

수학 영역(B형)

성명	
----	--

수험번호																			
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형('A'형 / 'B'형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

내 안에는 너로부터 도망갈 곳이 한 곳도 없구나.

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 유형('A'형 / 'B'형), 답을 정확히 표기하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오.
배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2015년 9월 19일 시행 Epsilon 모의고사 2회 (B형)

출제, 검토 및 편집

성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon

10학번 : 최원재

11학번 : 양종현

12학번 : 양한솔 황성문

13학번 : 김찬호 오인수 오현주

14학번 : 고정민 김민지 서재현 이다운 임현우

15학번 : 김효석 오민지 유정훈 이민욱 이상민 정다혜 최문영 최봉규

외부검토위원

김태형 (성균관대학교 수학교육과 14)

제 2 교시

Epsilon

수학 영역(B형)



성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 AB 의 $(1, 1)$ 의 성분이 10일 때, 상수 a 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x}{x(e^x + 1)}$ 의 값은? [2점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

3. 함수 $f(x) = 4 \sin x + 3 \cos x + a$ 의 최댓값이 7일 때, 상수 a 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. $\int_{-1}^a (1+x)^3 dx = 2^{10}$ 일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

5. 좌표공간에서 두 점 $A(2, 1, 3)$, $B(a, 3, -1)$ 에 대하여
선분 AB 를 2:1로 내분하는 점의 x 좌표가 4일 때, 선분 AB 의
길이는? (단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① $\sqrt{21}$ ② 5 ③ $\sqrt{29}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

6. 로그방정식 $\log_{\sqrt{3}}x + \log_9\frac{1}{x} = 3$ 을 만족시키는 양수 x 의 값은?
[3점]

- ① 3 ② 9 ③ 18
④ 27 ⑤ 81

7. 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 9, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 15$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 의 값은? [3점]

- ① 27 ② 45 ③ 72 ④ 108 ⑤ 135

8. 두 사건 A, B 가 서로 독립이고, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B^C) = \frac{5}{8}$ 일 때, $P(A \cup B)$ 의 값은? (단, B^C 는 B 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{13}{24}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{15}{24}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

9. 함수 $f(x) = 2^x$ 에 대하여 무한급수 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \frac{4}{n}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{12}{\ln 2}$ ② $\frac{13}{\ln 2}$ ③ $\frac{14}{\ln 2}$
 ④ $\frac{15}{\ln 2}$ ⑤ $\frac{16}{\ln 2}$

10. 좌표공간에서 직선 $l: \frac{x}{2} = -y = \frac{z}{3}$ 와 평면 α 가 점 $(2, -1, 3)$ 에서 수직으로 만난다. 평면 α 의 방정식을 $\alpha: 2x + ay + 3z = b$ 라 할 때, $2a + b$ 의 값은?

(단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

11. 어느 식당에서 만드는 자장면 1그릇의 무게는 평균이 300 g.

표준편차가 30 g인 정규분포를 따른다고
한다. 이 식당에서 자장면 4그릇을
주문했을 때, 자장면 4그릇의 무게가
1140 g보다 작을 확률을 오른쪽
표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[3점]

- ① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1140
④ 0.1587 ⑤ 0.3085

12. 좌표평면에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 의 두 초점을 F, F'라

하자. 제 1사분면의 쌍곡선 위의 한 점 (p, q) 에서 그은 접선이

선분 F'F를 2:1로 내분하는 점을 지날 때, $p^2 + q^2$ 의 값은?

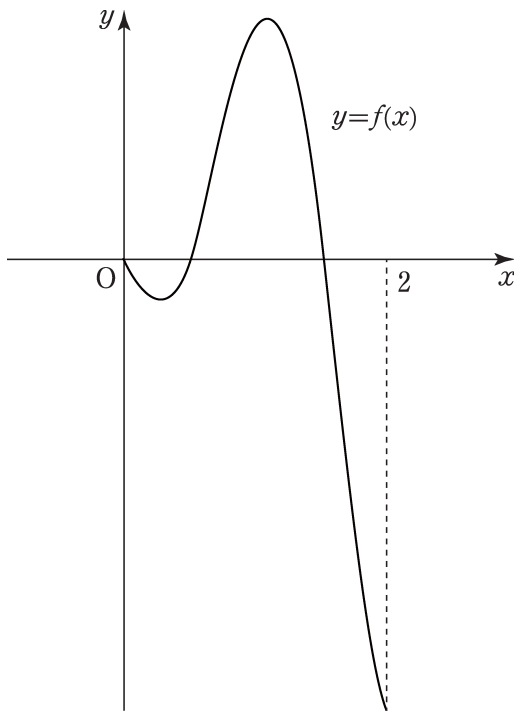
(단, 점 F의 x 좌표는 양수이다.) [3점]

- ① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

[13~14] 구간 $[0, 2]$ 에서 정의된 함수

$f(x) = ax \cos \pi x$ ($a < 0$)의 그래프가 그림과 같다.

