조건이 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$와 같이 그 자체로 우함수의 성질을 지니고 있지 않았다면, $x=0$**에서의 미분가능성** 또한 검토할 필요가 있습니다.