SEASON 2024

11 주차

미적분 종합선물세트

선택과목 | 미적분

SEOL:NAME
THE SIGNATURE

설레임

테마별
기출분석집

설레임 모의고사
Team SeolName

11 미적분 종합선물세트

자주 나오는 음함수 미분 해석부터 여러 가지 적분 스킬들까지..!

STYLE 01

첫 번째 선물: 적분 스킬 익히기

미적분에서의 적분 문제는 함수의 해석보다는 그 함수 자체에 대하여 부분적분이나 치환적분을 통해 문제를 해결할 수 있는지를 물어보는 경우가 많아.

그렇기 때문에 문제를 보고 자신이 어떠한 적분을 적용해야 하는지를 빠르게 파악해야 하지.

이번 챕터는 이를 구조화하고 연습하는 기회가 되길 바랄게!

[2019학년도 10월 학력평가 가형 30번]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x+1)-g(x)=-\pi(e+1)e^{x}\sin(\pi x)$

(나) $g(x+1)=\int_{0}^{x}\{f(t+1)e^{t}-f(t)e^{t}+g(t)\}dt$

$\int_{0}^{1}f(x)dx=\frac{10}{9}e+4$일 때, $\int_{1}^{10}f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

아무리 미적분이라고 하지만 그래도 문제를 발상적으로는 낼 수 없는 것이 평가원의 현실이지.
나의 경우에는 미적분에서의 적분 문제를 풀 때 다음 규칙을 항상 지켰던 것 같아.
주의할 점은 **세 번째 스텝까지 모두 시도하고 안 되면, 다시 첫 번째 스텝으로 돌아오는 것** 잊지 않기!

치환적분이 되는지 먼저 확인한다
(치환적분은 일반적으로 보았을 때 바로 보이기 때문이다)

↓

치환적분이 안 되면, 부분적분을 시도한다

↓

그래도 안 되면, 문제에서 안 쓴 조건이 있는지 확인한다
(문제에서 주어진 조건을 통해 식이 변형되는 경우가 있기 때문)

[예제] $f(1)=0$ 인 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_0^1 f(x)e^{x^2-2x+3}dx = e^3-e^2$ 일 때, $f(-3)$ 의 값을 구하시오.

[풀이]
위의 방식으로 시작해볼거야. 자, 우선 이 정적분을 보았을 때 치환적분이 될 것 같니..?
미적분을 잘 배운 학생들이라면 아마 아무리 봐도 이건 부분적분이라는 생각이 들거야. 맞아.
치환적분이 안 되면 부분적분으로 가는 것! 기억해두면 정말 쓸모있어.
애시당초 고등학교 때는 치환적분과 부분적분이 적분 스킬의 거의 대부분이고,
위에 써 놓았듯 **치환적분은 일반적으로 바로 보이게끔** 평가원이 설계를 해 놔.
평가원이 평가하고자 하는 요소는 단순히 '아무 함수나 줬을 때 얼마나 적분을 잘해?'가 아니라
'이런 적분 방법이 있음을 알려줬으니까 얼마나 활용할 수 있어?'를 묻는 거니까.

자, 그래서 부분적분을 해보려고 하는데, 하필 이 상태에서 부분적분을 해도 뭔가 바로 안 될 것 같지?
그래서 세 번째 스텝! **문제에서 안 쓴 조건**을 활용해보자.
$f(1)=0$ 이라고 했으니 $f(x)=a(x-1)$ 라 쓸 수 있겠지?
아, 그럼 주어진 등식을 $\int_0^1 a(x-1)e^{x^2-2x+3}dx = e^3-e^2$ 으로 바꾸고 **처음 스텝으로 다시 돌아가보는 거야.**
이제 치환적분이 되네. 시작해보자!

$t=x^2-2x+3$ 로 치환하면

$$\int_0^1 a(x-1)e^{x^2-2x+3}dx = \int_3^2 \frac{a}{2}e^t dt = \frac{a(e^3-e^2)}{2} = e^3-e^2$$

곧, $a=-2$ 임을 얻으므로 $f(x)=-2(x-1)$ 이고, $f(-3)=8$ 임을 얻어. 이런 느낌으로 출발해보자.

STEP 1 **해석의 핵심!**

우선 문제에서 요구하는 것은 $f(x)$를 적분하는 거야.

그런데 (가) 조건을 보니 하라는 $f(x)$에 대한 식은 없고 $g(x)$에 대한 식만 있네?