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13. $a = -2$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(\frac{1}{2}, 0)$ 에서 그은 접선의 방정식은 $y = mx + n$ 이다. $m+n$ 의 값은?

(단, m, n 은 상수이다.) [3점]

- ① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

14. 좌표평면에서 원점 O 를 중심으로 θ ($0 < \theta < \pi$)만큼

회전시키는 회전변환을 나타내는 행렬을 g 라 하고, 일차변환

h 를 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 이라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점

$P(2, -2\sqrt{3})$ 이 합성변환 $g \circ h$ 에 의하여 곡선 $y = f(x)$ 위의

P 가 아닌 점 Q 로 옮겨진다. θ 가 최대일 때, $k\theta$ 의 값은?

(단, $k > 0$) [4점]

- ① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}\pi$

15. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=9$ 이고, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$a_n = \frac{S_n - 3^{n+1}}{n} + 2 \cdot 3^n \quad (n \geq 2)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식을 정리하면

$$na_n = S_n + (2n-3) \cdot 3^n \quad \dots \textcircled{A}$$

이고, 3이상의 자연수 n 에 대하여

$$(n-1) \cdot a_{n-1} = S_{n-1} + (2n-5) \cdot 3^{n-1} \quad \dots \textcircled{B}$$

이다. \textcircled{A} 에서 \textcircled{B} 을 빼서 양변을 $n-1$ 로 나누면

$$a_n = a_{n-1} + \boxed{\text{(가)}} \quad (n \geq 3)$$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면

$$a_n = a_2 + \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 3)$$

이다.

\vdots

그러므로 a_n 은

$$a_n = \begin{cases} 9 & (n=1) \\ 2 \cdot 3^n & (n \geq 2) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때,

$\frac{f(7)}{g(4)}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{81}{4}$ ② $\frac{83}{4}$ ③ $\frac{85}{4}$ ④ $\frac{87}{4}$ ⑤ $\frac{89}{4}$

16. 1, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 공이 들어있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적혀있는 수를 확률변수 X 라 하자. 확률변수 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}p$	$1-p$	$\frac{1}{2}p$

이 상자에서 임의로 1개의 공을 꺼내고, 다시 넣는 시행을 2번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀있는 수의 평균을 \bar{X} 라 하자.

$P(\bar{X}=2)$ 의 최솟값은? (단, 공의 크기와 모양은 같다.) [4점]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

17. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^2 - 2BA = E, \quad A^2 - 2B^2 = AB$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A-2B$ 의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $AB=BA$

ㄷ. $3A^2=E$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 그림과 같이 2 이상의 자연수 n 에 대하여 함수

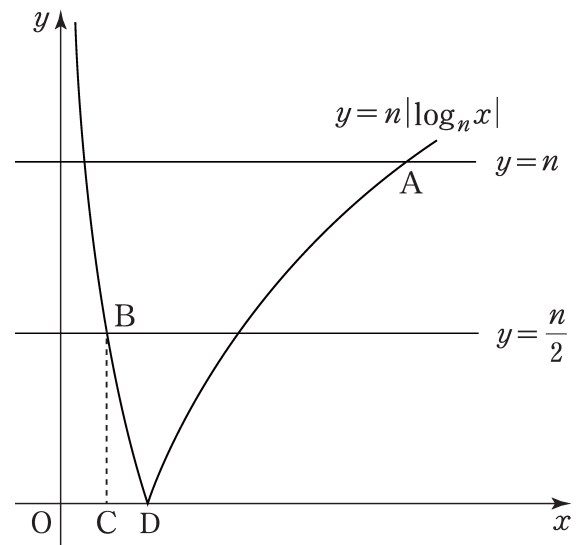
$y = n|\log_n x|$ 의 그래프와 직선 $y = n$ 의 두 교점 중 x 좌표가

1보다 큰 점을 A, 직선 $y = \frac{n}{2}$ 의 두 교점 중 x 좌표가 1보다

작은 점을 B라 하고, 점 B에서 x 축에 내린 수선의 발을 C라

하자. 점 D(1, 0)에 대하여 사각형 ABCD의 넓이를 S_n 이라 할

때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{S_n}$ 의 값은? [4점]

