10일의 기적

수Ⅰ+수Ⅱ 해설지

3,6,9 ▶ 프리즘 해설지 (feat. 수능한권)
4,7,10 ▶ 일반 해설 (교육청 해설지)

PART B. 올해기출 최종점검 2·3점 문제 (72문항)

Part B. 올해기출 최종점검 4점 문제 (37문항)

Part C. 올해기출 최종점검 고난도 문제 (23문항)

인간은 과정 앞에 무적이고, 결과 앞에 무력하다.
내가 매일 최선을 다하는 것만이
내가 이루어 내야 할 유일한 일이다. -김지석

김지석수학연구소

수 I
1. 지수로그
PART B
※ 4점 ※

제곱근

[2023년 7월 (공통) 9번]

1. 2 이상의 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식

$$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$$

의 모든 실근의 곱이 -4일 때, n의 값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

교육청 해설

[정답] ②

(ⅰ) n이 짝수일 때

$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$의 실근은 $x=\pm\sqrt[n]{8}$ 또는 $x=\pm\sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱이 양수이므로 모순

(ⅱ) n이 홀수일 때

$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$의 실근은 $x=\sqrt[n]{8}$ 또는 $x=\pm\sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱은

$$2^{\frac{3}{n}}\times 2^{\frac{3}{2n}}\times\left(-2^{\frac{3}{2n}}\right)=-2^{\frac{6}{n}}=-4$$

$$2^{\frac{6}{n}}=2^2,\ \frac{6}{n}=2$$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n=3$

[2023년 10월 (공통) 9번]

2. 자연수 n $(n \geq 2)$에 대하여 $n^2-16n+48$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10} f(n)$의 값은? [4점]

① 7　② 9　③ 11
④ 13　⑤ 15

교육청 해설

[정답] ①

n이 홀수이면 $n^2-16n+48$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 항상 1이므로
$f(3)=f(5)=f(7)=f(9)=1$

n이 짝수이면 $n^2-16n+48$의 값에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $n^2-16n+48>0$인 경우
　$(n-4)(n-12)>0$에서 $n<4$ 또는 $n>12$
　이때 $f(n)=2$이므로
　$f(2)=2$

(ⅱ) $n^2-16n+48=0$인 경우
　$(n-4)(n-12)=0$에서 $n=4$ 또는 $n=12$
　이때 $f(n)=1$이므로
　$f(4)=1$

(ⅲ) $n^2-16n+48<0$인 경우
　$(n-4)(n-12)<0$에서 $4<n<12$
　이때 $f(n)=0$이므로
　$f(6)=f(8)=f(10)=0$

따라서 $\sum_{n=2}^{10} f(n)=4\times1+1\times2+1\times1+3\times0=7$

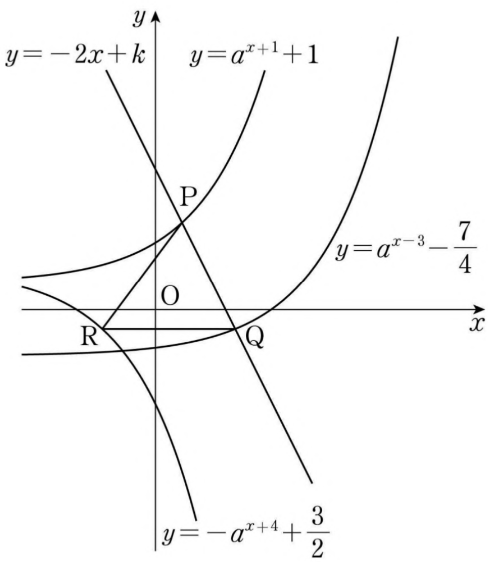
지수함수의 그래프

[2023년 10월 (공통) 13번]

3. 그림과 같이 두 상수 a $(a>1)$, k에 대하여 두 함수

$$y=a^{x+1}+1,\ y=a^{x-3}-\frac{7}{4}$$

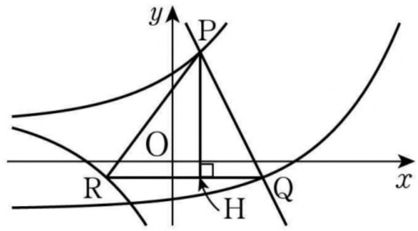
의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=-a^{x+4}+\frac{3}{2}$의 그래프와 점 R에서 만나고 $\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QR}}=5$일 때, $a+k$의 값은? [4점]



① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7
④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

교육청 해설

[정답] ②



점 P에서 직선 QR에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overline{\mathrm{HQ}}=t$ $(t>0)$이라 하면 직선 PQ의 기울기가 -2이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=2t$이고 $\overline{\mathrm{HR}}=5-t$이다.
직각삼각형 PRH에서 피타고라스 정리에 의하여
$(5-t)^2+(2t)^2=5^2$, $t(t-2)=0$, $t=2$
따라서 $\overline{\mathrm{PH}}=4$, $\overline{\mathrm{HR}}=3$
점 R의 x좌표를 m이라 하면 점 P의 x좌표는 $m+3$,
점 Q의 x좌표는 $m+5$이므로
$\mathrm{P}(m+3,\ a^{m+4}+1)$, $\mathrm{Q}\left(m+5,\ a^{m+2}-\frac{7}{4}\right)$,
$\mathrm{R}\left(m,\ -a^{m+4}+\frac{3}{2}\right)$
점 P의 y좌표는 점 R의 y좌표보다 4만큼 크므로
$a^{m+4}+1=\left(-a^{m+4}+\frac{3}{2}\right)+4$
$a^{m+4}=\frac{9}{4}$
$\cdots\cdots$ ㉠
점 Q의 y좌표와 점 R의 y좌표가 같으므로
$a^{m+2}-\frac{7}{4}=-a^{m+4}+\frac{3}{2}$
㉠을 대입하여 정리하면 $a^{m+2}=1$
$a>1$에서 $m+2=0$이므로 $m=-2$
㉠에서 $a^2=\frac{9}{4}$, $a>1$이므로 $a=\frac{3}{2}$
점 $\mathrm{P}\left(1,\ \frac{13}{4}\right)$이 직선 $y=-2x+k$ 위의 점이므로
$\frac{13}{4}=-2\times1+k$, $k=\frac{21}{4}$
따라서 $a+k=\frac{3}{2}+\frac{21}{4}=\frac{27}{4}$

로그함수의 그래프

[2023년 4월 (공통) 10번]

4. 상수 a $(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^x-1$과 곡선 $y=\log_a(x+1)$이 원점 O를 포함한 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 점 중 O가 아닌 점을 P라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 OHP의 넓이가 2일 때, a의 값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

교육청 해설

[정답] ②

곡선 $y=a^x-1$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
곡선 $y=\log_a(x+1)$이고 $a>1$이므로
점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.
점 P의 좌표를 $(k,\ k)$라 하면 점 P는 곡선 $y=\log_a(x+1)$ 위의 점이므로 $k>-1$
삼각형 OHP의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{k^2}{2}=2$$

에서 $k^2=4$, $k=2$
따라서
곡선 $y=a^x-1$이 점 $\mathrm{P}(2,\ 2)$를 지나므로
$2=a^2-1$, $a^2=3$에서 $a=\sqrt{3}$

수 I
2. 삼각함수
PART B
❄ 4점 ❄

삼각함수의 그래프

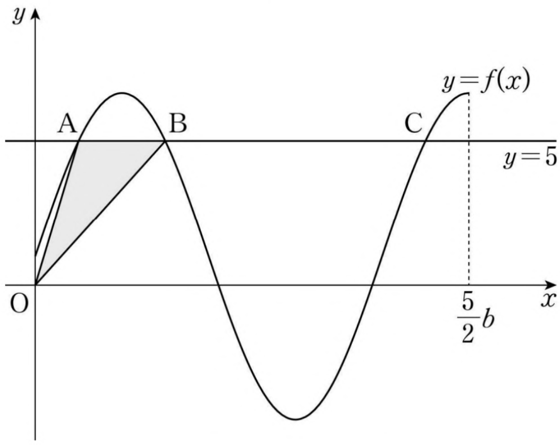
[2023년 10월 (공통) 11번]

5. 그림과 같이 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b}+1 \quad \left(0 \le x \le \frac{5}{2}b\right)$$

의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C라 하자.

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}+6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$일 때, a^2+b^2의 값은? [4점]
(단, $a>4$, $b>0$이고, O는 원점이다.)



① 68　② 70　③ 72　④ 74　⑤ 76

교육청 해설

[정답] ①

삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times5=\frac{15}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=3$,

이때 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}+6=9$

함수 $y=f(x)$의 주기가 $2b$이므로

$2b=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=12$, $b=6$

선분 AB의 중점의 x좌표가 3이므로

점 A의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$이다.

점 A는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=5$에서 $a\sin\frac{\pi}{4}+1=5$, $a=4\sqrt{2}$

따라서 $a^2+b^2=(4\sqrt{2})^2+6^2=32+36=68$

[2023년 3월 (공통) 13번]

6. 두 함수

$$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=\sin x$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [4점]
(단, a, b는 상수이고, $0 \le a \le 2$이다.)

> (가) $\{g(a\pi)\}^2=1$
> (나) $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(g(x))=0$의 모든 해의 합은 $\frac{5}{2}\pi$이다.

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

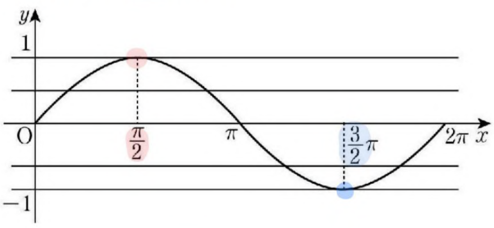
④

(step1) 조건 (가) 활용하기

$\{g(a\pi)\}^2=1$

⇔ $\sin^2(a\pi)=1$

⇔ $\sin(a\pi)=-1$ or 1



⇔ $a\pi=\frac{1}{2}\pi$ or $\frac{3}{2}\pi$ ($\because$ $0 \le a\pi \le 2\pi$)

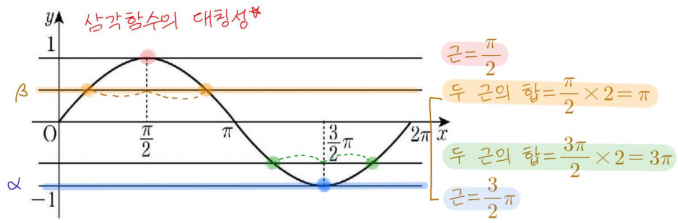
$\therefore$ $a=\frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$

(step2) 조건 (나) 활용하기

$f(X)=0$의 근을 $X=\alpha$ or β라고 하면

$f(g(x))=0$

⇔ $g(x)=\alpha$ or β



$\therefore$ $\alpha=-1$, $0<\beta<1$일 때

$g(x)=\alpha$ or β의 모든 해의 합이 $\pi+\frac{3\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$

(step3) $f(x)$ 식 구하기

$f(x)=x^2+ax+b=0$의 근과 계수의 관계

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$

ⅰ) $a=\frac{3}{2}$

$\alpha+\beta=-a$

⇔ $-1+\beta=-\frac{3}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $0<\beta<1$에 모순

ⅱ) $a=\frac{1}{2}$

$\alpha+\beta=-a$

⇔ $-1+\beta=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $0<\beta<1$ 성립

$\therefore$ $f(x)=x^2+ax+b=x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$\therefore$ $f(2)=\frac{9}{2}$

[2023년 7월 (공통) 10번]

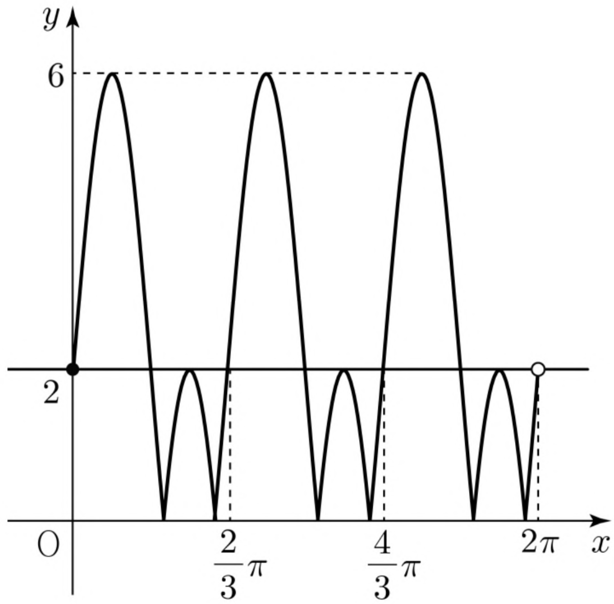
7. $0 \le x < 2\pi$일 때, 곡선 $y = |4\sin 3x + 2|$와 직선 $y = 2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는? [4점]

① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

교육청 해설

[정답] ③

삼각함수 $y = 4\sin 3x + 2$는 주기가 $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값이 6, 최솟값이 -2이므로 $0 \le x < 2\pi$일 때, 곡선 $y = |4\sin 3x + 2|$는 다음과 같다.



따라서 $0 \le x < 2\pi$일 때, 곡선 $y = |4\sin 3x + 2|$와 직선 $y = 2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 9

[2023년 9월 (공통) 9번]

8. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식

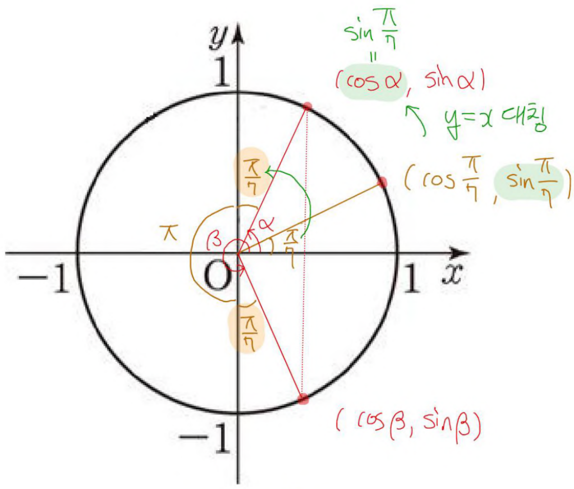
$$\cos x \le \sin \frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는
$\alpha \le x \le \beta$이다. $\beta - \alpha$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{7}\pi$　② $\frac{17}{14}\pi$　③ $\frac{9}{7}\pi$　④ $\frac{19}{14}\pi$　⑤ $\frac{10}{7}\pi$

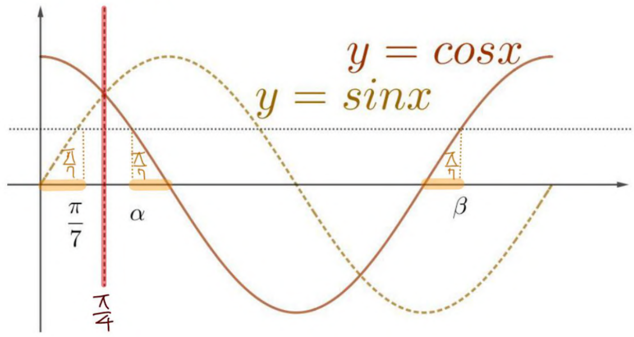
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

③



$\therefore\ \beta - \alpha = \pi + \frac{\pi}{7} \times 2 = \frac{9}{7}\pi$

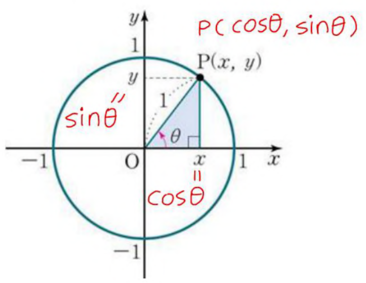
[다른 풀이]
대칭성 활용!



$\therefore\ \beta - \alpha = \pi + \frac{\pi}{7} \times 2 = \frac{9}{7}\pi$

Analysis

단위원의 좌표와 삼각함수의 관계



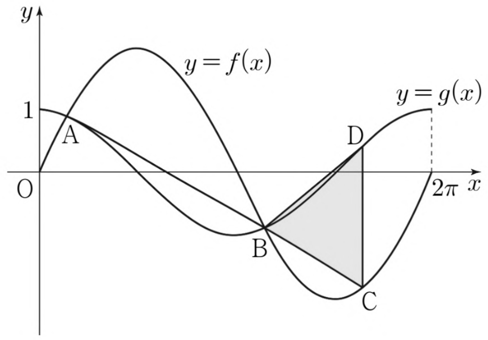
Analysis

삼각함수의 그래프 문제 출제 point

① 대칭성
② 주기성
③ 최대최소

[2023년 4월 (공통) 13번]

9. 다음 그림과 같이 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=k\sin x$, $g(x)=\cos x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점을 C라 할 때, 점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위에 있다. 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 BCD의 넓이는? [4점]
(단, k는 양수이고, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)



① $\frac{\sqrt{15}}{8}\pi$ ② $\frac{9\sqrt{5}}{40}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$
④ $\frac{3\sqrt{10}}{16}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{10}\pi$

교육청 해설

[정답] ③

$0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=g(x)$에서
$k\sin x = \cos x$
$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \frac{1}{k}$ $(\cos x \ne 0)$
그러므로 점 A의 x좌표를 α $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면
함수 $y=\tan x$의 주기는 π이므로
점 B의 x좌표는 $\alpha+\pi$이고
두 점 A, B의 좌표는
각각 $(\alpha, \cos\alpha)$, $(\alpha+\pi, -\cos\alpha)$
선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 C의 좌표는
$\left(\frac{3\times(\alpha+\pi)-1\times\alpha}{3-1}, \frac{3\times(-\cos\alpha)-1\times\cos\alpha}{3-1}\right)$이므로 C$\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi, -2\cos\alpha\right)$
점 C는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로
$-2\cos\alpha = k\sin\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$
$-2\cos\alpha = k\times(-\cos\alpha)$에서 $k=2$이므로
$\tan\alpha=\frac{1}{2}$이고, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$
$\cos\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$에서
점 D의 좌표는 $\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$이고
$\overline{\mathrm{CD}}=\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(-2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
$=\sqrt{5}$
점 B와 직선 CD 사이의 거리는
$\left(\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)-(\alpha+\pi)=\frac{\pi}{2}$
따라서
삼각형 BCD의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

[2023년 4월 (공통) 11번]

10. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식
$2\sin^2 x - 3\cos x = k$의 서로 다른 실근의 개수가 3이다. 이 세 실근 중 가장 큰 실근을 α라 할 때, $k \times \alpha$의 값은? [4점]
(단, k는 상수이다.)