그럼 아직은 이걸 분석할 때는 아니라는 거겠지?

자, 그럼 (나)로 들어가보자.

으음, 수상한 적분식이 나와 있어. 우리는 지금 $f(x)$에 대한 식이 필요한 거지?

그러면, 이 상태로 푸는 것보다는 $f(x)$를 조금 더 쉽게 해석할 수 있도록

양변을 미분해보는 게 좋을 것 같아. 그 전에 잠깐.

적분된 식을 미분하면 정보가 하나 없어진다는 것 기억하고 있을까?

어떤 다항함수를 미분하면 상수항이 없어지면서 정보가 하나 사라지잖아?

그렇기 때문에 정보량은 똑같이 유지하면서 미분을 하려면

(나) 조건에서 또 다른 정보를 하나 얻고 미분해야 해. 가장 간단한 거 있지?

그냥 정적분 값이 0 되는 거 집어넣으면 돼. 다시 말해, $x=0$ 대입하면 $g(1)=0$임을 얻고 시작.

주어진 식을 미분하면

$$g'(x+1)=f(x+1)e^{x}-f(x)e^{x}+g(x)$$

이야. 굳이 조금 더 정리를 하면

$$f(x+1)-f(x)=\{g'(x+1)-g(x)\}e^{-x}$$

이 정도인데, 여기서 바로 넘어가기 금물..! 뽕을 조금이라도 더 뽑을 수 있을 가능성이 보여.

그럼, 여기서 아직 물러서면 안 돼.

이 상태로 $\int_{x}^{x+1} f(t)dt$ 형태 만들 수 있거든? 그대로 0부터 x까지 정적분하면 좌변은

$$\int_{1}^{x+1} f(t)dt-\int_{0}^{x} f(t)dt=\int_{x}^{x+1} f(t)dt-\int_{0}^{1} f(t)dt$$

이잖아? 너무 맛있는 조건이야. 이 정도 얻었으면 더 뽑아낼 뽕은 없는 것 같지? 다음 조건으로 출발!

(주어진 조건에서 뽕을 충분히 뽑아냈으면 다른 조건으로 가는 습관은 필수)

↓

STEP 2 해석말고 이번엔 계산!

아까 주어진 식을 정적분해서 좌변이 $\int_x^{x+1} f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt$임을 얻었어. 그럼 우변은?

$$\int_0^x \{g'(t+1) - g(t)\}e^{-t}dt$$

이건데, 자 이제 위에서 말한 행동강령 그대로 적용해보자.

치환적분이 되는지 먼저 확인한다
(치환적분은 일반적으로 보았을 때 바로 보이기 때문이다)

↓

치환적분이 안 되면, 부분적분을 시도한다

↓

그래도 안 되면, 문제에서 안 쓴 조건이 있는지 확인한다
(문제에서 주어진 조건을 통해 식이 변형되는 경우가 있기 때문)

일단 치환적분은 아무리 봐도 아닌 것 같고... 그럼 부분적분..?

아니야.. 부분적분하기에도 형태가 너무 부자연스럽잖아. 그러면, 뭐다? 문제에서 안 쓴 조건을 쓰자.

(가) 조건 아직 안 썼으니까 여기에서 활용해볼래.

$$g(x+1) - g(x) = -\pi(e+1)e^x \sin(\pi x) \quad \cdots \text{㉠}$$

위의 적분식에서 $g'(t+1)$ 또는 $g(t)$를 바꿔야 할텐데, ㉠을 직접 미분하는 건 너무 미친 짓 같으니 우선 $g(t)$를 바꿔보자.

$$\int_0^x \{g'(t+1) - g(t)\}e^{-t}dt = \int_0^x \{g'(t+1) - g(t+1) - \pi(e+1)e^t \sin(\pi t)\}e^{-t}dt$$

$$= \int_0^x \{g'(t+1) - g(t+1)\}e^{-t} - \pi(e+1)\sin(\pi t)dt$$

$$= \int_0^x \{g'(t+1) - g(t+1)\}e^{-t} - \pi(e+1)\int_0^x \sin(\pi t)dt$$

이 정도 왔으면 감이 왔을려나? $\{g'(t+1) - g(t+1)\}e^{-t}$는 바로 적분되는 거 보여?

이 정도 적분은 상위권이라면 외워두는 편이 나아.