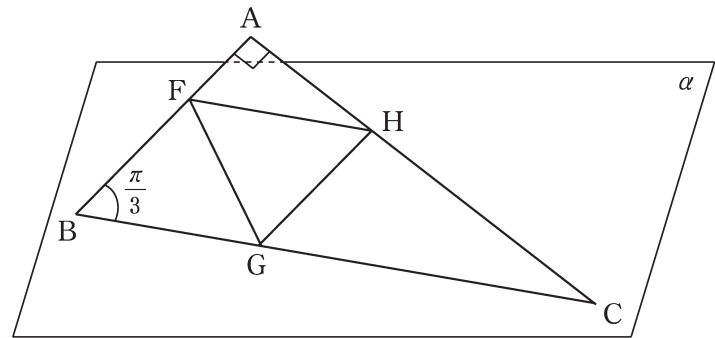


- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

19. 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 4장의 카드를 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하였다. 카드에 적힌 숫자가 왼쪽부터 크지 않은 순서대로 나열되었을 때, 가장 큰 숫자가 12의 약수일 확률은? (단, 카드의 크기와 모양은 같다.) [4점]

- ① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{29}{45}$ ③ $\frac{22}{35}$
 ④ $\frac{32}{45}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

20. 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 점 A와 평면 α 위의 선분 BC에 대하여 $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$, $\overline{BC} = 18$ 이다. 한 변이 선분 BC에 평행하고, 삼각형 ABC에 내접하도록 정삼각형 FGH를 그린다. 정삼각형 FGH의 세 꼭짓점으로부터 같은 거리에 있는 점 중 평면 α 위에 있는 점을 O라고 하자. 삼각형 ABC를 포함하는 평면이 평면 α 와 이루는 각을 θ 라 할 때, $\cos \theta = \frac{3}{5}$ 이다. 사면체 OFGH의 부피는? [4점]



- ① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

21. 정의역이 $\{x|0 \leq x \leq 2\pi\}$ 이고, 다음 조건을 만족시키는 연속함수 $f(x)$ 의 개수는? [4점]

(가) $0 \leq n \leq 3$ 인 각각의 정수 n 에 대하여

$$f\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \sin x + n \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

또는

$$f\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = -\cos x + n + 1 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

이다.

(나) $0 \leq x \leq 2\pi$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^x f(t) dt = \int_{2\pi}^{2\pi-x} \{f(t) - 4\} dt$$

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

단답형

22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^{n+1} + 2^n}{3^n + 2^n}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = \ln x + 3x$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값을 구하시오.

[3점]

24. 무리방정식 $x^2 - 12x - \sqrt{x^2 - 12x - 1} = 7$ 의 모든 실근의 곱을 k 라 할 때, k^2 의 값을 구하시오. [3점]

25. 혼합 용액에서 특정한 성분에 관한 활동도를 λ , 혼합 상태에서의 화학 퍼텐셜을 μ , 단독 상태에서의 화학 퍼텐셜을 μ_0 , 절대온도를 $T(K)$ 라 할 때, 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log \lambda = \frac{\mu - \mu_0}{kT} \quad (\text{단, } k \text{는 상수이다.})$$

혼합 용액 A, B의 성분 X에 관한 활동도가 각각 λ_A, λ_B 이고, 절대온도가 각각 200K, 300K일 때, 혼합 상태에서의 화학 퍼텐셜이 각각 μ_A, μ_B , 단독 상태에서의 화학 퍼텐셜이 각각 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 이다. $\mu_A = \frac{2}{3}\mu_B$ 일 때, $\frac{10\lambda_A}{\lambda_B}$ 의 값을 구하시오. [3점]

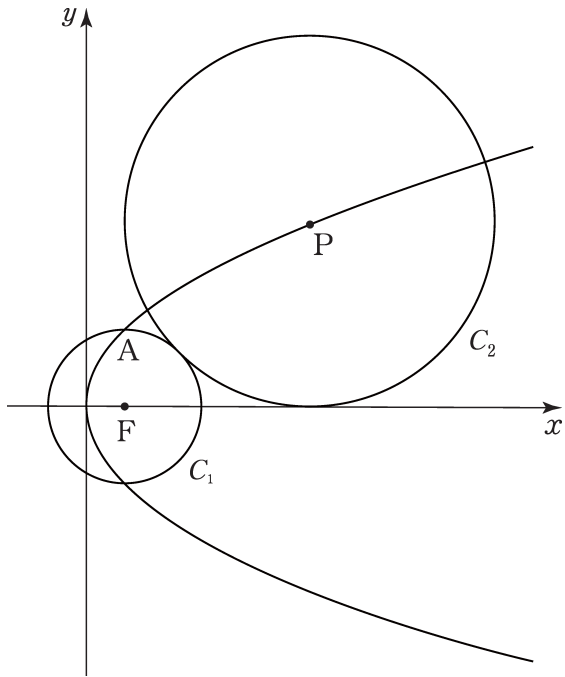
26. 어떤 가게의 초콜릿 종류별 가격이 다음과 같다.