① $\frac{7}{2}\pi$　② 4π　③ $\frac{9}{2}\pi$
④ 5π　⑤ $\frac{11}{2}\pi$

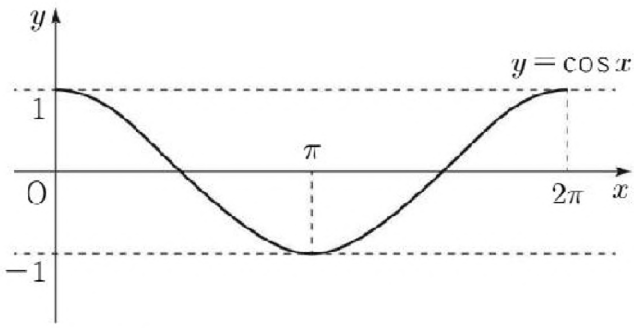
교육청 해설

[정답] 4π

$2(1-\cos^2 x) - 3\cos x = k$

$2\cos^2 x + 3\cos x + k - 2 = 0$

$0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y = \cos x$의 그래프는 다음 그림과 같다.



상수 a에 대하여
$0 \le x \le 2\pi$에서 곡선 $y = \cos x$와 직선 $y = a$가 만나는 서로 다른 점의 개수는
$a = -1$일 때 1이고, $-1 < a \le 1$일 때 2이므로
$0 \le x \le 2\pi$일 때,
방정식 $2\cos^2 x + 3\cos x + k - 2 = 0$의
서로 다른 실근의 개수가 3이려면
$x = \pi$가 이 방정식의 실근이어야 한다.

$2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + k - 2 = 0$에서 $k = 3$

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = (2\cos x + 1)(\cos x + 1) = 0$$에서

$\cos x = -\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x = -1$

$x = \frac{2}{3}\pi$

또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

또는 $x = \pi$

따라서 $k \times \alpha = 3 \times \frac{4}{3}\pi = 4\pi$

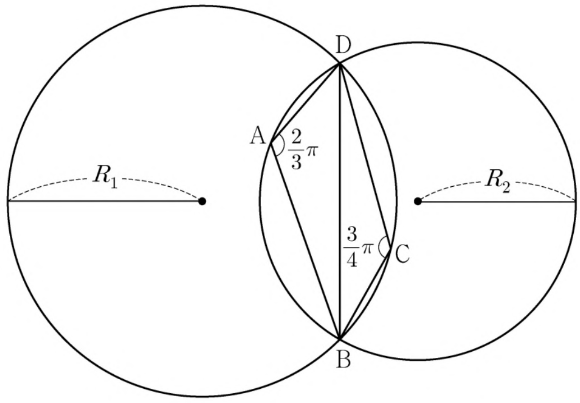
삼각함수의 활용

[2023년 9월 (공통) 20번]

11. 그림과 같이

$\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=1$, $\angle DAB=\frac{2}{3}\pi$, $\angle BCD=\frac{3}{4}\pi$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



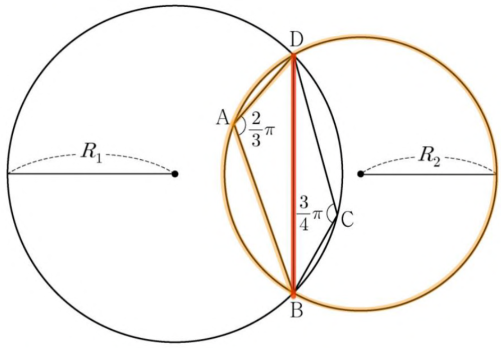
다음은 $R_1\times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
>
> $$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$
>
> 이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
>
> $$R_2=\boxed{(가)}\times\overline{BD}$$
>
> 이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
>
> $$\overline{BD}^2=2^2+1^2-(\boxed{(나)})$$
>
> 이므로
>
> $$R_1\times R_2=\boxed{(다)}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

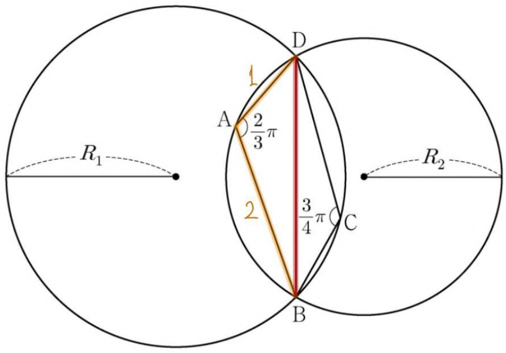
98



$\triangle$ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2$$

$$\therefore\ R_2=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times\overline{BD}$$



$\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$=2^2+1^2-(\boxed{-2})=7$$

$$\therefore\ \overline{BD}=\sqrt{7}$$

$$\therefore\ R_1\times R_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\overline{BD}^2=\boxed{\frac{7}{6}\sqrt{6}}$$

$$\therefore\ p=\frac{\sqrt{3}}{3},\ q=-2,\ r=\frac{7}{6}\sqrt{6}$$

$$\therefore\ 9(pqr)^2=9\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-2)\times\frac{7\sqrt{6}}{6}\right)^2=98$$

[2023년 6월 (공통) 13번]

12. 그림과 같이

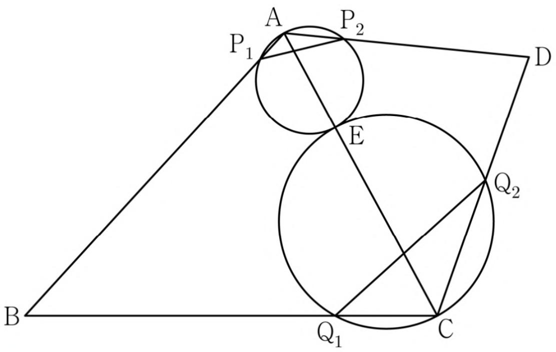
$\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$,

$\cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3}$, $\angle DAB>\frac{\pi}{2}$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? [4점]

(단, $\overline{AB}>\overline{AD}$)



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$

④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

도형의 필연성

필연성 08

사인법칙 활용법 (각이 많을 때)

[단서] → [답]

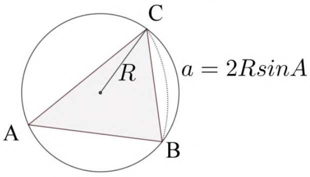
✓ 2변 1각 → 1각

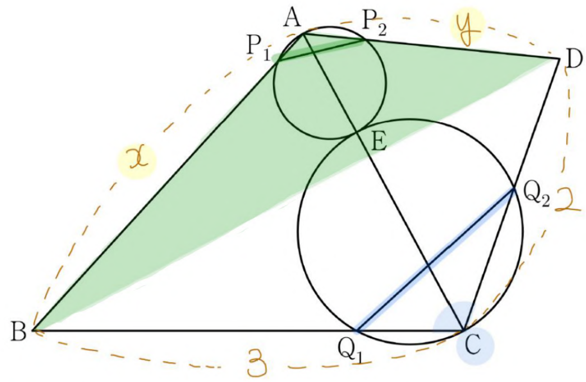
✓ 1변 2각 → 1변

✓ 외접원 등장

Skill 사인법칙 실전용 (2)

✓ 외접원 있을 때





수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

①

구하는 것 ‣ $\overline{AB}+\overline{AD}=x+y$

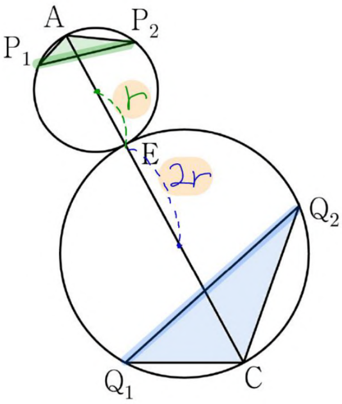
→ 관련도가 높은 단서: $\triangle ABD$의 넓이가 2

→ $\frac{1}{2}xy\sin A=2$

→ $\sin A$를 구할 생각을 해야 한다.

(step1) 사인법칙 실전용 (2)

두 원의 지름 $\overline{AE}:\overline{CE}=1:2$이므로
각 원의 반지름의 길이를 r, $2r$라고 하자.



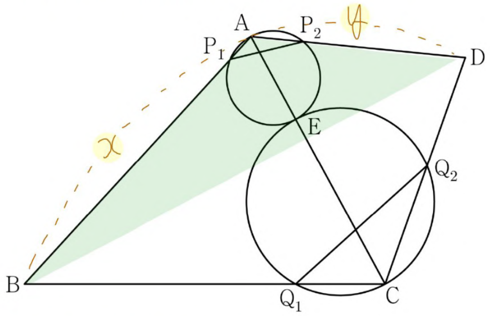
$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\ \cancel{2r}\sin A:2(\cancel{2r})\sin C=3:5\sqrt{2}$

$\therefore\ \sin A=\dfrac{4}{5},\ \cos A=-\dfrac{3}{5}$

$\left(\because\ \cos C=-\dfrac{1}{3},\ \sin C=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

(step2) △ABD의 넓이가 2



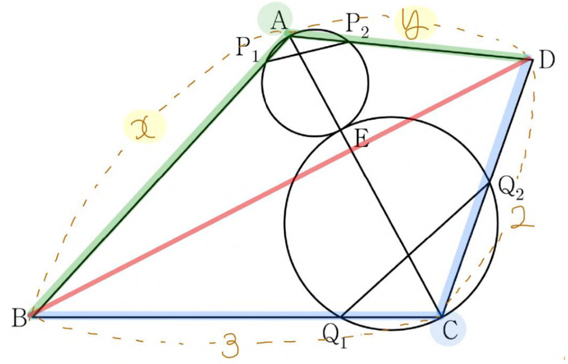
$\triangle ABD$의 넓이$=2$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2}xy\sin A=\dfrac{1}{2}xy\dfrac{4}{5}=2$

$\therefore\ xy=5$

(step3) Double코사인법칙 (1) 통각

사각형의 대각 ∠A, ∠C에 대한 정보가 있다.
→ Double코사인법칙을 쓸 생각을 해야 한다.
(비록 사각형에 대한 외접원 상황은 아니지만
그에 준하는 조건과 상황이 나왔다)



$\overline{BD}^2=x^2+y^2-2xy\cos A$

$=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\cos C$

$\Leftrightarrow\ x^2+y^2-2\cdot5\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)$

$=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$\therefore\ x^2+y^2=11$

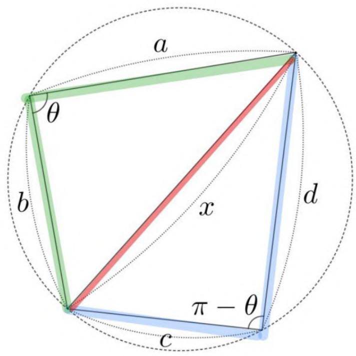
$\therefore\ (x+y)^2=x^2+y^2+2xy=11+2\cdot5=21$

$\therefore\ \overline{AB}+\overline{AD}=x+y=\sqrt{21}$

도형의 필연성

Skill Double코사인법칙 (1) 통각

✓ 원에 내접하는 사각형에서
쪼개지지 않은 각이 제시됐을 때
→ 대각의 합 = 180° 활용
→ 코사인법칙 2번 쓰기

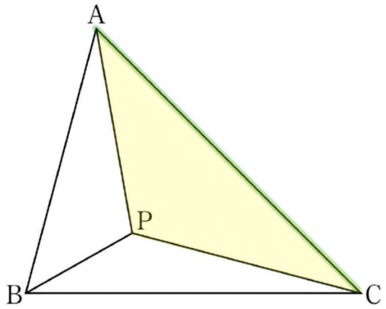


$x^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$=c^2+d^2-2cd\cos(\pi-\theta)$

[2023년 3월 (공통) 11번]

13. 그림과 같이 $\angle BAC = 60^\circ$, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내부의 점 P에 대하여 $\angle PBC = 30^\circ$, $\angle PCB = 15^\circ$ 일 때, 삼각형 APC의 넓이는? [4점]



① $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

④ $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

필연성 15

길이를 모르는 삼각형과 길이를 아는 삼각형이 섞여 있을 때 → 공통부분을 찾아라!

필연성 09

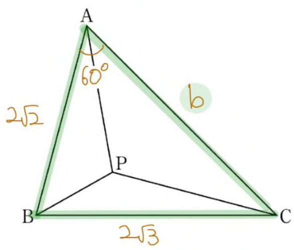
코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)

[단서] → [답]
✓ 2변 1각 → 1변
✓ 3변 → 각

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설 ③

구하는 답 ▸ △APC 넓이
→ △APC의 변의 길이 & 각을 조사해야 한다.
→ 변의 길이를 아는 삼각형 : △ABC
변의 길이를 모르는 삼각형 : △APC
공통부분 : $\overline{AC}$
→ [단서]2변1각→[답]1변 → 코사인법칙
■ 각에 대한 단서가 많다 → 사인법칙
→ $\angle ACB = \theta$ 구할 수 있다
→ $\angle PCB = 15^\circ$ 이므로 $\angle PCA$ 구할 수 있다.

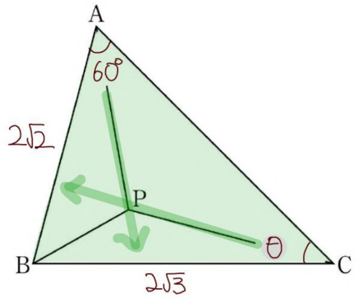
(step1) [단서]2변1각→[답]1변 → 코사인법칙
$\overline{AC} = b$ 구하기



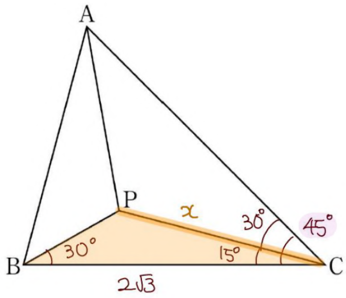
$(2\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{2})^2 + b^2 - 2\times 2\sqrt{2}\times b\times \cos 60^\circ$
⇔ $b^2 - 2\sqrt{2}b - 4 = 0$
∴ $b = \sqrt{2}+\sqrt{6}$

(step2) 각에 대한 단서가 많다 → 사인법칙
무작정 사인법칙 공식에 단순 대입하지 말자.
사인법칙의 본질은 변 길이의 비에 있다.

$2\sqrt{3} : 2\sqrt{2} = \sin 60^\circ : \sin\theta$



$\therefore \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = 45^\circ$

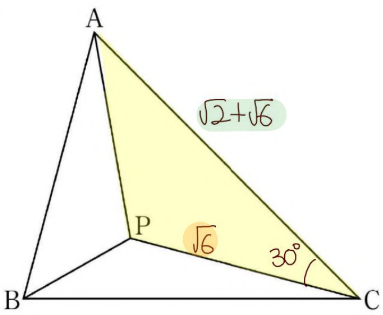


$x = 2\sqrt{3} \times \dfrac{\sin 30^\circ}{\sin 135^\circ} = \sqrt{6}$

$(\because\ 2\sqrt{3} : x = \sin 135^\circ : \sin 30^\circ)$

$\therefore$ 삼각형 APC의 넓이

$\dfrac{1}{2} \times \sqrt{6} \times (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \times \sin 30^\circ = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$



필연성 08

각이 2개 이상

사인법칙 활용법 (각이 많을 때)

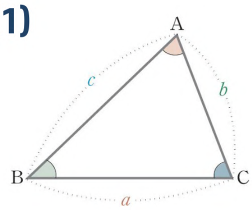
[단서] → [답]

✓ 2변 1각 → 1각
✓ 1변 2각 → 1변
✓ 외접원 등장

Skill 사인법칙 실전용 (1)

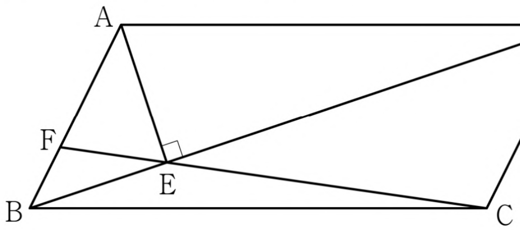
✓ 각이 많을 때

$a = b \times \dfrac{\sin A}{\sin B} = c \times \dfrac{\sin A}{\sin C}$



[2023년 7월 (공통) 13번]

14. 그림과 같이 평행사변형 ABCD가 있다. 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 하고, 직선 CE가 선분 AB와 만나는 점을 F라 하자. $\cos(\angle \mathrm{AFC}) = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{\mathrm{EC}} = 10$이고 삼각형 CDE의 외접원의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$일 때, 삼각형 AFE의 넓이는? [4점]



① $\frac{20}{3}$ ② 7 ③ $\frac{22}{3}$

④ $\frac{23}{3}$ ⑤ 8

교육청 해설

[정답] ①

$\angle \mathrm{AFC} = \alpha$, $\angle \mathrm{CDE} = \beta$라 하자.

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$이므로 $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\angle \mathrm{ECD} = \angle \mathrm{EFB} = \pi - \alpha$

삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{ED}}}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{\overline{\mathrm{EC}}}{\sin\beta} = 10\sqrt{2}$$

$$\overline{\mathrm{ED}} = 10\sqrt{2} \times \sin\alpha = 10\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = 6\sqrt{5}$$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$

$\overline{\mathrm{CD}} = x$라 하자.