안 그러면 이게 적분되는 것을 모르고 문제를 틀릴 수도 있을 테니까...

아래에 부록으로 남겨둘테니까 일단 이 문제에 우선 집중하자.

$$\int_0^x \{g'(t+1) - g(t+1)\}e^{-t} - \pi(e+1)\int_0^x \sin(\pi t)dt$$

$$= \left[g(t+1)e^{-t}\right]_0^x - \pi(e+1)\left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^x$$

$$= g(x+1)e^{-x} + g(1) + (e+1)\{\cos(\pi x) - 1\}$$

$$= \boldsymbol{g(x+1)e^{-x} + (e+1)\{\cos(\pi x) - 1\}}$$

아까, 미분하면서 정보 잃지 않게 하려고 $g(1)=0$이라고 했던 거 기억나? 아, 여기서 써버리는고만.
곧, 우리가 지금까지 알아낸 정보들을 종합하면 다음과 같아.

$$\int_{x}^{x+1} f(t)dt - \int_{0}^{1} f(t)dt = g(x+1)e^{-x} + (e+1)\{\cos(\pi x) - 1\} \ \cdots \ ㉡$$

그럼 $\int_{1}^{10} f(x)dx$의 값을 구하려면 ㉡에 $x=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$까지 넣어서 전부 더해보면 되겠다.

$$\int_{1}^{10} f(t)dt - 9\int_{0}^{1} f(t)dt = g(2)e^{-1} + g(4)e^{-3} + \cdots + g(10)e^{-9} - 10(e+1) \ \cdots \ ㉢$$

$\int_{0}^{1} f(t)dt$의 값은 나와 있으니까, 우리는 $g(2),\ g(4),\ \cdots,\ g(10)$만 구하면 되겠다.

이건 조건 (가)로 금방 해결 가능하지? 아마 이쯤에서 갑자기 막힌 친구들이 있을 수도 있는데,
문제가 갑자기 풀리지 않으면 기본적인 조건들 중에서 쓸만한 게 있는지 확인하는 것도 중요해.
약간 기본적인 행동 수칙이라고 해야 할까? 그런 거니까 잘 기억해두도록!

$$g(x+1) - g(x) = -\pi(e+1)e^{x}\sin(\pi x)$$

에서 $g(1)=0$이니까 $x=1$을 대입하면 $g(2)=0$임을 얻어. 같은 방식으로 $x=2,\ 3,\ \cdots$을 다 넣어봐도 근본적으로 $\sin(\pi x)=0$이 되기 때문에 모두 0이 되지.
그럼 ㉢의 식은

$$\begin{aligned}\int_{1}^{10} f(t)dt &= 9\int_{0}^{1} f(t)dt - 10(e+1) \\ &= 9\left(\frac{10}{9}e + 4\right) - 10(e+1) \\ &= 26\end{aligned}$$

임을 얻어. 자, 답까지 완성!

이 문제에서는 단순한 문제 풀이 뿐만 아니라 정말 중요한 행동 강령들이 많이 나왔어.

1. **문제에서 뽑은 최대한 뽑아낼 수 있을 때까지 뽑아내자.**
2. **문제가 갑자기 풀리지 않으면 기본적인 조건들 중에서 쓸만한 게 있는지 확인하는 것도 중요하다.**

이런 내용들은 수능 전까지 절대 까먹지 않길 바라.

★ STYLE 01 부록 - 기본적으로 기억해둬야 할 적분들

이번 문제의 경우

$$e^{-x}(-f(x)+f'(x))=\frac{d}{dx}(e^{-x}f(x))$$

이라는 점을 기억해둬야 훨씬 잘 풀렸잖아. 이런 것처럼 꼭 알아둬야 할 적분들 몇 개를 소개할게.
대부분 부분적분이나 치환적분으로 해결 가능하니까 확인 목적으로 살펴보자.

① $\int \{f(x)+f'(x)\}e^{x} = f(x)e^{x}+C$

② $\int \{-f(x)+f'(x)\}e^{-x} = f(x)e^{-x}+C$

③ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$

④ $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$

⑤ $\int (x\cos x+\sin x)dx = x\sin x + C$, $\int (-x\sin x+\cos x)dx = x\cos x + C$

⑥ $\int \tan x dx = \ln|\cos x|+C$, $\int \cot x dx = \ln|\sin x|+C$

⑦ $\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}\{f(x)\}^2+C$, $\int \{f(x)\}^n f'(x)dx = \frac{\{f(x)\}^{n+1}}{n+1}+C$

이거 말고도 나열하자면 많겠지만 일단 자주 나오는 것 위주로 한 번 써봤어.
이것 외에도 식을 변형하는 스킬 몇 개를 알려줄게.