(단위: 원)

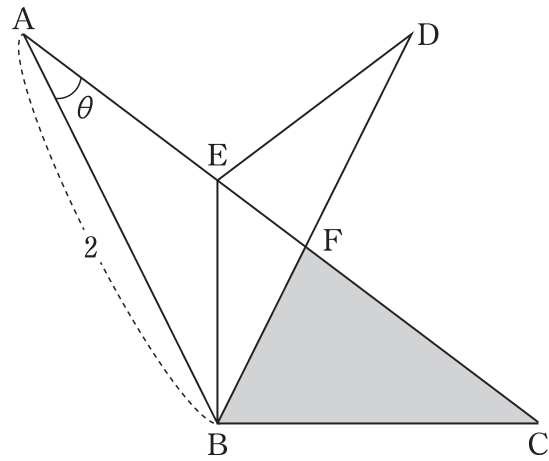
종류	A	B	C	D	E
가격	200	200	400	400	200

1000원을 남김없이 사용하여 초콜릿을 사는 경우의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 초콜릿은 5개 이상 있으며, 각 종류의 초콜릿을 하나도 사지 않을 수 있다.) [4점]

27. 그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점 F를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 2인 원 C_1 이 있다. 원 C_1 과 포물선 $y^2 = 4x$ 이 만나는 점을 A라 하자. 원 C_1 과 외접하고 x 축에 접하는 원 C_2 의 중심 P가 포물선 $y^2 = 4x$ 위에 있을 때, 삼각형 AFP의 넓이는 $a+b\sqrt{2}$ 이다. a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 정수이다.) [4점]

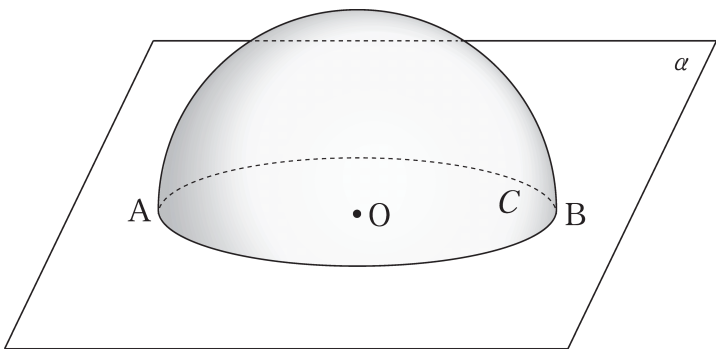


28. 평면에서 길이가 2인 선분 AB를 한 변으로 하고, $\overline{AE} = \overline{BE}$, $\angle BAE = \theta$ 인 이등변삼각형 ABE가 있다. 그림과 같이 두 삼각형 ABE와 DBE가 합동이 되도록 점 D를 잡고, 선분 BE에 수직인 직선과 선분 AE의 연장선이 만나는 점을 C, 선분 CE와 선분 DB가 만나는 점을 F라 하자. 삼각형 BCF의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{p}{q}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이고, 선분 AD와 선분 BC는 평행하다.) [4점]



29. 그림과 같이 중심이 O 이고, 반지름의 길이가 5인 반구의 밑면 C 가 평면 α 위에 있다. 원 C 의 지름의 양 끝점 A, B 에 대하여 반구 위의 점 P 와 점 Q, R 은 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $|\overrightarrow{AP}| = 8$
- (나) $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$
- (다) $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$



평면 AOR 와 평면 α 가 수직일 때, 삼각형 ABQ 의 평면 α 위로의 정사영의 넓이의 최댓값이 k 이다. k 의 값을 구하시오.
(단, 점 P 는 평면 α 위에 있지 않다.) [4점]

30. 자연수 m, n 에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 $f(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^m}$ 가 있다. 양의 실수 t 에 대하여 $f(x) = f(t)$ 을 만족하는 양수 x 의 최솟값을 $g(t)$ 라 할 때, 다음 조건을 만족하는 모든 순서쌍 (m, n) 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) $1 \leq m \leq 20, 1 \leq n \leq 50$
- (나) 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 1 또는 e^3 이다.