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} 180 &= x^2 + 100 - 2 \times x \times 10 \times \cos(\pi - \alpha) \\ &= x^2 + 100 + 2 \times x \times 10 \times \cos\alpha \\ &= x^2 + 2\sqrt{10}x + 100 \end{aligned}$$

$x^2 + 2\sqrt{10}x - 80 = 0$이고 $x > 0$이므로

$x = -\sqrt{10} + \sqrt{10 + 80} = 2\sqrt{10}$

$\angle \mathrm{ABE} = \angle \mathrm{CDE} = \frac{\pi}{4}$이므로

삼각형 ABE는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{10}$이므로 $\overline{\mathrm{BE}} = \overline{\mathrm{AE}} = 2\sqrt{5}$

두 삼각형 BEF, DEC는 서로 닮음이고 닮음비가 $1:3$이다.

$\overline{\mathrm{AF}} = \frac{2}{3} \times \overline{\mathrm{AB}} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$

따라서 삼각형 AFE의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AF}} \times \overline{\mathrm{AE}} \times \sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{10}}{3} \times 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{20}{3}$

수 I

3. 수열

PART B

※ 4점 ※

등차수열의 추론 (함수/결합/합성)

[2023년 6월 (공통) 12번]

15. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을
$b_n=a_n+a_{n+1}$ $(n\geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를
$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$, $B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4, b_5\}$
라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

① 30　　② 34　　③ 38
④ 42　　⑤ 46

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

⑤

(step1) 규칙대로 나열하기

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=-4-d$　　$b_1=-8-d$
$a_2=-4$　　$b_2=-8+d$
$a_3=-4+d$　　$b_3=-8+3d$
$a_4=-4+2d$　　$b_4=-8+5d$
$a_5=-4+3d$　　$b_5=-8+7d$

$\therefore$ 수열 $\{b_n\}$의 공차는 $2d$

(step2) $n(A\cap B)=3$인 경우 파악하기

b_1　b_2　b_3　b_4　b_5 (d)

i) a_1 a_2 a_3 a_4 a_5
ii) a_1 a_2 a_3 a_4 a_5
iii) a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

i) $a_1=b_1$
$-4-d=-8-d$ (모순)

ii) $a_1=b_2$
$-4-d=-8+d$
$\therefore$ $d=2$

$\therefore\ a_{20} = a_2 + 18d = -4 + 36 = 32$

iii) $a_1 = b_3$

$-4 - d = -8 + 3d$

$\therefore\ d = 1$

$\therefore\ a_{20} = a_2 + 18d = -4 + 18 = 14$

$\therefore$ 모든 a_{20}의 값의 합은

$32 + 14 = 46$

Analysis

수능 수열은 나열에 본질이 있다는 걸 극명하게 보여주는 문제다.

[2023년 4월 (공통) 20번]

16. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{13}의 값을 구하시오. [4점]

> (가) S_n은 $n=7$, $n=8$에서 최솟값을 갖는다.
> (나) $|S_m| = |S_{2m}| = 162$인 자연수 m $(m>8)$이 존재한다.

교육청 해설

[정답] 30

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

조건 (가)에 의하여 $a_8 = S_8 - S_7 = 0$이므로

$a_8 = a_1 + 7d = 0$에서 $a_1 = -7d$

S_n의 값은 $n=8$에서 최소이므로 $S_9 \geq S_8$

$a_9 = a_8 + d$

$\quad = d \geq 0$

$d = 0$이면 $a_1 = 0$에서 모든 자연수 n에 대하여

$S_n = 0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $d > 0$

$n \geq 9$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이므로

$m > 8$일 때 $S_{2m} > S_m$

조건 (나)에 의하여

$-S_m = S_{2m} = 162$

$$-\frac{m\{2a_1 + (m-1)d\}}{2} = \frac{2m\{2a_1 + (2m-1)d\}}{2}$$

$14d - (m-1)d = -28d + 2(2m-1)d$

$-m + 15 = 4m - 30$에서

$m = 9$

$$S_9 = \frac{9(-14d + 8d)}{2} = -162\text{에서}$$

$d = 6$, $a_1 = -42$

따라서

$a_{13} = a_1 + 12d$

$\quad = -42 + 12 \times 6$

$\quad = 30$

시그마의 뜻과 성질

[2023년 9월 (공통) 21번]

17. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

19

$$S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

$$\sum_{k=1}^{7} S_k = \sum_{k=1}^{7}\left\{\frac{d}{2}k^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)k\right\} = 644$$

$$= \frac{d}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{8}\cdot 1\overset{5}{\cancel{5}}}{\cancel{6}\ 2}\right) + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)\frac{\cancel{7}\cdot\cancel{8}}{\cancel{2}} = \cancel{7}\cdot\cancel{2}^2\cdot 23$$

$\therefore\ a_1 + 2d = 23$

a_7이 13의 배수이므로 자연수 m에 대하여

$a_7 = a_1 + 6d = 13m$

$\therefore\ 4d = 13m - 23 = -10,\ 3,\ 16,\ 29,\ \cdots$

모든 항이 자연수이므로 공차 d도 자연수이다.

$\therefore\ 4d = 16,\ d = 4,\ a_1 = 15$

$\therefore\ a_2 = a_1 + d = 15 + 4 = 19$

Analysis

등차수열의 합

공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 n항까지의 합

① $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \times n$

② $S_n = \dfrac{n\{2a_1 + (n-1)d\}}{2}$

③ $S_n = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right)n$

Analysis

"자연수, 정수" 조건이 나오면
케이스 나열을 해서 문제를 풀 생각을 해내자.
특히 이때 약수 배수 관계를 활용해야 할 때가 많다.

[2023년 3월 (공통) 10번]

18. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

> (가) $|a_4| + |a_6| = 8$
>
> (나) $\sum_{k=1}^{9} a_k = 27$

① 21　　② 23　　③ 25
④ 27　　⑤ 29

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

②

등차수열의 합의 핵심 원리를 활용하자.

S_n = 평균 × 개수 = 중앙값 × (홀수)개수

$\sum_{k=1}^{9} a_k = 27 = a_5 \times 9$

$\therefore\ a_5 = 3$

$a_4 \xrightarrow{+d} a_5 = 3 \xrightarrow{+d} a_6$

이므로 $a_6 > 0$ (∵ d>0)

i) $a_4 \ge 0$ 이면 $a_6 \ge 0$

$|a_4| + |a_6| = a_4 + a_6 = 2a_5 = 6 \ne 8$ (모순)

ii) $a_4 < 0$

$|a_4| + |a_6| = -a_4 + a_6 = 2d = 8$

$\therefore\ d = 4$

$\therefore\ a_{10} = a_5 + 5d = 3 + 5 \times 4 = 23$

[2023년 7월 (공통) 12번]

19. 모든 항이 정수이고 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2m+1} a_k < 0$

(나) $|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|<13$

$24<a_{21}<29$일 때, m의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

교육청 해설

[정답] ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하자.

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{2m+1} a_k=\frac{(2m+1)\{2a+5\times(2m+1-1)\}}{2}$$
$$=(2m+1)(a+5m)<0$$

$2m+1>0$이므로 $a+5m=a_{m+1}<0$

(i) $a_{m+1}=-1$인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=11$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1}=-1$이므로

$a_{m+6}=24,\ a_{m+7}=29$

$24<a_{21}<29$인 a_{21}이 존재하지 않는다.

(ii) $a_{m+1}=-2$인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=12$이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1}=-2$이므로 $a_{m+7}=28$

따라서 $m+7=21$이므로 $m=14$

(iii) $a_{m+1}\leq -3$인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|\geq 13$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 $m=14$

수열의 합 (합과 일반항관계)

[2023년 6월 (공통) 9번]

20. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

①

i) $n=1$일 때

$$\frac{1}{a_1}=3$$

$$\therefore\ a_1=\frac{1}{3}$$

ii) $n\geq 2$ 일 때

$$\frac{1}{(2n-1)a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)a_k}$$

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$
$$=2n+1$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\quad(n\geq 1)$$

$$\sum_{n=1}^{10} a_n$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots\left(\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$$

[2023년 9월 (공통) 12번]

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178
④ 181 ⑤ 184

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

①

▸ 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수로 구성된다. (홀수 or 짝수)

▸ $a_2+a_4=40$가 단서로 나왔으면
→ a_3에 대해서 파악할 생각을 해야 한다!

a_2	a_2	a_3	a_4
i) 홀수	a_2	a_2+1	$\frac{1}{2}(a_2+1)$
ii) 4배수	a_2	$\frac{1}{2}a_2$	$\frac{1}{4}a_2$
iii) 4배X 2배수	a_2	$\frac{1}{2}a_2$	$\frac{1}{2}a_2+1$

i) a_2가 홀수인 경우

$$a_2+a_4=a_2+\frac{1}{2}(a_2+1)=\frac{3}{2}a_2+\frac{1}{2}=40$$

$\therefore\ a_2=\frac{79}{3}$ (자연수가 아니므로 모순)

ii) a_2가 4배수인 경우

$$a_2+a_4=a_2+\frac{1}{4}a_2=\frac{5}{4}a_2=40$$

$\therefore\ a_2=32$

$\therefore\ a_1=31$ or 64

iii) a_2가 4배수가 아닌 짝수인 경우

$$a_2+a_4=a_2+\left(\frac{1}{2}a_2+1\right)=\frac{3}{2}a_2+1=40$$

$\therefore\ a_2=26$

$\therefore\ a_1=25$ or 52

모든 a_1의 값은 합은 $25+31+52+64=172$

수Ⅱ

1. 함수의 극한

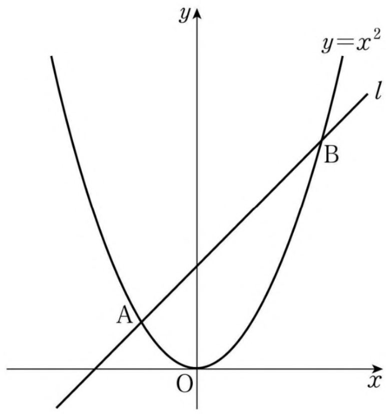
PART B

❄ 4점 ❄

[2023년 3월 (공통) 12번]

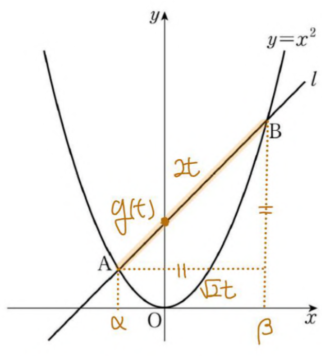
22. 곡선 $y=x^2$과 기울기가 1인 직선 l이 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 양의 실수 t에 대하여 선분 AB의 길이가 $2t$가 되도록 하는 직선 l의 y절편을 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

④



기울기는 단순 숫자가 아니라 직각삼각형의 변 길이 비율이다!

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

기울기=1이므로

$\beta-\alpha=\sqrt{2}t$

직선 l의 방정식은 $y=x+g(t)$

$x^2=x+g(t)$

⇔ $x^2-x-g(t)=0$

근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-g(t)$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

⇔ $2t^2=1+4g(t)$

⇔ $g(t)=\dfrac{2t^2-1}{4}$

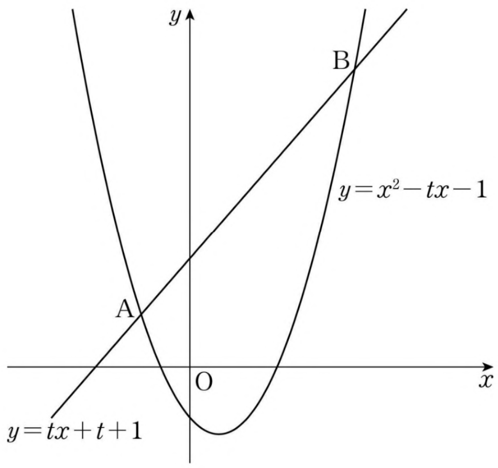
$\therefore \lim_{t\to\infty}\dfrac{g(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{2t^2-1}{4t^2}=\dfrac{1}{2}$

[2023년 10월 (공통) 10번]

23. 실수 $t\ (t>0)$에 대하여 직선 $y=tx+t+1$과 곡선 $y=x^2-tx-1$이 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{\overline{AB}}{t^2}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$

④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$



교육청 해설

[정답] ④

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, $\beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-tx-1=tx+t+1$, 즉 $x^2-2tx-2-t=0$의 두 실근이므로

$\alpha=t-\sqrt{t^2+t+2}$, $\beta=t+\sqrt{t^2+t+2}$

$\beta-\alpha=2\sqrt{t^2+t+2}$이고

직선 AB의 기울기가 t이므로

$\overline{AB}=2\sqrt{t^2+t+2}\sqrt{t^2+1}$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AB}}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{2\sqrt{(t^2+t+2)(t^2+1)}}{t^2}$$

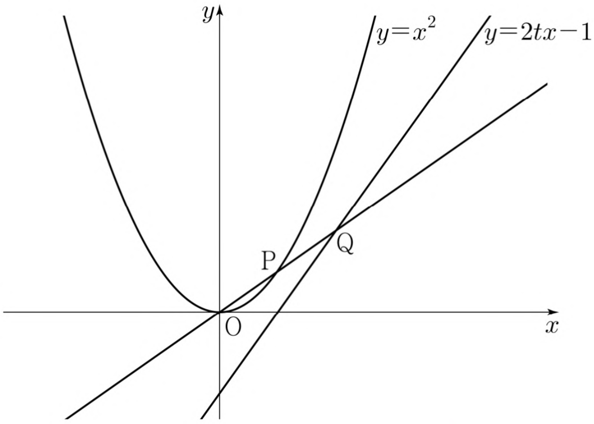
$$=2\lim_{t\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}=2$$

[2023년 6월 (공통) 11번]

24. 그림과 같이 실수 t $(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때,

$\lim_{t \to 1-} \frac{\overline{PQ}}{1-t}$의 값은? [4점]

(단, O는 원점이다.)

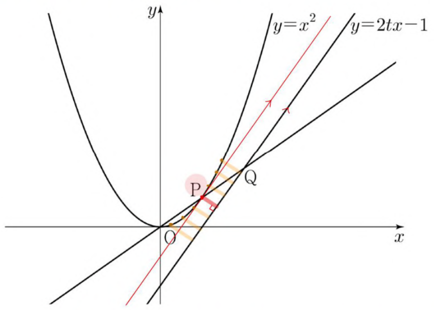


① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

③

(Step1) 점 P 구하기



$y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점이 P가 되려면

점 P에서의 접선이 $y=2tx-1$와 평행해야 한다.

$f'(x)=2x=2t$

$\Leftrightarrow$ $x=t$

$\therefore$ $\mathrm{P}(t,\ t^2)$

$\therefore$ 직선 OP의 방정식은 $y=tx$

(Step2) 점 Q 구하기

$tx=2tx-1$

$\Leftrightarrow$ $x=\frac{1}{t}$

$\therefore$ $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{t},\ 1\right)$

$$\lim_{t \to 1-} \frac{\overline{PQ}}{1-t} = \lim_{t \to 1-} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}$$

$$= \lim_{t \to 1-} \frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}$$

$$= \lim_{t \to 1-} (1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1} = 2\sqrt{2}$$

수Ⅱ
2. 미분법
PART B
※ 4점 ※

그래프

[2023년 9월 (공통) 10번]

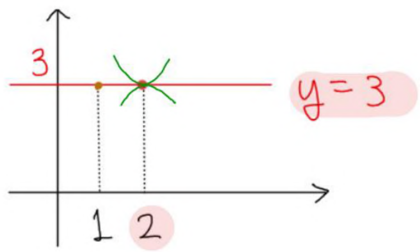
25. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이 점 $(1, 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① 31　② 33　③ 35　④ 37　⑤ 39

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

③

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이
점 $(1, 3)$을 지나므로
함수 $f(x)$의 그래프는 $x=2$에서 $y=3$에 접한다.



$f(x)-3=(x-2)^2(x-a)$

$\therefore\ f(x)=(x-2)^2(x-a)+3$

$\therefore\ f'(x)=2(x-2)(x-a)+(x-2)^2$

점 $(-2, f(-2))$에서의 접선이 점 $(1, 3)$을 지나므로

$f'(-2)=\dfrac{f(-2)-3}{-2-1}$

$\Leftrightarrow\ 2\cdot(-2)(-2-a)+(-4)^2=\dfrac{(-2-2)^2(-2-a)}{-3}$

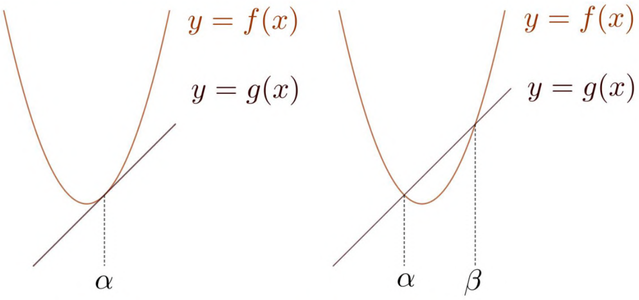
$\therefore\ a=-8$

$\therefore\ f(x)=(x-2)^2(x+8)+3$

$\therefore\ f(0)=35$

Analysis

접선으로 함수의 식을 구하기



$f(x)-g(x)$
$=(x-\alpha)^2 p(x)$

$f(x)-g(x)$
$=(x-\alpha)(x-\beta)p(x)$

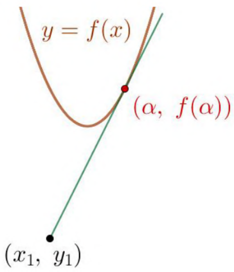
$f(x)$
$=(x-\alpha)^2 p(x)+g(x)$

$f(x)$
$=(x-\alpha)(x-\beta)p(x)+g(x)$

Analysis

외부의 점 $(x_1,\ y_1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접선을 그을 때 접점이 $(\alpha,\ f(\alpha))$라고 하면

$$f'(\alpha)=\frac{f(\alpha)-y_1}{\alpha-x_1}$$



※ 접선 $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$에 $(x_1,\ y_1)$를 대입한 식과 동일하다.