㉠ 간단한 미분방정식 풀기

$$f(x)+f'(x)=xe^{-x}$$

일 때, $f(x)$는 무엇일까? 이럴 때는 양변에 e^{x}를 곱하면

$$\{f(x)+f'(x)\}e^{x}=x$$

이제, 이 식을 0부터 t까지 정적분하면

$$\int_0^x \{f(t)+f'(t)\}e^{t}dt=\int_0^x tdt$$

$$e^{x}f(x)-f(0)=\frac{t^2}{2}$$

따라서 $f(x)=\left\{\frac{t^2}{2}+f(0)\right\}e^{-x}$임을 얻지. $f(0)$의 값만 결정되면 $f(x)$는 전부 결정되는 거야.

㉡ 치환적분 가능꼴로 만들기

[2020학년도 9월 가형 30번]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오. [4점]

[풀이]

이 상태 그대로 적분해서 $f(x)$를 얻는 것은 사실상 불가능에 가까워. 그렇기에 우리가 할 수 있는 것은 이 함수가 적분 가능한 꼴로 만들어주는 것이지. 가장 간단한 방법은 양변에 $(2x+1)$을 곱해주는 거야. 바로 치환적분되는 꼴로 만들어주자 이 논리지.

$$(2x+1)f'(x^2+x+1)=\pi f(1)(2x+1)\sin\pi x+f(3)(2x^2+x)+10x^3+5x^2$$

식이 복잡해 보이긴 하는데, 이렇게라도 안 하면 우리는 $f(x)$를 구할 방법이 없다보니...

자, 이제 적분해주자. 적분 구간은 0부터 x까지!

$$f(x^2+x+1)-f(1)=\int_0^x\{\pi f(1)(2t+1)\sin\pi t+f(3)(2t^2+t)+10t^3+5t^2\}dt \ \cdots \ ㉠$$

각 적분은 귀찮지만 어쨌든 할 수는 있어..!

수능 현장에서는 문제를 어쨌든 푸는 게 중요하지, 문제를 '어떻게' 푸는지에 너무 매몰될 필요는 없어.

(그렇다고 식이 점점 더 더러워지기만 하는데 계속 밀어붙였다간 재미있는 성적이 너를 기다리겠지?)

$$\int_0^x \pi f(1)(2t+1)\sin\pi t\,dt=[-f(1)(2t+1)\cos\pi t]_0^x-\int_0^x -2f(1)\cos\pi t\,dt$$

$$=f(1)\left\{-(2x+1)\cos\pi x+1+\frac{2\sin\pi x}{\pi}\right\} \ \cdots \ ㉡$$

$$\int_0^x\{f(3)(2t^2+t)+10t^3+5t^2\}dt=\left[f(3)\left(\frac{2}{3}t^3+\frac{t^2}{2}\right)+\frac{5}{2}t^4+\frac{5}{3}t^3\right]_0^x$$

$$=f(3)\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)+\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3 \ \cdots \ ㉢$$

식이 더러워서 무섭겠지만 현 상황은 ㉠ = ㉡ + ㉢ 인 상황이야. 이제 $f(1)$과 $f(3)$을 제거해주기 위해 ㉠에 $x=0$, $x=1$을 대입하면 되겠다. 각각 대입하면

$$x=1\text{일 때 : } \ \overbrace{f(3)-f(1)}^{㉠}=\overbrace{2f(1)}^{㉡}+\overbrace{\frac{7}{6}f(3)+\frac{25}{6}}^{㉢} \ \cdots \ ㉣$$

임은 얻지만, $x=0$일 때는 $0=0$이 나와버리네..? 왜 그럴까? 사실 이유는 단순해.

애시당초 **처음에 0부터 x까지 적분했는데 $x=0$을 넣은 것 뿐이니까** 당연히 $0=0$이 나오겠지.

그럼 이 문제를 해결하려면 어떻게 해야 할까?

㉠을 잘 생각해보면 $x=0$을 넣으나 $x=-1$을 넣으나 그 결과는 같아. 그럼 $x=-1$을 대입했을 때,

$$x=-1\text{일 때 : } \ \overbrace{0}^{㉠}=\overbrace{0}^{㉡}+\overbrace{-\frac{f(3)}{6}+\frac{5}{6}}^{㉢} \ \cdots \ ㉤$$

이므로 ㉣, ㉤을 연립하면 $f(1)=-\frac{5}{3}$, $f(3)=5$임을 얻어.

최종적으로 $f(7)$을 구하기 위해 등식 ㉠ = ㉡ + ㉢에 $x=2$를 대입하면

$$\overbrace{f(7)-f(1)}^{㉠}=\overbrace{-4f(1)}^{㉡}+\overbrace{\frac{22}{3}f(3)+\frac{160}{3}}^{㉢}$$

곧, $f(7)=95$임을 얻을 수 있지.

STYLE
02

두 번째 선물, 음함수와 역함수

미적분에서는 사실 대부분의 미분법들이 전부다 통용이 돼.

음함수의 미분법, 역함수의 미분법, 이런 것들도 어느 정도 풀이법이 정형화 되어 있어서

일단 익숙해지기만 하면 맞고 시작하는 거지.

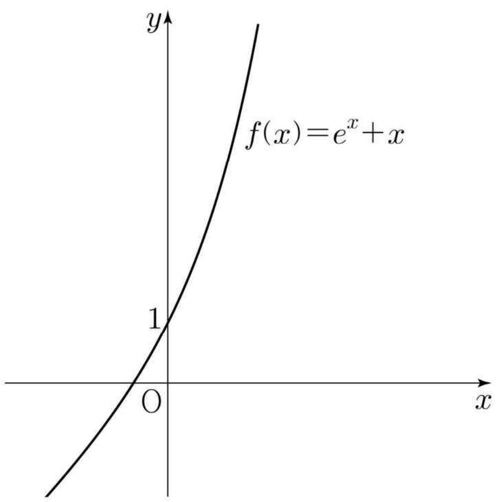
특히, 우리가 잘못 알고 있는 것들이 28-29-30번 순으로 어려워진다는 인식이 많은데,

실제 수능에서는 일반적으로 29-28-30 또는 29-30-28 순으로 어려워져. (최근은 29-30-28이 많은 추세)

이런 유형은 29번에 잘 출제되는 만큼 유형화를 잘 해두면 쉽게 맞힐 수 있겠지?

[2023학년도 9월 모의평가 미적분 29번]

함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



우리만의 실전 풀이

THINKING!

이런 문제들은 보자마자 이 함수를 어떻게 구하지라는 생각을 절대 하면 안 돼.
일단 있는 상황들을 모조리 식으로 전부 다 써버리고 그 다음에 계산할 생각을 하는 편이 옳아.
우리는 미적분을 배우면서 온갖 미분법을 배웠기 때문에, 어지간하면 사고 과정이 어려울지언정
계산 자체가 어려울 가능성은 거의 적어.
특히, 흔히 착각하는 내용 중에 특별한 미분 스킬이 필요하지 않나 싶은 것들이 나오면
어떻게 하나 걱정하는 학생들이 있어.
단순하게 생각해보자. 내신했던 친구들은 함수 $y=x^x$ 미분하는 방법 알고 있지?
흔히 로그 미분법이라고 해서

$$\ln y = x\ln x$$
$$\frac{y'}{y} = 1+\ln x$$
$$y' = x\ln x + x\ln^2 x$$

이런 식으로 계산하는 거긴 한데 알아둘 필요는 없고, 애당초 수능에 나온 적도 없어.
왜 안 나올까? 그것은 수능이 교육과정을 철저히 따라야 하는 시험이기 때문이야.
이 미분법은 대학교 미적분학에서도 나오는 유명한 미분법이야.
그러기에 고등 과정에서 요구하는 평가 목적에 부합하지 않지.
이런 류의 스킬도 넣기 어려워 하는 평가원이 과연 더욱 스킬적인 미분법을 출제할까?

특히나 요즘같이 시험이 쉬워지고 있는 추세에서 미분을 못 해서 틀린다는 것은 말이 안 되는 소리지.
이런 류의 문제는 일단 식을 전부 조합해서 원하는 형태로 만든 다음에 마지막에 싹다 미분해서 원하는 값만 얻어내면 되는 문제야. 무슨 소리인지 잘 이해가 안 간다면 아래의 풀이를 잘 따라가보면서 생각해보자.