[2023년 3월 (공통) 9번]

26. 함수

$$f(x)=|x^3-3x^2+p|$$

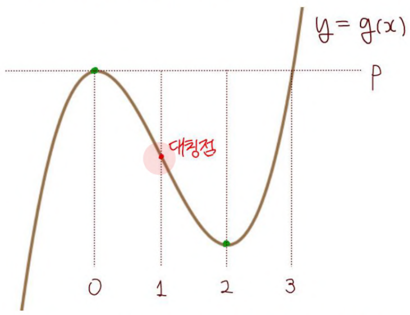
는 $x=a$와 $x=b$에서 극대이다. $f(a)=f(b)$일 때, 실수 p의 값은? [4점]
(단, a, b는 $a\neq b$인 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

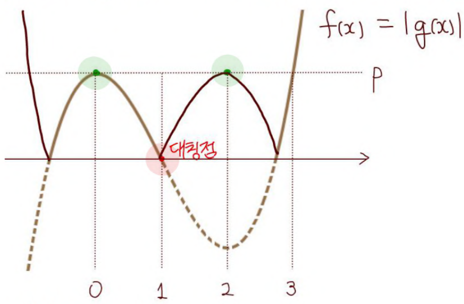
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

②

$g(x)=x^3-3x^2+p=x^2(x-3)+p$라고 하면
2:1 비례관계에 의해



$f(x)=|g(x)|$의 두 극댓값이 같으려면 $g(1)=0$



$g(1)=1-3+p=0$
$\therefore\ p=2$

[2023년 10월 (공통) 12번]

27. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=|x^3-12x+k|$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$ $(a \geq 0)$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되도록 하는 실수 a의 값이 오직 하나일 때, k의 값은? [4점]

① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

교육청 해설

[정답] ⑤

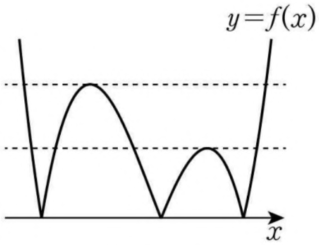
$g(x)=x^3-12x+k$라 하면 $f(x)=|g(x)|$

$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

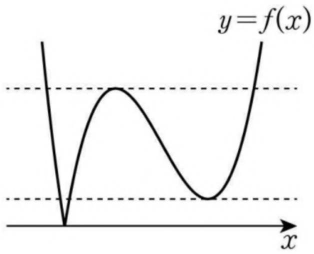
$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$가 $x=-2$에서 극댓값 $k+16$,
$x=2$에서 극솟값 $k-16$을 가지므로 k의 값에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $0<k<16$ 또는 $k>16$인 경우



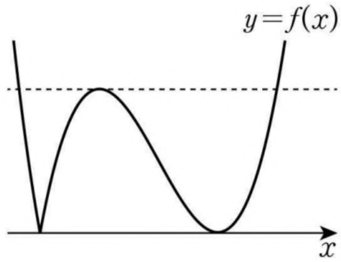
[그림 1]



[그림 2]

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a의 값이 3개 존재하므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $k=16$인 경우



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되는 실수 a의 값이 오직 하나이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=16$

수Ⅱ
3. 적분법
PART B
※ 4점 ※

그래프

[2023년 6월 (공통) 20번]

28. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

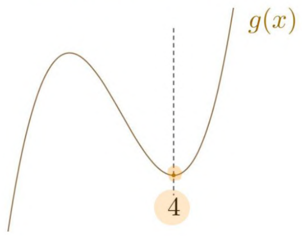
> $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x) \geq g(4)$이고 $|g(x)| \geq |g(3)|$이다.

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

39

❶ $x=0$ 대입 : $g(0)=0$
❷ 미분 : $g'(x)=f(x)$
$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로
$g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수

(step1) $g(x) \geq g(4)$ 해석하기
$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(4)$
⇔ $g(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.



■ 극소의 정의

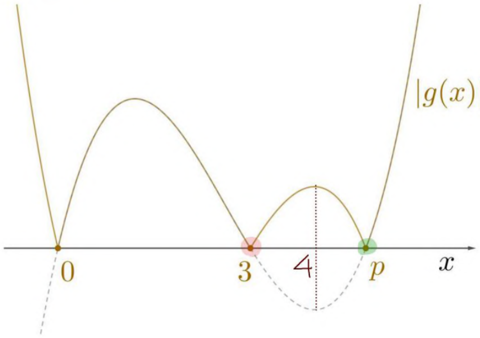
함수 $f(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(a) \leq f(x)$일 때, $f(x)$는 $x=a$에서 극소라고 한다.

(Step2) $|g(x)| \ge |g(3)|$ 해석하기

$x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)| \ge |g(3)|$

⇔ $x \ge 1$에서 $|g(x)|$의 최솟값은 $|g(3)|$

⇔ $g(3)=0$



$g(x)=\dfrac{1}{3}x(x-3)(x-p)$

$g'(x)=\dfrac{1}{3}\{(x-3)(x-p)+x(x-p)+x(x-3)\}$

$g'(4)=\dfrac{1}{3}(24-5p)=0$

$\therefore\ p=\dfrac{24}{5}$

$\therefore\ f(9)=g'(9)$

$=\dfrac{1}{3}\left\{6\left(9-\dfrac{24}{5}\right)+9\left(9-\dfrac{24}{5}\right)+9(9-3)\right\}$

$=39$

[참고] $x \ge 1$에서 $|g(x)| \ge |g(3)|$일 때 $g(3)=0$인 이유

$g(3) \ge g(4)$ 이고 $|g(4)| \ge |g(3)|$이므로

$g(4)$는 절댓값을 고려하면 대소관계가 바뀐다.

$\therefore\ g(4)<0$

$g(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로

$x \ge 1$에서 $g(x)>0$인 부분은 반드시 존재하므로

$g(x)=0$의 근도 $x \ge 1$에 존재한다.

$\therefore\ |g(x)|$의 최솟값은 0

$\therefore\ |g(3)|=0$

Analysis

$g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ 꼴이 등장하면 꼭 해야 하는 것!

❶ $x=a$ 대입 : $g(a)=\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$

❷ 미분 : $g'(x)=f(x)$

[2023년 7월 (공통) 11번]

29. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(1+x)+f(1-x)=0$이다.
(나) $\int_{-1}^{3} f'(x)dx=12$

$f(4)$의 값은? [4점]

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

교육청 해설

[정답] ①

$f(1+x)+f(1-x)=0$에 $x=0$을 대입하면 $f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ (단, a, b는 상수)

조건 (나)에서

$\int_{-1}^{3} f'(x)dx=f(3)-f(-1)=12$

…… ㉠

$f(1+x)+f(1-x)=0$에 $x=2$를 대입하면

$f(3)+f(-1)=0$

…… ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$f(3)=6$, $f(-1)=-6$

$f(3)=2(9+3a+b)=6$, $3a+b=-6$

…… ㉢

$f(-1)=-2(1-a+b)=-6$, $a-b=-2$

…… ㉣

두 식 ㉢, ㉣을 연립하면 $a=-2$,

$b=0f(x)=x(x-1)(x-2)$

따라서 $f(4)=24$

[2023년 4월 (공통) 9번]

30. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-4x+1$이고

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)dt=1$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

교육청 해설

[정답] ①

$f(x)=\int(3x^2-4x+1)dx$

$=x^3-2x^2+x+C$(C는 적분상수)

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\int_{0}^{x} f(t)dt=\left[F(t)\right]_{0}^{x}=F(x)-F(0)$에서

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{0}^{x} f(t)dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=F'(0)$

$=f(0)$

$f(0)=1$이므로 $C=1$

따라서 $f(2)=8-8+2+1=3$

[2023년 3월 (공통) 20번]

31. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$인 삼차함수 $f(x)$와 양의 실수 p에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(0)=0$ (나) $g(x)=\begin{cases} f(x-p)-f(-p) & (x<0) \\ f(x+p)-f(p) & (x \geq 0) \end{cases}$

$\int_0^p g(x)dx=20$일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

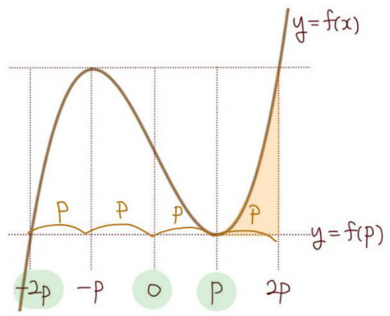
66

$g'(x)=\begin{cases} f'(x-p) & (x<0) \\ f'(x+p) & (x \geq 0) \end{cases}$

$g'(0)=0$

⇔ $f'(-p)=f'(p)=0$

삼차함수의 2:1 비례관계



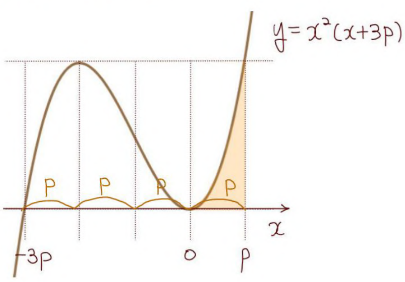
$x \geq 0$에서 $g(x)=f(x+p)-f(p)$이므로

$\int_0^p g(x)dx$

$=\int_0^p \{f(x+p)-f(p)\}dx$

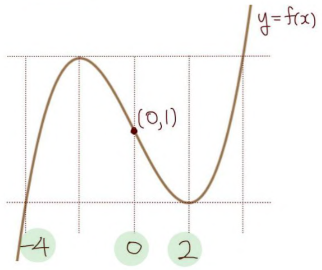
$=\int_p^{2p} \{f(x)-f(p)\}dx=20$

적분의 평행이동



$20=\int_0^p x^2(x+3p)dx=\left[\frac{x^4}{4}+px^3\right]_0^p=\frac{5}{4}p^4$

$\therefore\ p=2$



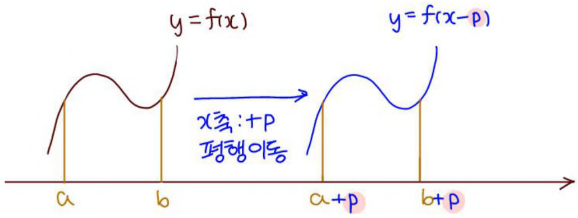
$\therefore\ f(x)=(x-2)^2(x+4)-15$ ($\because\ f(0)=1$)

$\therefore\ f(5)=66$

Analysis

적분의 평행이동

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a+p}^{b+p} f(x-p)dx$$



[2023년 3월 (공통) 14번]

32. 세 양수 a, b, k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<k) \\ -x^2+4bx-3b^2 & (x \geq k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $a=1$이면 $f'(k)=1$이다.

ㄴ. $k=3$이면 $a=-6+4\sqrt{3}$이다.

ㄷ. $f(k)=f'(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

⑤

$$f'(x)=\begin{cases} a & (x<k) \\ -2x+4b & (x \geq k) \end{cases}$$

미분가능하므로

① $f(k)$

$ak=-k^2+4bk-3b^2$

② $f'(k)$

$a=-2k+4b$

⇔ $ak=-2k^2+4bk=-k^2+4bk-3b^2$

⇔ $k^2=3b^2$

⇔ $k=\sqrt{3}b$ ($\because$ $k>0$, $b>0$)

$\therefore$ $b=\frac{1}{\sqrt{3}}k$, $a=\left(-2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)k$

ㄱ. (참)

$f'(k)=a=1$

ㄴ. (참)

$k=3$이면

$a=\left(-2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)k=-6+4\sqrt{3}$

ㄷ. (참)

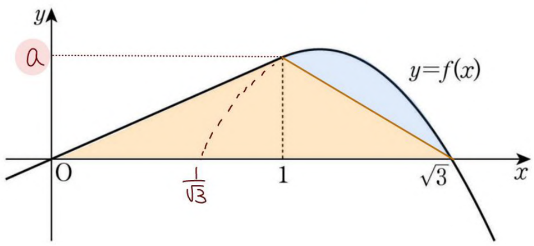
$f(k)=f'(k)$

⇔ $ak=a$

$\therefore$ $k=1$, $a=-2+\frac{4}{\sqrt{3}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$-x^2+4bx-3b^2$

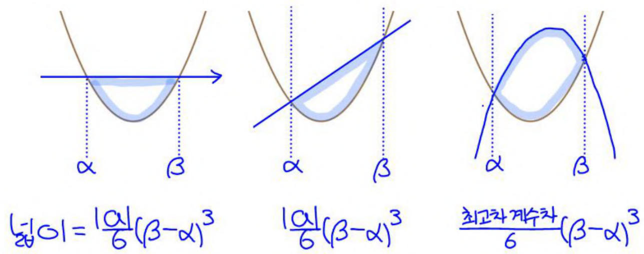
$=-(x-b)(x-3b)=-\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x-\sqrt{3})$



$\int_0^{\sqrt{3}} f(x)dx$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{6}(\sqrt{3}-1)^3=\frac{1}{3}$

Analysis



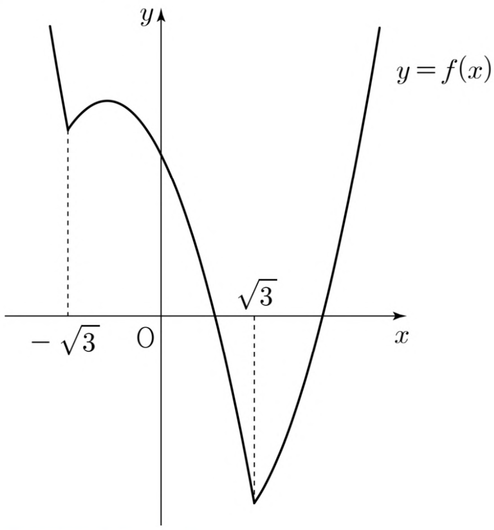
그래프

[2023년 7월 (공통) 20번]

33. 실수 t $\left(\sqrt{3}<t<\dfrac{13}{4}\right)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=|x^2-3|-2x,\ g(x)=-x+t$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 네 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하자. $x_4-x_1=5$일 때, 닫힌구간 $[x_3, x_4]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 $p-q\sqrt{3}$이다. $p\times q$의 값을 구하시오. [4점]
(단, p, q는 유리수이다.)



교육청 해설

[정답] 54

$f(x)=|x^2-3|-2x$

$$=\begin{cases} x^2-2x-3 & (x\le -\sqrt{3} \text{ 또는 } x\ge\sqrt{3}) \\ -x^2-2x+3 & (-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}) \end{cases}$$

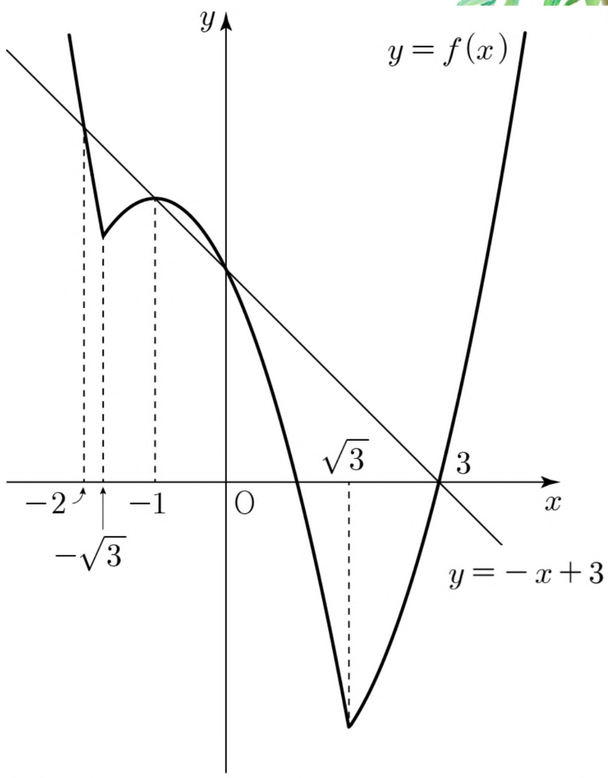
x_1, x_4는 이차방정식 $x^2-2x-3=-x+t$의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$x_1+x_4=1$, $x_1x_4=-t-3$

$x_4-x_1=5$이므로 $x_1=-2$, $x_4=3$

$x_1x_4=-t-3=-6$, $t=3$

x_2, x_3은 이차방정식 $-x^2-2x+3=-x+3$의 두 근이므로 $x_2=-1$, $x_3=0$



닫힌구간 $[0, 3]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 |f(x)-g(x)|\,dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\{(-x+3)-(-x^2-2x+3)\}dx$$

$$+\int_{\sqrt{3}}^3\{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{\sqrt{3}}^3$$

$$=\frac{27}{2}-4\sqrt{3}$$

따라서 $p\times q=\dfrac{27}{2}\times 4=54$

[2023년 6월 (공통) 10번]

34. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

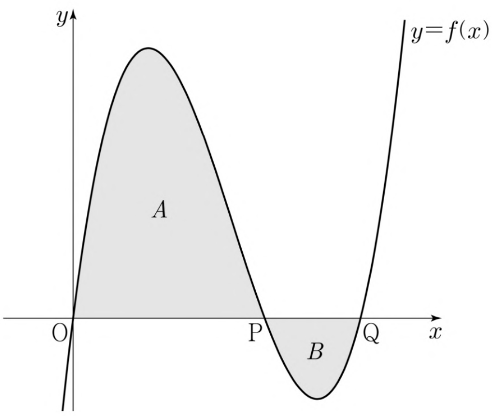
이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q $(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

②

(A의 넓이)-(B의 넓이)=3

$$=\int_0^3 f(x)dx=k\int_0^3 (x^3-5x^2+6x)dx$$

$$=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3$$

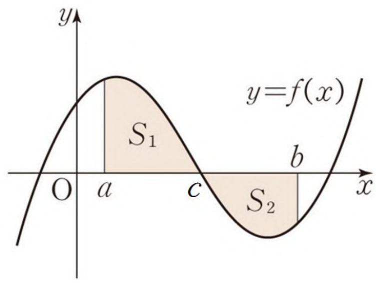
$$=\frac{9}{4}k=3$$

$$\therefore\ k=\frac{4}{3}$$

■ 정적분의 의미

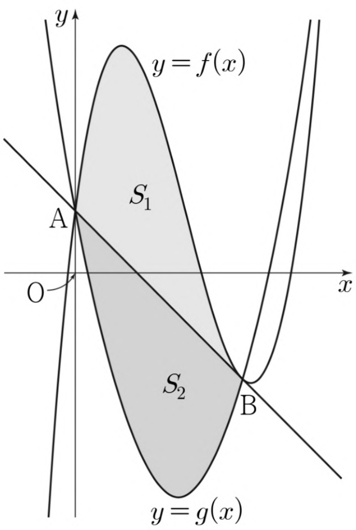
함수 $f(x)$가 양인 부분의 넓이를 S_1, $f(x)$가 음인 부분의 넓이를 S_2라고 하자.

$$\int_a^b f(x)dx=S_1-S_2$$



[2023년 4월 (공통) 12번]

35. 다음 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+8x+1$의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, 점 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서 만나고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 점 A를 지난다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=g(x)$와 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=S_2$일 때,
$\int_0^k g(x)dx$의 값은? [4점]
(단, k는 양수이다.)



① $-\frac{17}{2}$　② $-\frac{33}{4}$　③ -8
④ $-\frac{31}{4}$　⑤ $-\frac{15}{2}$

교육청 해설

[정답] ②

$f'(x)=3x^2-12x+8$이므로
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(k,\ f(k))$에서의 접선의 방정식은
$y-(k^3-6k^2+8k+1)=(3k^2-12k+8)(x-k)$
이 직선이 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나므로
$2k^3-6k^2=2k^2(k-3)$
$=0$에서
$k>0$이므로 $k=3$이고
직선 AB의 방정식은 $y=-x+1$

$$S_1=\int_0^3|f(x)-(-x+1)|dx$$
$$=\int_0^3\{f(x)+x-1\}dx$$
$$S_2=\int_0^3|g(x)-(-x+1)|dx$$
$$=\int_0^3\{-g(x)-x+1\}dx$$
$S_1=S_2$에서
$$\int_0^3\{f(x)+x-1\}dx=\int_0^3\{-g(x)-x+1\}dx$$
$$\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3\{-f(x)-2x+2\}dx$$
$$=\int_0^3(-x^3+6x^2-10x+1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-5x^2+x\right]_0^3$$
$$=-\frac{81}{4}+54-45+3$$
$$=-\frac{33}{4}$$

직선운동

[2023년 6월 (공통) 14번]

36. 실수 a $(a \geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

③

[개념] 운동 방향 = 속도 부호

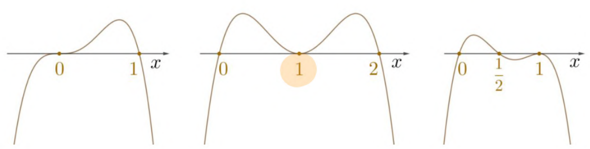
속도의 부호가 바뀔 수 있는 t>0의 값은

1, a, 2a이다. (최대 3개)

그런데 속도의 부호가 1번만 바뀌어야 하므로

1, a, 2a가 중근이 되어야 한다.

i) a=0 ii) a=1 ii) 2a=1



$\therefore$ {t=0~2 점 P의 위치의 변화량}$=\int_0^2 v(t)dt$

그래프의 개형을 보면 $a=1$일 때 최대임을 알 수 있다.

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$$
$$=\int_0^2 -t(t^2-2t+1)(t-2)dt$$
$$=\int_0^2 (-t^4+4t^3-5t^2+2t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2$$
$$=-\frac{32}{5}+16-\frac{40}{3}+4$$
$$=\frac{4}{15}$$

[다른 풀이]

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$$
$$=\int_{-1}^1 -(t+1)t^2(t-1)dt \text{ (평행이동 활용)}$$
$$=\int_{-1}^1 -(t^4-t^2)dt$$
$$=2\int_0^1 -(t^4-t^2)dt \text{ (우함수 대칭성 활용)}$$
$$=\frac{4}{15}$$

[2023년 9월 (공통) 11번]

37. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2+4t-7,\ v_2(t)=2t+4$$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 10 ② 14 ③ 19
④ 25 ⑤ 32

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

⑤

점 P의 위치를 $x_1(t)$,
점 Q의 위치를 $x_2(t)$라 하자.

$$x_1(t)=1+\int_0^t (3t^2+4t-7)\,dt=t^3+2t^2-7t+1$$

$$x_2(t)=8+\int_0^t (2t+4)\,dt=t^2+4t+8$$

두 점 P, Q 사이의 거리가 4이므로

$|x_1(t)-x_2(t)|=4$

$\Leftrightarrow\ |t^3+t^2-11t-7|=4$

i) $t^3+t^2-11t-7=4$일 때

$t^3+t^2-11t-11=0$

$\Leftrightarrow\ (t+1)(t^2-11)=0$

$\therefore\ t=\sqrt{11}\ (t>0)$

ii) $t^3+t^2-11t-7=-4$일 때

$t^3+t^2-11t-3=0$

$\Leftrightarrow\ (t-3)(t^2+4t+1)=0$

$\therefore\ t=3\ (t>0)$

두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 되는 건 $t=3$일 때 ($\because\ 3<\sqrt{11}$)

점 P가 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v_1(t)|\,dt=\int_0^3 |3t^2+4t-7|\,dt$$

$$=-\int_0^1 (3t^2+4t-7)\,dt+\int_1^3 (3t^2+4t-7)\,dt$$

$$=-\left[t^3+2t^2-7t\right]_0^1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3=32$$

수 I

1. 지수로그

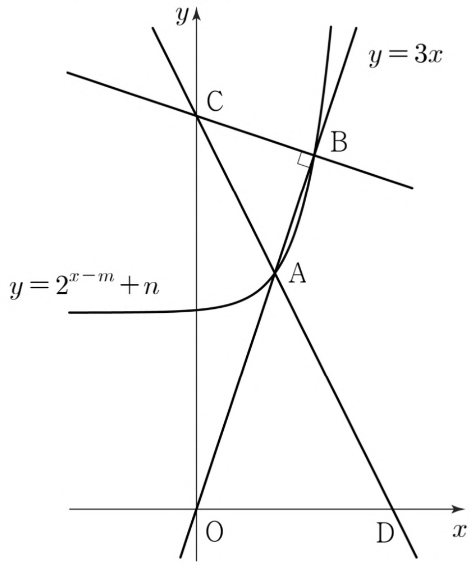
PART C

❄ 4점 ❄

지수함수 그래프

[2023년 7월 (공통) 21번]

38. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-m}+n$ $(m>0,\ n>0)$과 직선 $y=3x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 점 B를 지나며 직선 $y=3x$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 C라 하자. 직선 CA가 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 선분 CA를 $5:3$으로 외분하는 점이다. 삼각형 ABC의 넓이가 20일 때, $m+n$의 값을 구하시오. [4점]
(단, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)



[2023년 7월 (공통) 21번]

교육청 해설

[정답] 13

점 D의 좌표를 $(t, 0)$ $(t>0)$이라 하자.

점 D는 선분 CA를 $5:3$으로 외분하는

점이므로 $\overline{CA} : \overline{AD} = 2:3$

점 A의 x좌표는 $\frac{2}{5}t$, $A\left(\frac{2}{5}t, \frac{6}{5}t\right)$

점 C의 y좌표는 $2t$, $C(0, 2t)$

직선 BC의 방정식은 $y = -\frac{1}{3}x + 2t$

점 B는 두 직선 $y = 3x$, $y = -\frac{1}{3}x + 2t$의

교점이므로 $B\left(\frac{3}{5}t, \frac{9}{5}t\right)$

$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{\sqrt{10}}{5}t$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{10}}{5}t\right)^2 = \frac{t^2}{5} = 20$

$t^2 = 100$이므로 $t = 10$

$A(4, 12)$, $B(6, 18)$이므로

$12 = 2^{4-m} + n$, $18 = 2^{6-m} + n$

$18 - 2^{6-m} = 12 - 2^{4-m}$

$2^{6-m} - 2^{4-m} = 6$

$64 \times 2^{-m} - 16 \times 2^{-m} = 6$

$48 \times 2^{-m} = 6$, $2^{-m} = \frac{1}{8}$

$m = 3$, $n = 10$

따라서 $m + n = 13$

[2023년 9월 (공통) 14번]

39. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+a} + b & (x \le -8) \\ -3^{x-3} + 8 & (x > -8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

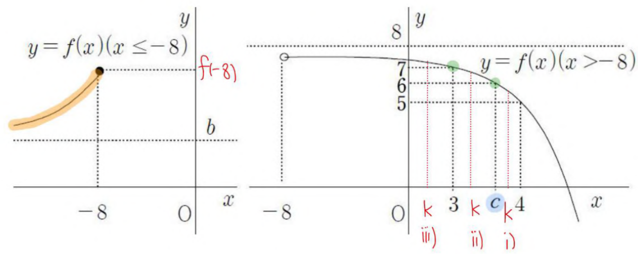
> 집합 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3 \le k < 4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

②

각 구간마다 $f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



문제 조건 $3 \le k < 4$에서

i) $c \le k < 4$인 경우

$-8 < x < k$에서 정수 $f(x) = 6$, 7로 2개

$\therefore$ $x \le -8$에서 정수 $f(x)=6$ or 7 뿐이다.

$\therefore$ $x \le -8$에서 $5 < f(x) < 8$

$\therefore$ $b \ge 5$

ii) $3 \le k < c$인 경우

$-8 < x < k$에서 정수 $f(x) = 7$로 1개

$\therefore$ $x \le -8$에서 정수 $f(x)=6$이 반드시 존재해야 한다.

$\therefore$ $b = 5$, $f(-8) \ge 6$

iii) $k < 3$인 경우

$x \le -8$에서 정수 $f(x)$는 2개 미만이어야 한다.

$\therefore$ $x \le -8$에서 $5 < f(x) < 7$

$\therefore$ $6 \le f(-8) < 7$

$\Leftrightarrow$ $6 \le 2^{a-8} + 5 < 7$

$\Leftrightarrow$ $1 \le 2^{a-8} < 2$

$\Leftrightarrow$ $0 \le a - 8 < 1$

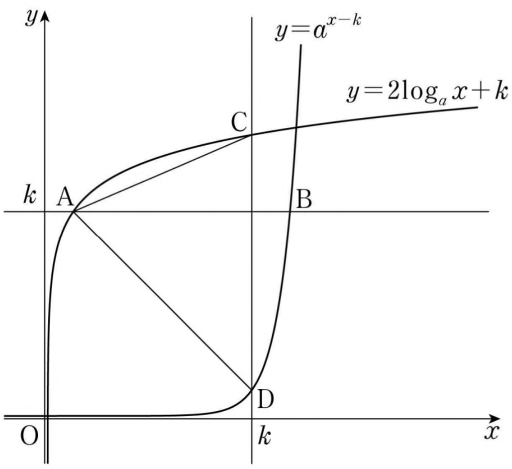
$\therefore$ $a = 8$ ($\because$ a는 자연수)

$\therefore$ $a + b = 8 + 5 = 13$

로그함수 그래프

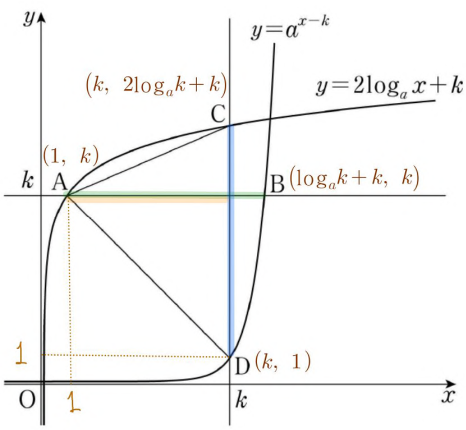
[2023년 3월 (공통) 21번]

40. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, k에 대하여 직선 $y=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=2\log_a x+k$, $y=a^{x-k}$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=85$이고 삼각형 CAD의 넓이가 35일 때, $a+k$의 값을 구하시오. [4점]



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

12



좌표평면에서 넓이
→ 길이를 구해야 한다
→ 점의 좌표를 구해야 한다.

두 점 C와 D의 x좌표는 모두 k이므로

$\mathrm{C}(k,\ 2\log_a k+k)$, $\mathrm{D}(k,\ 1)$

두 점 A와 B의 y좌표는 모두 k이므로

$\mathrm{A}(1,\ k)$, $\mathrm{B}(\log_a k+k,\ k)$

$\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=85$

$\Leftrightarrow\ (\log_a k+k-1)\times(2\log_a k+k-1)=85$

$\Leftrightarrow\ (p+q)(2p+q)=85$

$(\because\ \log_a k=p,\ k-1=q)$

CAD의 넓이가 35

$\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{2}\times(2\log_a k+k-1)\times(k-1)=35$

$\Leftrightarrow\ (2p+q)q=70$

$(p+q)(2p+q)-(2p+q)q=85-70$

$\Leftrightarrow\ (2p+q)p=15$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{(2p+q)q}{(2p+q)p}=\dfrac{q}{p}=\dfrac{70}{15}=\dfrac{14}{3}$

$\Leftrightarrow\ q=\dfrac{14}{3}p$

$\therefore\ p=\dfrac{3}{2},\ q=7,\ k=8$

$\log_a k=p\ \Leftrightarrow\ \log_a 8=\dfrac{3}{2}\ \Leftrightarrow\ a^{\frac{3}{2}}=8\ \Leftrightarrow\ a=4$

$\therefore\ a+k=4+8=12$

[2023년 6월 (공통) 21번]

41. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. [4점]
(단, $A+B+C \neq 0$)

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

〈 보 기 〉

O ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다. A=100

O ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다. B=10

X ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t) \geq t$이다. C=0

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

110

ㄱ. (참)

$f(1)=1 \Leftrightarrow t=1,\ x=1$

$\Leftrightarrow$ $t=1$일 때 $y=1-\log_2 x$ & $y=2^{x-1}$의 교점의 x좌표가 1이다.

$\Leftrightarrow$ $y=1-\log_2 x$ & $y=2^{x-1}$ 모두 (1, 1)을 지난다.

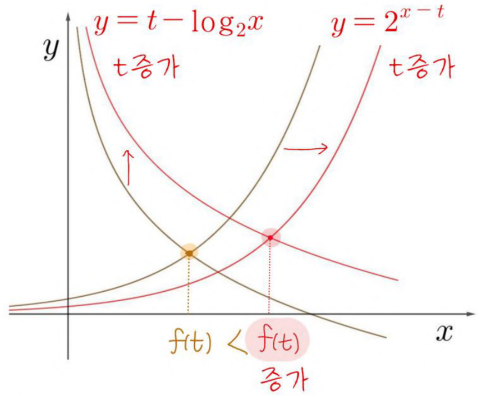
$f(2)=2 \Leftrightarrow t=2,\ x=2$

$\Leftrightarrow$ $t=2$일 때 $y=2-\log_2 x$ & $y=2^{x-2}$의 교점의 x좌표가 2이다.

$\Leftrightarrow$ $y=1-\log_2 x$ & $y=2^{x-1}$ 모두 (2, 1)을 지난다.

ㄴ. (참)

그래프 관찰하기



t증가

t값을 증가시키면

$y=t-\log_2 x$의 그래프는 위쪽으로 평행이동되고

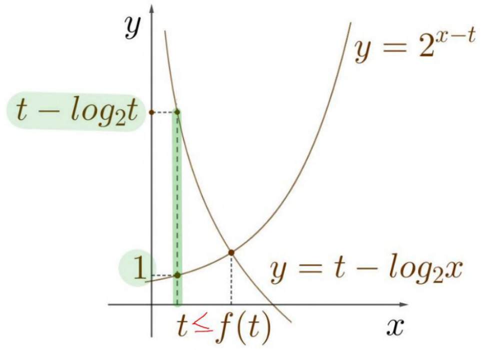
$y=2^{x-t}$의 그래프는 오른쪽으로 평행이동되므로

교점이 오른쪽에 생길 수 밖에 없다.

ㄷ. (거짓)

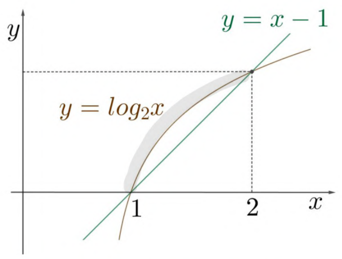
$f(t) \geq t$

$\Leftrightarrow$ $y=t-\log_2 x$ & $y=2^{x-t}$의 교점의 x좌표가 t 이상이다.



$t-\log_2 t \geq 1$

$\Leftrightarrow$ $t-1 \geq \log_2 t$



$1<t<2$일 때, $t-1<\log_2 t$ (모순)

수 I

2. 삼각함수

PART C

❄ 4점 ❄

삼각함수의 활용 (도형)

[2023년 4월 (공통) 21번]

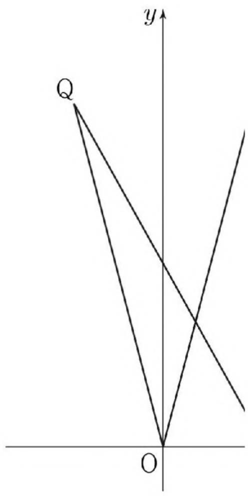
42. 좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(2, 0)과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

b>a

(가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.