STEP 1 위에서 말한대로 차근차근!

일단 $h(t)$가 어떤 함수인지를 알아야 해. 그러기 때문에 문자를 몇 개 더 써서라도 일단 주어진 문자들로 $h(t)$라는 함수를 나타낼 필요가 있어. 즉슨, $h(t)=\sim\sim\sim\sim$ 이런 느낌으로는 못 쓰더라도

$\{h(t)\}^2+h(t)=s+t$ ← 실제 식이 이렇다는 게 아니라 이런 느낌을 말하는거!

이런 식으로 식은 세울 수 있어야 한다는 거야.
미분 자체는 그냥 양변을 미분해버리면 끝이니까.

우선, $f(x)$와 점 $(t,\ 0)$ 사이의 거리가 최소일 때의 특성은 무엇일까?
바로 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선과 두 점 $(s,\ f(s))$, $(t,\ 0)$을 잇는 직선이 수직,
곧, 기울기의 곱이 -1이라는 거지. 이를 식으로 나타내면 다음과 같아.

$$f'(s)\times\frac{f(s)}{s-t}=-1$$

한편, $f(s)=g(t)$이므로 $g(t)$의 역함수는 $h(g(t))=t$를 만족하겠지?
곧, $h(f(s))=t$이고, $h(t)$는 t에 대하여 정의된 함수이므로 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\left\{\frac{d}{dt}f(s)\right\}\times h'(f(s))=1$$

$$\frac{ds}{dt}\times f'(s)\times h'(f(s))=1 \ \cdots \text{㉠}$$

자, 이제, $t=1$일 때, $\frac{ds}{dt}$, $f'(s)$의 값을 모두 구하면 되는거야.

STEP 2 해석말고 이번엔 계산!

$\frac{ds}{dt}$ 먼저 구해보자. 위의 주어진 식에서

$$f'(s)\times\frac{f(s)}{s-t}=-1$$

$$(e^s+1)(e^s+s)=t-s \ \cdots \text{㉡}$$

이니까, 이대로 양변을 미분하면

$$\frac{ds}{dt}\left\{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2\right\}=1-\frac{ds}{dt}$$

한편, 지금은 $t=1$인 상황이므로 ㉡에 이를 대입하면 $s=0$임을 얻을 수 있어. 이를 바로 윗식에 대입하면 $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{6}$임을 얻을 수 있지.

다음으로 $f'(s)$을 구해볼건데, 이건 간단하지?
$f'(s)=e^s+1$인데, $s=0$이므로 $f'(s)=2$

㉠에 얻은 값들을 모두 넣으면

$$\frac{1}{6}\times 2\times h'(1)=1$$

곧, $h'(1)=3$임을 얻을 수 있다 이 말씀!

STYLE 03

세 번째 선물, 미적분식 다항함수 추론

약간 [수학2]와 [미적분]의 짬뽕 같은 느낌이지.

다항함수 추론을 많이 보긴 했을텐데, 미적분에서 활용하는 건 조금 쉽지 않긴 하지?

그래서 이런 문제를 준비해봤어.

[수학2]에다가 [미적분] 지식을 조금 추가한 느낌이긴 한데, 우선 풀어보고 말해보자!

[2023학년도 6월 모의평가 미적분 28번]

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \ln|f(x)| & (f(x)\neq 0) \\ 1 & (f(x)=0) \end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
(나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고, 함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
(다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

우리만의 실전 풀이

THINKING!

우웩. 조건이 무려 3개... 주어진 조건을 더더욱 유기적으로 잘 활용해야 한다는 뜻이겠지?
그런데 아무리 조건 개수가 많이 나와도 꼭 지켜야 할 대수칙은 있어.

조건은 항상 (가)부터 순서대로 읽어야 한다는 점!

왜 그럴까? 평가원은 항상 학생들이 순서대로 문제를 읽는다는 가정 하에 문제를 출제해.
가끔 사설 모의고사는 그렇지 않는 경우가 있는데, 평가원은 기본적으로 '학원 없이 정상적인 교육과정을 밟은 학생'을 상정하고 문제를 출제하므로 (가) 조건부터 보고 풀었을 때 자연스럽게 풀리도록 설계를 하는 셈이지.
물론, 실제로 가장 먼저 사용되는 조건은 (나) 또는 (다)일 수도 있어.
하지만 그것과는 별개로 '난이도를 고의로 높이려고 하지 않는 보통의 경우'는 (가)부터 풀리는 것이 옳은 것이야.
자, 그럼 순서대로 출발해보자.