(나) $\cos(\angle\underbrace{\mathrm{OPA}}_{\theta})=\cos(\angle\underbrace{\mathrm{OQA}}_{\theta})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. [4점]
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

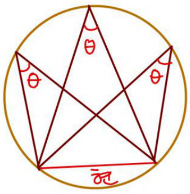
22

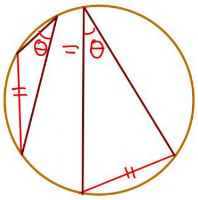
Skill **Double코사인법칙 (2) 분각**

✓ 원에 내접하는 사각형에서
대각선에 의해 쪼개진 각이 제시됐을 때
→ 원주각이 같은 것 활용
→ 코사인법칙 2번 쓰기

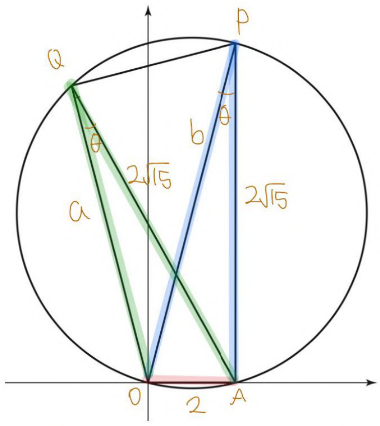
구하는 것 ▸ □OAPQ 넓이

■ [중학도형] 원주각 동일 ⇔ 현의 길이 동일





→ $\cos(\angle OPA) = \cos(\angle OQA)$
→ □OAPQ에 대한 외접원이 존재한다.



■ 외접원과 사각형 → 분각 → Double코사인법칙

(step1) Double코사인법칙 (2) 분각

$\overline{OA}^2 = 2^2$

$= a^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2 \cdot a \cdot 2\sqrt{15} \cdot \cos\theta$

$= b^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2 \cdot b \cdot 2\sqrt{15} \cdot \cos\theta$

$x = a,\ b$일 때

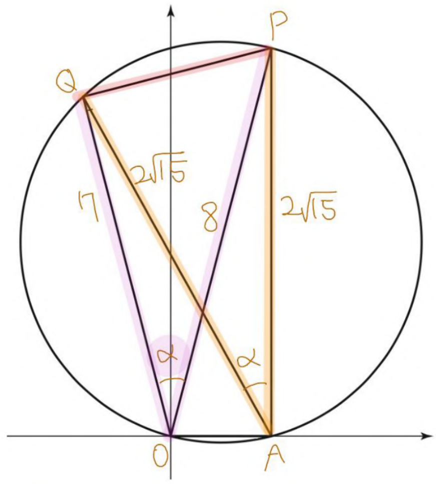
$2^2 = x^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2 \cdot x \cdot 2\sqrt{15} \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\Leftrightarrow\ x^2 - 15x + 56 = 0$

$\therefore\ x = 7$ or 8

$\therefore\ a = 7,\ b = 8\ (\because\ b > a)$

(step2) Double코사인법칙 (2) 분각



$\overline{PQ}^2$

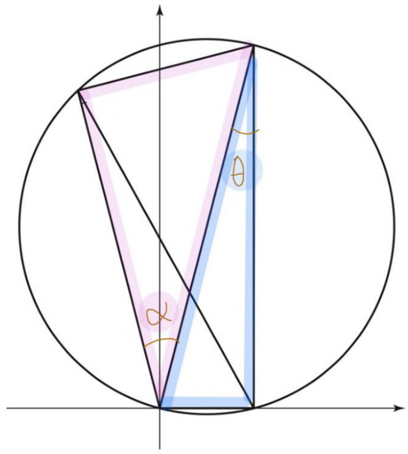
$= (2\sqrt{15})^2 + (2\sqrt{15})^2 - 2 \cdot (2\sqrt{15})^2 \cdot \cos\alpha$

$= 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos\alpha$

$\therefore\ \cos\alpha = \dfrac{7}{8},\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$

(step3) □OAPQ 넓이

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ 이므로 $\sin\theta = \dfrac{1}{4}$



□OAPQ넓이

={△OPQ넓이}+{△OPA넓이}

$= \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{8} + \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{15} \cdot \dfrac{1}{4}$

$= \dfrac{11}{2}\sqrt{15}$

$\therefore\ p \times q = 22$

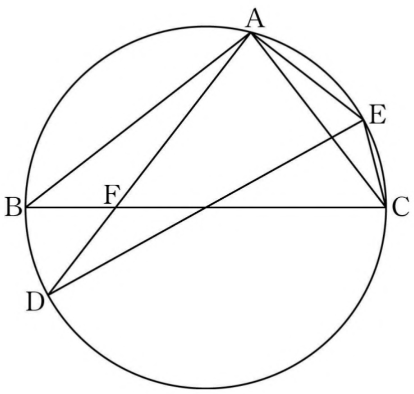
[2023년 10월 (공통) 21번]

43. 그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}=4,\ \overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{CE}},$$

$\sin(\angle \mathrm{CAE})=\dfrac{1}{4}$

이다. $\overline{\mathrm{AF}}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]



교육청 해설

[정답] 6

$\angle \mathrm{CAE}=\theta$라 하면 $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=4$이므로

삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin\theta}=\overline{\mathrm{BC}},\ \overline{\mathrm{CE}}=1$

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{CE}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{FC}}=3$

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}$에서 선분 DE도 주어진 원의 지름이므로

$\angle \mathrm{BAC}=\angle \mathrm{DAE}=90^\circ$이다.

$\angle \mathrm{BAD}=90^\circ-\angle \mathrm{DAC}=\theta$

삼각형 ABF에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{k}{\sin(\angle \mathrm{ABF})}=\dfrac{1}{\sin\theta}=4$이므로 $\sin(\angle \mathrm{ABF})=\dfrac{k}{4}$

직각삼각형 ABC에서 $\sin(\angle \mathrm{ABC})=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{4}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=4\sin(\angle \mathrm{ABC})=4\times\dfrac{k}{4}=k$

직각삼각형 ABC에서 $\cos(\angle \mathrm{BCA})=\dfrac{k}{4}$이므로

삼각형 AFC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AF}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{FC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{FC}}\times\cos(\angle \mathrm{FCA})$

$k^2=k^2+3^2-2\times k\times 3\times\dfrac{k}{4},\ \dfrac{3}{2}k^2=9$

따라서 $k^2=6$

수Ⅰ

3. 수열

PART C

❄ 4점 ❄

수학적귀납법

[2023년 6월 (공통) 15번]

44. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

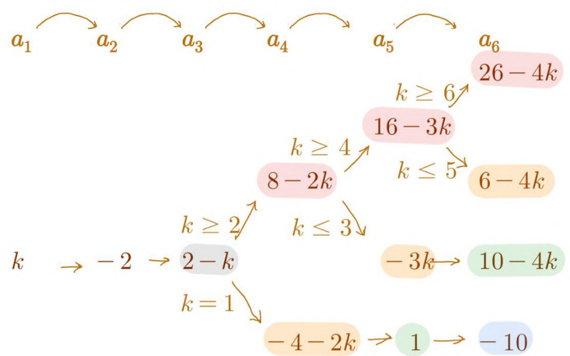
① 10　　② 14　　③ 18
④ 22　　⑤ 26

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

②

(Step1) 규칙대로 나열하기

$\pm 2 - k,\ \pm 4 - k,\ \pm 6 - k,\ \pm 8 - k,\ \pm 10 - k$



(Step2) k값에 따라 부호 판단하기

k	a_3	a_4	a_5	a_6	$a_3 a_4 a_5 a_6$
$k=1$	⊕	⊖	⊕	⊖	⊕
$k=2$	0				0
$k=3$	⊖	⊕	⊖	⊖	⊖
$k=4$	⊖	0			0
$k=5$	⊖	⊖	⊕	⊖	⊖
$k=6$	⊖	⊖	⊖	⊕	⊖
$k \ge 7$	⊖	⊖	⊖	⊖	⊕

∴ 모든 k값의 합은
$3+5+6=14$

Analysis

아직도 내신이나 다른 책에서는 정해진 풀이법을 외워서 점화식을 일반항으로 고쳐야 하는 문제가 더러 있지만, **이것은 이전 교육과정에 있다가 삭제된 내용이다!**

수능에서는 점화식 개념의 본질인 '나열'을 요구한다. $a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_4 \to$ 를 나열하여 원하는 항 구하기!

[2023년 7월 (공통) 15번]

45. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 < 300$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n & (\log_3 a_n\text{이 자연수인 경우}) \\ a_n + 6 & (\log_3 a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}) \end{cases}$$
> 이다.

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 315 ② 321 ③ 327
④ 333 ⑤ 339

교육청 해설

[정답] ④

(i) $4 \le n \le 7$인 모든 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수가 아닌 경우

$a_5 = a_4 + 6$, $a_6 = a_5 + 6 = a_4 + 12$,

$a_7 = a_6 + 6 = a_4 + 18$이므로

$\sum_{k=4}^{7} a_k = 4a_4 + 36 = 40$, $a_4 = 1$

순서쌍 (a_1, a_2, a_3)은 $(27, 9, 3)$

그러므로 $a_1 = 27$

(ii) $4 \le n \le 7$인 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수인 n이 존재하는 경우

$a_n = 3^m$ (m은 자연수)인 n $(4 \le n \le 7)$이 존재한다.

a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m $(m \ge 4)$가 존재하면

$\sum_{k=4}^{7} a_k > 40$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m $(m \ge 4)$가 존재하지 않는다.

또한 a_4, a_5, a_6, a_7 중 27이 존재하지 않으면

$n = 4$, 5, 6, 7에 대하여 $\sum_{k=4}^{7} a_k < 40$

그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이다.

만약 a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이면

$\sum_{k=4}^{7} a_k > 40$이므로 $a_4 = 27$

$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 27 + 9 + 3 + 1 = 40$

그러므로 $a_4 = 27$일 때 조건을 만족시킨다.

$a_1 < 300$을 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)은 $(69, 75, 81)$, $(237, 243, 81)$이므로

$a_1 = 69$ 또는 $a_1 = 237$

따라서 (i), (ii)에 의하여

모든 a_1의 값의 합은 $27 + 69 + 237 = 333$

[2023년 10월 (공통) 15번]

46. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n + 2n & (a_n\text{이 4의 배수인 경우} \\ a_n + 2n & (a_n\text{이 4의 배수가 아닌} \end{cases}$$
>
> 이다.
>
> (나) $a_3 > a_5$

$50 < a_4 + a_5 < 60$이 되도록 하는 a_1의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 224　② 228　③ 232
④ 236　⑤ 240

교육청 해설

[정답] ②

조건 (나)에서 $a_3 > a_5$이므로 a_3이 4의 배수인 경우와 4의 배수가 아닌 경우로 나누어 생각하자.

(ⅰ) a_3이 4의 배수인 경우

$a_3 = 4k$ (k는 자연수)라 하면 $a_4 = 2k+6$

k가 홀수일 때 a_4는 4의 배수이고

$a_5 = k+11$, $a_4 + a_5 = 3k+17$이므로

$50 < 3k+17 < 60$, $a_3 > a_5$에서 $k > \frac{11}{3}$

k는 홀수이므로 $k=13$이고 $a_3 = 52$

k가 짝수일 때 a_4는 4의 배수가 아니고

$a_5 = 2k+14$, $a_4 + a_5 = 4k+20$이므로

$50 < 4k+20 < 60$, $a_3 > a_5$에서 $k > 7$

k는 짝수이므로 $k=8$이고 $a_3 = 32$

따라서 $a_3 = 52$ 또는 $a_3 = 32$

$a_3 = 52$인 경우 $a_2 = 96$이고

$a_1 = 94$ 또는 $a_1 = 188$

$a_3 = 32$인 경우 $a_2 = 56$이고

$a_1 = 54$ 또는 $a_1 = 108$

(ⅱ) a_3이 4의 배수가 아닌 경우

$a_3 = 4k-1$ 또는 $a_3 = 4k-3$ (k는 자연수)일 때

a_3, a_4, a_5는 모두 홀수이고

$a_5 = a_4 + 8 = a_3 + 14 > a_3$이므로

조건 (나)를 만족시키지 못한다.

$a_3 = 4k-2$ (k는 자연수)일 때 $a_4 = 4k+4$,

$a_5 = 2k+10$이고 $a_4 + a_5 = 6k+14$이므로

$50 < 6k+14 < 60a_3 > a_5$에서 $k > 6$, 이때

$k=7$이므로 $a_3 = 26$

따라서 $a_2 = 22$ 또는 $a_2 = 44$이다.

$a_2 = 22$인 경우 $a_1 = 40$

$a_2 = 44$인 경우 $a_1 = 42$ 또는 $a_1 = 84$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $M = 188$, $m = 40$이고 $M+m = 228$

[2023년 4월 (공통) 15번]

47. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\log_2 \dfrac{M}{m}$의 값은? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{n-2} & (a_n < 1) \\ \log_2 a_n & (a_n \ge 1) \end{cases}$$ 이다.
>
> (나) $a_5 + a_6 = 1$

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

교육청 해설

[정답] ④

조건 (가)에서 자연수 n에 대하여

$a_n < 1$이면 $a_{n+1} = 2^{n-2} > 0$이고

$a_n \ge 1$이면 $a_{n+1} = \log_2 a_n \ge 0$이므로

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \ge 0$이다.

조건 (가), (나)에서

a_5, a_6의 값을 구하면

(i) $0 \le a_5 < 1$일 때

$a_6 = 2^{5-2}$에서 $a_5 + a_6 \ge 8$이므로

$a_5 + a_6 = 1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_5 \ge 1$일 때

$a_6 = \log_2 a_5 \ge 0$에서 $a_5 + a_6 \ge 1$

$a_5 + a_6 = 1$을 만족시키려면

$a_5 = 1$, $a_6 = 0$ 그러므로

$a_5 = 1$, $a_6 = 0$

a_4의 값을 구하면

(i) $0 \le a_4 < 1$일 때 $a_5 = 2^{4-2} = 4$이므로

$a_5 = 1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4 \ge 1$일 때 $a_5 = \log_2 a_4 = 1$이므로

$a_4 = 2$ 그러므로 $a_4 = 2$

a_1, a_2, a_3의 값을 구하면

(i) $0 \le a_3 < 1$일 때

$a_4 = 2^{3-2} = 2$이므로 $0 \le a_3 < 1$

(a) $0 \le a_2 < 1$일 때 $a_3 = 2^{2-2} = 1$이므로

$0 \le a_3 < 1$을 만족시키지 않는다.

(b) $a_2 \ge 1$일 때 $a_3 = \log_2 a_2$에서

$1 \le a_2 < 2a_1 < 1$이면

$a_2 = 2^{1-2} = \dfrac{1}{2}$이므로 $1 \le a_2 < 2$를

만족시키지 않는다.

$a_1 \ge 1$이면 $a_2 = \log_2 a_1$에서

$2 \le a_1 < 4$

(ii) $a_3 \ge 1$일 때

$a_4 = \log_2 a_3$에서 $a_3 = 2^2 = 4$

(a) $0 \le a_2 < 1$일 때

$a_3 = 2^{2-2} = 1$이므로 $a_3 = 4$를

만족시키지 않는다.

(b) $a_2 \ge 1$일 때

$a_3 = \log_2 a_2$에서 $a_2 = 2^4 = 16$

$a_1 < 1$이면 $a_2 = 2^{1-2} = \dfrac{1}{2}$이므로

$a_2 = 16$을 만족시키지 않는다.

$a_1 \ge 1$이면 $a_2 = \log_2 a_1$에서

$a_1 = 2^{16}$

따라서

a_1의 값은 $2 \le a_1 < 4$ 또는 $a_1 = 2^{16}$이므로

$M = 2^{16}$, $m = 2$이고 $\log_2 \dfrac{M}{m} = \log_2 2^{15} = 15$

[2023년 3월 (공통) 15번]

48. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}+a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n) & (a_{n+1}+a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_1=1$일 때, $a_6=34$가 되도록 하는 모든 a_2의 값의 합은? [4점]

① 60 ② 64 ③ 68
④ 72 ⑤ 76

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

③

$a_{n+1}+a_n$이 짝수, 홀수에 대한 언급이 있으므로
두 수의 합의 홀짝성에 대해 점검하자.

짝+짝=짝
짝+홀=홀
홀+짝=홀
홀+홀=짝

a_{n+2}가 짝수이려면
<a_n=짝, a_{n+1}=짝> or <a_n=홀, a_{n+1}=홀>
만 가능!

why?
<a_n=짝, a_{n+1}=홀> or <a_n=홀, a_{n+1}=짝>
이면
$a_n+a_{n+1}=a_{n+2}$
짝 + 홀 = 홀

제시된 a_n의 숫자값도 아무 생각없이 보지 말고 홀짝을 고려할 생각을 해야 한다.

$a_1=1$=홀수
$a_6=34$=짝수
→ ㄱ) a_4=짝 a_5=짝 ㄴ) a_4=홀 a_5=홀

ㄱ) a_4=짝 a_5=짝
a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6
짝←짝←짝←짝 짝 34
$a_1=1$이므로 모순

ㄴ) a_4=홀 a_5=홀
a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6

불가능
i) 1 짝 짝=2k
ii) 1 홀 홀 홀 34
iii) 1 짝 홀=2k−1
iv) 1 홀

ii)

홀		짝	홀	홀	34
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	$4k-1$	$2k$	$6k-1$	$8k-1$	$7k-1$

$\therefore a_6=34=7k-1 \Leftrightarrow k=5$

$\therefore a_2=4k-1=19$

iii)

짝		홀	홀	홀	34
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	$2k-2$	$2k-1$	$4k-3$	$3k-2$	$\frac{7k-5}{2}$

$\therefore a_6=34=\frac{7k-5}{2} \Leftrightarrow k=\frac{73}{7}$ ←자연수가 아님

iv)

홀		홀	홀	홀	34
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	$4k-3$	$2k-1$	$3k-2$	$\frac{5k-3}{2}$	$\frac{11k-7}{4}$

$\therefore a_6=34=\frac{11k-7}{4} \Leftrightarrow k=13$

$\therefore a_2=4k-3=49$

$\therefore$ 모든 a_2의 값의 합은
$49+19=68$

수Ⅱ

1. 함수의 극한

PART C

❄ 4점 ❄

함수의 극한 (극한 식 해석)

[2023년 9월 (공통) 15번]

49. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ 3 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이라 하자. $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18
④ 20 ⑤ 22

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

④

$\lim\limits_{x\to 3} g(x)\neq g(3)$이므로

$g(x)$는 $x=3$에서 불연속

$g(x)$는 $f(x)=0$일 때 불연속 가능성 존재

$\therefore f(3)=0$

$\lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)-1=3-1=2$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2$

$x\to 3$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$

$\therefore f(6)=0$ or $f(3)=-1$ ($\because f(3)=0$)

$\therefore f(x)=(x-3)(x-6)(x+a)$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=2$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)(x+a+3)\{f(x)+1\}}{(x-3)(x-6)(x+a)}$

$=\dfrac{3(a+6)\{f(3)+1\}}{-3(a+3)}$

$=-\dfrac{a+6}{a+3}$ ($\because f(3)=0$)

$=2$

$\therefore a=-4$

$\therefore f(x)=(x-3)(x-6)(x-4)$

$\therefore g(5)=\dfrac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}=20$

연속함수의 성질

[2023년 7월 (공통) 14번]

50. 최고차항의 계수가 1이고 $f(-3)=f(0)$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3 \text{ 또는 } x \geq 0) \\ -f(x) & (-3 \leq x < 0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. 함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $f(-6)\times f(3)=0$
ㄷ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k가 음수일 때 집합 $\{x \mid f(x)=0,\ x$는 실수$\}$의 모든 원소의 합이 -1이면 $g(-1)=-48$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

교육청 해설

[정답] ⑤

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)g(x-3)=-f(0)\times f(-3)$

$\lim\limits_{x\to 0+} g(x)g(x-3)=f(0)\times\{-f(-3)\}$

$g(0)g(-3)=f(0)\times\{-f(-3)\}$

함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개이므로 $k=-3$ 또는 $k=3$

(i) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=-3$에서 연속이고, $x=3$에서 불연속인 경우

$\lim\limits_{x\to -3-} g(x)g(x-3)=f(-3)\times f(-6)$

$\lim\limits_{x\to -3+} g(x)g(x-3)=-f(-3)\times f(-6)$

$g(-3)g(-6)=-f(-3)\times f(-6)$이므로

$f(-3)\times f(-6)=0$ …… ㉠

$\lim\limits_{x\to 3-} g(x)g(x-3)=f(3)\times\{-f(0)\}$

$\lim\limits_{x\to 3+} g(x)g(x-3)=f(3)\times f(0)$

$g(3)g(0)=f(3)\times f(0)$이므로

$f(3)\times f(0)\neq 0$ …… ㉡

$f(-3)=f(0)$이므로

㉠, ㉡에 의하여 $f(-6)=0$

(ii) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=3$에서 연속이고, $x=-3$에서 불연속인 경우

(i)과 같은 방법에 의하여 $f(3)=0$

(i), (ii)에 의하여 $f(-6)=0$ 또는 $f(3)=0$이므로

$f(-6)\times f(3)=0$ (참)

ㄷ. $k=-3$이므로 $f(3)=0$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+b)$라 하자. (단, a, b는 상수)

$f(-3)=f(0)$이므로

$-6(9-3a+b)=-3b$, $b=6a-18$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+6a-18)$

(i) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 세 실근의 합은

$3+(-a)=-1$, $a=4$

방정식 $x^2+4x+6=0$은 실근을 갖지 않으므로 모순

(ii) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 중근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 합은

$3+\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-1$, $a=8$

방정식 $x^2+8x+30=0$은 중근을 갖지 않으므로 모순

(iii) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3과 -4를 실근으로 갖는 경우

$3+(-4)=-a$, $3\times(-4)=6a-18$에서

$a=1$

$f(x)=(x-3)(x^2+x-12)=(x-3)^2(x+4)$

그러므로 $g(-1)=-f(-1)=-48$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

수Ⅱ
2. 미분법
PART C
❄ 4점 ❄

그래프

[2023년 10월 (공통) 22번]

51. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} x^3-8x^2+16x & (0<x\le 4) \\ f(x) & (x>4) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때,

$g(10)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

> (가) $g\left(\frac{21}{2}\right)=0$
>
> (나) 점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은, 기울기가 0이 아닌 접선이 오직 하나 존재한다.

교육청 해설

[정답] 29

$0<x\le 4$에서 $g(x)=x(x-4)^2$이고

함수 $g(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 4+} g(x)=\lim_{x\to 4-} g(x)$,

$\lim_{x\to 4+} f(x)=\lim_{x\to 4-} x(x-4)^2$

$f(4)=0$

함수 $g(x)$가 $x=4$에서 미분가능하므로

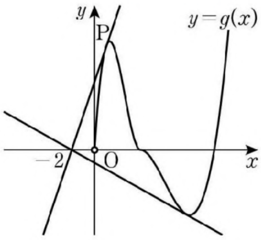
$$\lim_{x\to 4+}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4-}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 4+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4-}\frac{x(x-4)^2}{x-4}$$

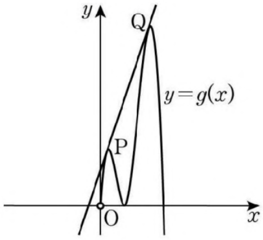
$f'(4)=0$

$f(4)=f'(4)=0$이고 $g\left(\frac{21}{2}\right)=f\left(\frac{21}{2}\right)=0$이므로

$f(x)=a(x-4)^2(2x-21)$ $(a\ne 0)$이라 하자.



[그림 1]



[그림 2]

$a > 0$이면 함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형이 [그림 1]과 같으므로 조건 (나)를 만족시키지 못한다. $a < 0$이면 [그림 2]와 같이 조건 (나)를 만족시키는 함수 $y = g(x)$의 그래프의 개형이 존재한다.

조건 (나)에 의하여 점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y = g(x)$에 그은 기울기가 0이 아닌 접선은 곡선 $y = g(x)$

위의 두 점 P, Q에서 곡선 $y = g(x)$에 접한다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 t, s라 하고 $0 < t < 4$, $s > 4$라 하자.

$0 < t < 4$에서 $g'(t) = 3t^2 - 16t + 16$이므로

접선의 방정식은

$y = (3t^2 - 16t + 16)(x - t) + t^3 - 8t^2 + 16t$

이다. 접선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$(3t^2 - 16t + 16)(-2 - t) + t^3 - 8t^2 + 16t = 0$

$2t^3 - 2t^2 - 32t + 32 = 0$, $(t - 4)(t + 4)(t - 1) = 0$

$0 < t < 4$에서 $t = 1$이므로 접선의 방정식은

$y = 3x + 6$이다. 이 접선이 점 Q에서

곡선 $y = f(x)$ $(x > 4)$에 접한다.

$f(x) = a(x - 4)^2(2x - 21)$에서

$f'(x) = 2a(3x^2 - 37x + 100) = 2a(x - 4)(3x - 25)$

점 Q에서의 접선의 방정식은

$y = 2a(s - 4)(3s - 25)(x - s) + a(s - 4)^2(2s - 21)$

이 접선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0 = 2a(s - 4)(3s - 25)(-2 - s) + a(s - 4)^2(2s - 21)$

$a \neq 0$, $s > 4$이므로

$(s - 4)(2s - 21) = 2(s + 2)(3s - 25)$

$4s^2 - 9s - 184 = 0$, $(4s + 23)(s - 8) = 0$, $s = 8$

$f'(8) = 3$이므로 $a = -\dfrac{3}{8}$

$f(x) = -\dfrac{3}{8}(x - 4)^2(2x - 21)$이므로

$g(10) = f(10) = \dfrac{27}{2}$

따라서 $p = 2$, $q = 27$이므로 $p + q = 29$

[2023년 6월 (공통) 22번]

52. 정수 a $(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

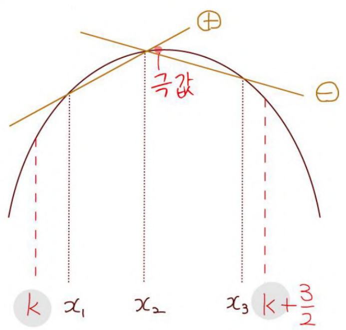
380

(step1) $\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$

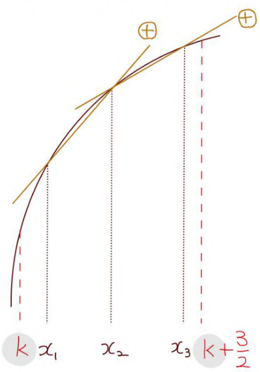
→ 두 평균 변화율의 부호 ⊕⊖가 다르다!

→ 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에서 증가, 감소 변화가 있다.

→ 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 극값이 존재한다.



[참고] 증가, 감소 변화가 없는 구간에서는



$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ ⊕

$\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$ ⊕

(step2) $f(x)$의 극값 구하기

$f(x)=x^3-2ax^2$

$f'(x)=3x^2-4ax=3x\left(x-\frac{4a}{3}\right)$

$f(x)$는 $x=0$, $x=\frac{4a}{3}$에서 극값을 갖는다.

$x=0$을 포함하는 구간 $(-1,\ 0.5)$ → $k=-1$

모든 정수 k의 값의 곱이 -12이므로

$x=\frac{4a}{3}$를 포함하는 구간은

i) $(3,\ 4.5)$ & $(4,\ 5.5)$ → $k=3,\ 4$

ii) $(-4,\ -2.5)$ & $(-3,\ -1.5)$ → $k=-4,\ -3$

i) $(3,\ 4.5)$ & $(4,\ 5.5)$ → $k=3,\ 4$인 경우

$x=\frac{4a}{3}$이 $(3,\ 4.5)$ & $(4,\ 5.5)$에 모두 포함되므로

$4<\frac{4a}{3}<4.5$

⇔ $3<a<\frac{27}{8}=3.\square\square$

∴ 정수 a가 존재하지 않는다 (모순)

ii) $(-4,\ -2.5)$ & $(-3,\ -1.5)$ → $k=-4,\ -3$

$-3<\frac{4a}{3}<-2.5$

⇔ $-\frac{9}{4}<a<-\frac{15}{8}$

∴ 정수 $a=-2$

∴ $f'(x)=3x^2+8x$

∴ $f'(10)=380$

[2023년 9월 (공통) 13번]

53. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0) \\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고 구간 $[-1, \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}+3\sqrt{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

③

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소

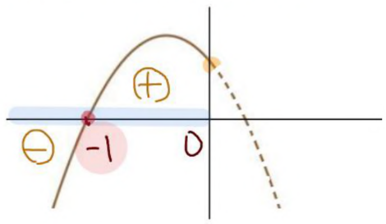
⇔ $f'(x)\leq 0$

함수 $f(x)$가 구간 $[-1, \infty)$에서 증가

⇔ $f'(x)\geq 0$

$$f'(x)=\begin{cases} -x^2-2ax-b & (x\leq 0) \\ x^2+2ax-b & (x>0) \end{cases}$$

(step1) $x\leq 0$에서의 $f'(x)$



$x\leq 0$에서 $f'(x)=-x^2-2ax-b$는

$x<-1$에서 ⊖

$-1<x\leq 0$에서 ⊕

∴ $f'(-1)=0$

⇔ $-1+2a-b=0$

∴ $b=2a-1$

구하는 답 $a+b=a+(2a-1)=3a-1$이므로 a의 범위를 구하면 된다.

$f'(0)\geq 0$

⇔ $-b\geq 0$ ⇔ $b\leq 0$

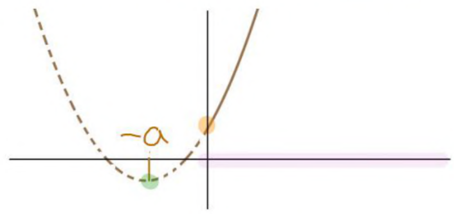
∴ $a\leq \frac{1}{2}$ ($\because$ $b=2a-1$)

(step2) $x\geq 0$에서의 $f'(x)$

$x\geq 0$에서 $f'(x)=x^2+2ax-b\geq 0$

$y=x^2+2ax-b$의 꼭짓점의 x좌표는 $-a$

i) 꼭짓점 x좌표 $-a\leq 0$ ⇔ $a\geq 0$



$x\geq 0$에서 $f'(x)\geq 0$이므로

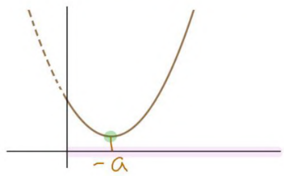
$f'(0)\geq 0$

⇔ $-b\geq 0$ ⇔ $b\leq 0$

∴ $a\leq \frac{1}{2}$ ($\because$ $b=2a-1$)

∴ $0\leq a\leq \frac{1}{2}$

ii) 꼭짓점 x좌표 $-a>0$ ⇔ $a<0$



$\frac{D}{4}=a^2+b=a^2+2a-1\leq 0$

⇔ $-1-\sqrt{2}\leq a\leq -1+\sqrt{2}$

∴ $-1-\sqrt{2}\leq a<0$

∴ i , ii)에 의하여

$-1-\sqrt{2}\leq a\leq \frac{1}{2}$

$a+b=3a-1$의

최대 $M=\frac{1}{2}$ ($a=\frac{1}{2}$일 때)

최소 $m=-4-3\sqrt{2}$ ($a=-1-\sqrt{2}$일 때)

∴ $M-m=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

[2023년 3월 (공통) 22번]

54. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때,

$$\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$$

의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{t\to 4+} h(t)=5$
>
> (나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

[Killer Mind] 숫자의 일치는 우연이 아니다!

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

729

(Step1) $\lim_{x\to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$이 존재성 해석

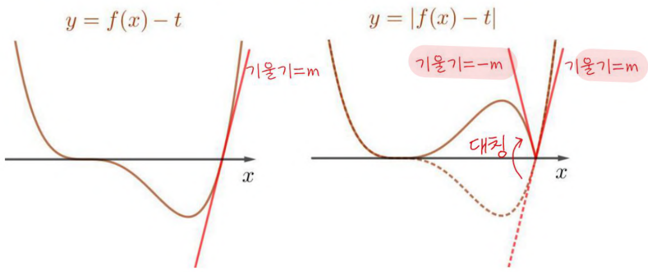
$\Leftrightarrow -\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$

① $g'(k)=0$

② $x=k$에서 "−좌미분계수=우미분계수"

절댓값 함수의 뾰족점에서 "−좌미분계수=우미분계수"가 성립한다!

why? 그래프가 대칭되며 접선도 함께 대칭된다.

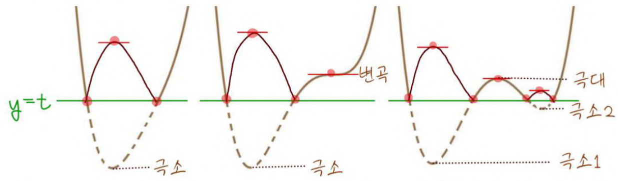


∴ $h(t)$는 $y=|f(x)-t|$에서 뾰족점 or 접선기울기=0 인 점의 개수

(Step2) $f(x)$ 그래프 개형 판단

$y=|f(x)-t|$에서 뾰족점 or 접선기울기=0 인 점의 개수

ⅰ) 최대 3개 ⅱ) 최대 4개 ⅲ) 최대 7개



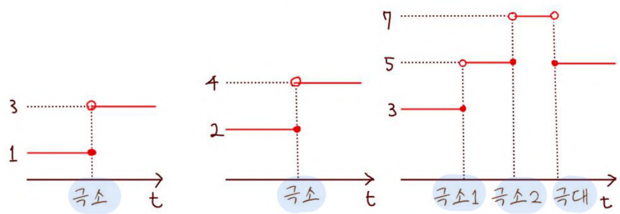
$\lim_{x\to 4+} h(t)=5$

불가능 불가능 가능

∴ $f(x)$는 W꼴

[참고] $h(t)$ 그래프

ⅰ) ⅱ) ⅲ)

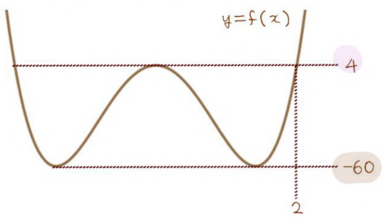


$h(t)$의 불연속점의 개수는 $f(x)$의 극값의 개수와 동일하다.

조건 (나)에서 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

⇔ 극소1=극소2

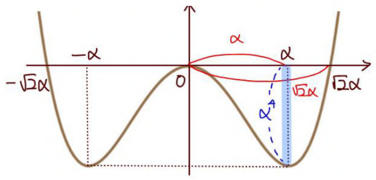
⇔ $f(x)$의 극솟값은 -60, 극댓값은 4



(step3)

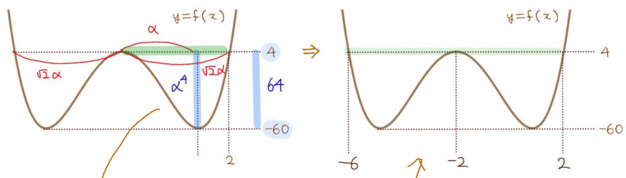
[개념] 사차함수는 극소가 동일하면 좌우대칭

[개념] 사차함수의 $\sqrt{2}:1$ 비례관계



$p(x)=(x-\sqrt{2}\alpha)x^2(x+\sqrt{2}\alpha)=(x^2-2\alpha^2)x^2$

극솟값 $p(\alpha)=-\alpha^2\alpha^2=-\alpha^4$



$\alpha^4=64$

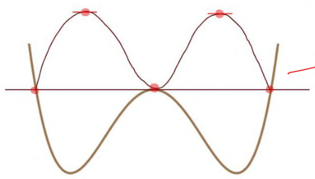
$\therefore\ \alpha=2\sqrt{2},\ \sqrt{2}\alpha=4$

$\therefore\ f(x)=(x+6)(x+2)^2(x-2)+4$

$\therefore\ f(4)=10\cdot6^2\cdot2+4=724$

$\therefore\ f(4)+h(4)=724+5=729$

※ t=4일 때, g(x)=|f(x)−4|



[2023년 4월 (공통) 14번]

55. 양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t)=M_1(t)+M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $g(2)=32$

ㄴ. $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=5$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

교육청 해설

[정답] ③

ㄱ. $f'(x)=3x^2-3t^2=3(x+t)(x-t)$

$f'(x)=0$에서 $x=-t$ 또는 $x=t$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-t$	$\cdots$	t	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$2t^3$	↘	$-2t^3$	↗

$t=2$일 때, 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값은 모두 $f(-2)=16$이므로 $M_1(2)=M_2(2)=16$

$g(2)=32$

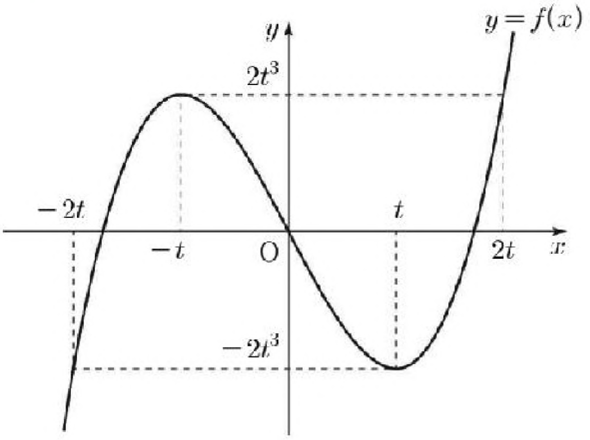
(참)

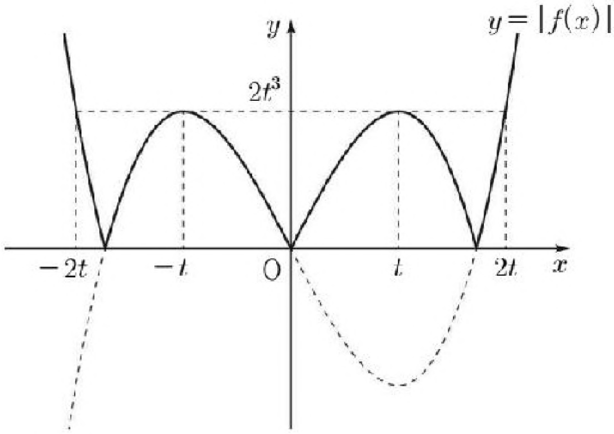
ㄴ. 방정식 $f(x)=2t^3$에서 $(x+t)^2(x-2t)=0$,

방정식 $f(x)=-2t^3$에서

$(x-t)^2(x+2t)=0$이므로

두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.





(i) $-t<-2,\ 1<t$일 때

$t>2$이고,

$M_1(t)=M_2(t)=f(-2)<f(-t)$

$g(t)=2f(-2)\neq 2f(-t)$

(ii) $-2t\leq -2\leq -t,\ 1\leq t$일 때

$1\leq t\leq 2$이고, $M_1(t)=M_2(t)=f(-t)$이므로

$g(t)=2f(-t)$

(iii) $-2<-2t,\ t<1\leq 2t$일 때

$\frac{1}{2}\leq t<1$이고,

$M_1(t)=f(-t)$,

$M_2(t)=-f(-2)>f(-t)$이므로

$g(t)=f(-t)-f(-2)\neq 2f(-t)$

(iv) $-2<-2t,\ 2t<1$일 때

$0<t<\frac{1}{2}$이고,

$M_1(t)=f(1)>f(-t)$,

$M_2(t)=-f(-2)>f(-t)$이므로

$g(t)=f(1)-f(-2)\neq 2f(-t)$

(i)~(iv)에 의하여 $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 $2+1=3$

(참)

ㄷ. (i) $\frac{1}{2}\leq t<1$일 때

$g(t)=f(-t)-f(-2)=2t^3-6t^2+8$이므로

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\left(2h^2-3h-\frac{9}{2}\right)=-\frac{9}{2}$$

(ii) $0<t<\frac{1}{2}$일 때

$g(t)=f(1)-f(-2)=-9t^2+9$이므로

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0-}(-9h-9)=-9$$

(i), (ii)에 의하여

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to 0-}\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$$

$$=-\frac{9}{2}-(-9)=\frac{9}{2}$$

(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

수Ⅱ

3. 적분법

PART C

※ 4점 ※

[2023년 7월 (공통) 22번]

56. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)-x-f(t)+t$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$와 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가)
> $\lim_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$
>
> (나) $\int_0^{\alpha} f(x)dx=\int_0^{\alpha}|f(x)|dx$를 만족시키는 실수 α의 최솟값은 -1이다.
>
> (다) 모든 실수 x에 대하여
> $\frac{d}{dx}\int_0^{x}\{f(u)-ku\}du \ge 0$이 되도록 하는 실수 k의 최댓값은 $f'(\sqrt{2})$이다.

$f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

교육청 해설

[정답] 182

방정식 $g(x)=0$에서

$x=t$일 때 $f(t)-t-f(t)+t=0$이므로

$g(t)=0$

$x\neq t$일 때 $f(x)-x-f(t)+t=0$에서

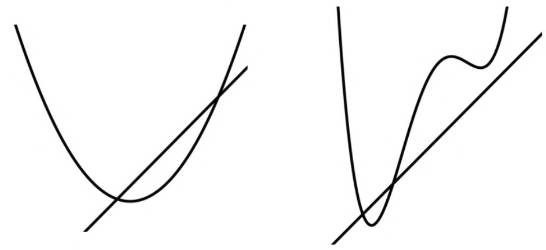
$\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=1$이다.

그러므로 함수 $h(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 1인 직선 l과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수이다. 임의의 실수 s에 대하여 $h(s)\ge 1$이다.

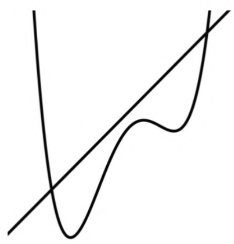
(ⅰ) $h(s)=1$인 경우

$\lim_{t\to s}h(t)=2$이므로 $\lim_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=1$

(ⅱ) $h(s)=2$인 경우

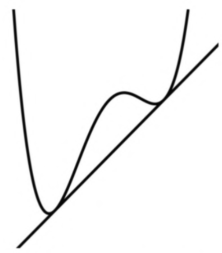


$\lim_{t\to s}h(t)=2$이므로 $\lim_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=0$



$\lim_{t\to s}h(t)=2$이므로

$\lim_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=0$



$\lim_{t\to s}h(t)=4$이므로

$\lim_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=2$

(ⅲ) $h(s)\ge 3$인 경우

$\lim_{t\to s}h(t)=4$이거나 극한값이 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

곡선 $y=f(x)$와 직선 l이

두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(1,\ f(1))$에서 접할 때

$\lim_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$를

만족시킨다.

[2023년 10월 (공통) 14번]

57. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(2)=0$인 이차함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$\int_4^n f(x)dx \ge 0$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $f(2)<0$

ㄴ. $\int_4^3 f(x)dx > \int_4^2 f(x)dx$

ㄷ. $6 \le \int_4^6 f(x)dx \le 14$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

교육청 해설

[정답] ③

$f'(2)=0$이므로 실수 k에 대하여

$f(x)=x^2-4x+k$라 하자.

ㄱ. 만약 $f(2)\ge 0$이면 $x>2$일 때 $f(x)>0$이므로 정적분과 넓이의 관계에 의하여

$\int_2^4 f(x)dx > 0$,

즉 $\int_4^2 f(x)dx = -\int_2^4 f(x)dx < 0$이므로

주어진 조건을 만족시키지 못한다. 즉

$f(2)<0$ (참)

ㄴ. $\int_4^3 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^3 = -k+\frac{5}{3}$

$-k+\frac{5}{3}\ge 0$이므로 $k\le\frac{5}{3}$

$\int_4^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^2 = -2k+\frac{16}{3}$

$\int_4^3 f(x)dx - \int_4^2 f(x)dx = k-\frac{11}{3}$

$k\le\frac{5}{3}$에서 $k-\frac{11}{3}\le -2<0$이므로

$\int_4^3 f(x)dx < \int_4^2 f(x)dx$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $k\le\frac{5}{3}$이므로 $f(3)=k-3\le-\frac{4}{3}<0$

$f(3)=f(1)<0$이므로 구간 $[1,3]$에서 $f(x)<0$이고, $n=1$ 또는 $n=2$일 때 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=n$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가

$-\int_n^3 f(x)dx$와 같다.

즉 $\int_3^n f(x)dx = -\int_n^3 f(x)dx > 0 \cdots\cdots$ ㉠

$\int_4^5 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+kx\right]_4^5 = k+\frac{7}{3}$

$k+\frac{7}{3}\ge 0$에서 $k\ge-\frac{7}{3}$이므로

$f(5)=5+k\ge\frac{8}{3}>0$

구간 $[5,\infty)$에서 $f(x)>0$이다.

그러므로 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=5$, $x=n$으로 둘러싸인 부분의 넓이가

$\int_5^n f(x)dx$와 같다.

즉 $\int_5^n f(x)dx > 0$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\int_4^3 f(x)dx\ge 0$,

$\int_4^5 f(x)dx\ge 0$이면 함수 $f(x)$가 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 $-\frac{7}{3}\le k\le\frac{5}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉢

$\int_4^6 f(x)dx = 2k+\frac{32}{3}$이므로 ㉢에서

$6\le\int_4^6 f(x)dx\le 14$

(참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

[2023년 10월 (공통) 20번]

58. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2x^2 f(x) = 3\int_0^x (x-t)\{f(x)+f(t)\}dt$$

를 만족시킨다. $f'(2)=4$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

교육청 해설

[정답] 24

$2x^2 f(x) = 3\int_0^x (x-t)\{f(x)+f(t)\}dt$에서

$$\begin{aligned}2x^2 f(x) &= 3\int_0^x (x-t)f(x)dt + 3\int_0^x (x-t)f(t)dt \\ &= 3f(x)\int_0^x (x-t)dt + 3\int_0^x (x-t)f(t)dt \\ &= 3f(x)\left[xt-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x + 3\int_0^x (x-t)f(t)dt \\ &= \frac{3}{2}x^2 f(x) + 3\int_0^x (x-t)f(t)dt\end{aligned}$$

$$x^2 f(x) = 6\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

$$x^2 f(x) = 6x\int_0^x f(t)dt - 6\int_0^x tf(t)dt \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2xf(x) + x^2 f'(x) = 6\int_0^x f(t)dt \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$f'(2)=4$이므로 다항함수 $f(x)$의 차수는 1 이상이다. 함수 $f(x)$의 차수를 n이라 하고, 최고차항의 계수를 a $(a \neq 0)$이라 하자.

㉡의 양변의 최고차항의 계수를 비교하면

$$a(2+n) = \frac{6a}{n+1}$$

$(n+1)(n+2)=6$, $(n-1)(n+4)=0$

n은 자연수이므로 $n=1$

함수 $f(x)$가 일차함수이고 $f'(2)=4$이므로

$a=4f(x)=4x+b$ (단, b는 상수)라 하면 ㉡에서

$$2x(4x+b)+4x^2 = 6\left[2t^2+bt\right]_0^x$$

$$12x^2+2bx = 12x^2+6bx \qquad \cdots\cdots ㉢$$

모든 실수 x에 대하여 ㉢이 성립하므로 $b=0$

$f(x)=4x$이므로 $f(6)=24$

[2023년 9월 (공통) 22번]

59. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때,
이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

10

(step1) 조건 (가) 분석하기

$\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$에서

❶ $x = 1$ 대입

$0 = 1 \times f(1) - 2 - 1$

$\therefore f(1) = 3$

❷ 미분

$\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + xf'(x) - 4x$

⇔ $xf'(x) = 4x$

$\therefore f'(x) = 4$

$\therefore f(x) = 4x + C = 4x - 1$ ($\because f(1) = 3$)

$\therefore F(x) = 2x^2 - x + a$

(step2) 조건 (나) 분석하기

$f(x)G(x) + F(x)g(x)$

$= F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$

$= \{F(x)G(x)\}' = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\therefore F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C_1$

$= (2x^2 - x + a)(x^2 + x + c)$

$\therefore G(x) = x^2 + x + c$

$\therefore \int_1^3 g(x)dx = [x^2 + x + c]_1^3 = 10$

Analysis

$g(x) = \int_a^x f(t)dt$ 꼴이 등장하면 꼭 해야 하는 것!

❶ $x = a$ 대입 : $g(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$

❷ 미분 : $g'(x) = f(x)$

[2023년 4월 (공통) 22번]

60. 두 상수 a, b $(b \neq 1)$과 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) $|x|<2$일 때, $g(x)=\int_0^x(-t+a)dt$이고
$|x|\geq 2$일 때, $|g'(x)|=f(x)$이다.
(다) 함수 $g(x)$는 $x=1$, $x=b$에서 극값을 갖는다.

$g(k)=0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합이 $p+q\sqrt{3}$일 때, $p\times q$의 값을 구하시오. [4점]
(단, p와 q는 유리수이다.)

교육청 해설

[정답] 32
조건 (나)에서 $|x|<2$일 때 $g'(x)=-x+a$이고
조건 (다)에서 함수 $g(x)$가 $x=1$에서
극값을 가지므로 $g'(1)=-1+a=0$, $a=1$
$|x|<2$일 때 $g'(x)=-x+1$에서
함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 극값을 가지므로 $|b|\geq 2$
함수 $g'(x)$가 $x=-2$, $x=2$에서 연속이므로

$$g'(-2)=\lim_{x\to -2+}g'(x)=\lim_{x\to -2+}(-x+1)=3$$
…… ㉠

$$g'(2)=\lim_{x\to 2-}g'(x)=\lim_{x\to 2-}(-x+1)=-1$$
…… ㉡

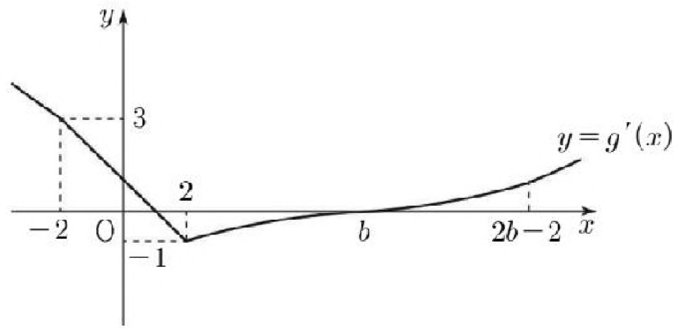
에서 $b\neq\pm 2$이므로 $|b|>2$
…… ㉢

조건 (나)에서 $|g'(b)|=f(b)=0$이고
$|x|\geq 2$인 모든 실수 x에 대하여
이차함수 $f(x)$는 $f(x)=|g'(x)|\geq 0$이므로
$f(x)=m(x-b)^2$ $(m>0)$
㉠, ㉡에 의하여
$f(-2)=|g'(-2)|=3$, $f(2)=|g'(2)|=1$
…… ㉣

이고 $f(-2)>f(2)$에서
$m(-2-b)^2>m(2-b)^2$
$b^2+4b+4>b^2-4b+4$에서 $b>0$

㉢에 의하여 $b>2$이고
조건을 만족시키는 함수 $g'(x)$는

$$g'(x)=\begin{cases} m(x-b)^2 & (x\leq -2) \\ -x+1 & (-2<x<2) \\ -m(x-b)^2 & (2\leq x<b) \\ m(x-b)^2 & (x\geq b) \end{cases}$$



㉣에 의하여
$f(-2)=m(-2-b)^2=3$, $f(2)=m(2-b)^2=1$
두 식을 연립하면
$m(-2-b)^2=3m(2-b)^2$
$b^2-8b+4=0$에서 $b>2$이므로
$b=4+2\sqrt{3}$

조건 (나)에서 $g(0)=\int_0^0(-t+1)dt=0$이므로

$g(k)=\int_0^k g'(t)dt$에서

(i) $k<0$일 때
$x\leq 0$에서 $g'(x)>0$이므로
$g(k)=\int_0^k g'(t)dt=-\int_k^0 g'(t)dt<0$
그러므로
$g(k)=0$을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=0$일 때
$g(0)=\int_0^0 g'(t)dt=0$이므로
$g(k)=0$을 만족시킨다.

(iii) $0<k\leq 2$일 때

$$\int_0^k g'(t)dt=\int_0^k(-t+1)dt$$
$$=\left[-\frac{t^2}{2}+t\right]_0^k$$
$$=-\frac{k^2}{2}+k=0\text{에서}$$

$k=2$일 때 $g(k)=0$을 만족시킨다.

(iv) $k>2$일 때

$2 < x < b$에서 $g'(x) < 0$이므로

$\int_0^k g'(t)dt = 0$이려면 $k > b$

$$\int_0^k g'(t)dt$$

$$= \int_0^2 g'(t)dt + \int_2^b g'(t)dt + \int_b^k g'(t)dt$$

$$= 0 - \int_2^b m(t-b)^2 dt + \int_b^k m(t-b)^2 dt$$

$$= -m\int_2^b (t^2 - 2bt + b^2)dt + m\int_b^k (t^2 - 2bt + b^2)dt$$

$$= -m\left[\frac{t^3}{3} - bt^2 + b^2 t\right]_2^b + m\left[\frac{t^3}{3} - bt^2 + b^2 t\right]_b^k$$

$$= -\frac{m}{3}(b^3 - 6b^2 + 12b - 8) + \frac{m}{3}(k^3 - 3k^2 b + 3kb^2 - b^3)$$

$$= -\frac{m}{3}(b-2)^3 + \frac{m}{3}(k-b)^3 = 0$$에서

$(k-b)^3 = (b-2)^3$

$k-b$, $b-2$는 모두 실수이므로 $k-b = b-2$

그러므로 $k = 2b - 2 = 6 + 4\sqrt{3}$일 때

$g(k) = 0$을 만족시킨다.

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$g(k) = 0$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

$0 + 2 + (6 + 4\sqrt{3}) = 8 + 4\sqrt{3}$이므로

$p = 8$, $q = 4$

따라서 $p \times q = 32$