STEP 1 조건 (가)를 해석해봅시다 제군들

조건 (가)를 보면 $g(x)$가 $x \neq 1$인 모든 실수 x에 대하여 연속이라고 나와 있어.
아마 대부분의 학생들, 그리고 심지어 수험생 시절의 나도 이 말을 이렇게 해석했어.

함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 불연속이다.

아마, 다 의아해할걸? 이거 맞는 말 아닌가? 하지만, 엄밀하게 이 말은 틀렸어.
$g(x)$는 1이 아닌 모든 실수에 '대해서는' 연속임이 보장되어 있다고 나와있을 뿐, $x=1$에서의 연속성은 주어지지 않은거야. 즉슨, $g(x)$가 $x=1$에서 연속이어도 이 조건에 모순은 없는거지.
물론, 평가원이 일부러 학생들이 틀리게 하려 하지는 않으므로 실제로는 불연속이지만 원래는 알 수 없는 사실이야. 그럼에도 불구하고 $x=1$에서 $g(x)$가 불연속임이 보장되는 이유는 무엇일까?
바로 사잇값의 정리 때문이지. $y=f(x)$는 삼차함수이기 때문에 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 가져. 즉슨, 위의 $g(x)$의 정의에서 밝히고 있는 불연속 지점이 적어도 하나는 존재한다는 거지.
사소하긴 한데, 이처럼 문제를 잘못 해석했다간 낭패를 볼 수 있으니 주의하라는 의미였어.
결국 이 조건을 해석하면 $f(x)=0$이 되는 지점이 오직 $x=1$ 뿐이라는 거겠지?
이 정도 뽕 뽑고 다음으로 넘어가보자. 더 얻을만한 것도 없는 것 같고.

↓

STEP 2 이번엔 (나) 조건이랍니다

조건 (나)에서는 $g(x)$가 $x=2$에서 극대이고, $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소라고 했어.

일단 $|g(x)|$라는 함수는 $g(x)\le 0$인 부분에서 $g(x)$를 상하로 뒤집는 역할만 할 수 있으므로

$g(x)$가 $x=2$에서 극대일 때, $|g(x)|$도 $x=2$에서 극값을 가짐은 자명해.

하지만, 여기에서 중요한 것은 **원래 함수는 $x=2$에서 극댓값을 갖는데,**

절댓값 함수는 극솟값을 가진다는 거야. 이것의 의미가 무엇일까?

바로 $x=2$에서 절댓값 함수는 원래의 함수에서 상하로 뒤집힌 상태라는 의미겠지?

다시 말해, 이 조건에서는 $g'(2)=0$이고, $g(2)\le 0$임을 얻을 수 있는 셈이지.

$f(x)\ne 0$일 때, $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$이므로, $f'(2)=0$이고,

$\ln|f(2)|\le 0$이므로 $-1\le f(2)\le 1$, $f(2)\ne 0$이야.

특히, $g(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가진다고 했는데 위의 그림에서 $f(2)>0$이므로 $g(x)$가 $x=2$에서

'극대'이기 위해서는 $f'(x)$가 $x=2$ 주위에서 $(+)\to(-)$으로 변화,

곧, $f(x)$도 $x=2$에서 극댓값을 가진다는 점을 알 수 있어.

이 정도 뽕만 뽑고 넘어가자.

STEP 3 마지막으로 (다) 조건..

(다) 조건에서는 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이라 나와 있네.

일단 $g(x)$라는 함수는

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\ne 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이잖아? 그럼 $g(x)=0$이 되는 경우는 $f(x)=\pm1$이 되는 경우밖에 없겠네? 다시 말해,

곡선 $y=f(x)$과 두 직선 $y=1$, $y=-1$이 만나는 교점의 개수의 총합이 3이라는 셈!

이때, 위의 그림에서 $y=f(x)$의 그래프를 대강 살펴봤잖아?

곡선 $y=f(x)$이랑 직선 $y=-1$이 만나는 점의 개수는 1이므로

곡선 $y=f(x)$이랑 직선 $y=1$이 만나는 점의 개수는 2이겠지?

삼차함수랑 직선이 서로 다른 두 점에서 만난다..?

아, 빼박. 접한다. 이 정도 감 정도는 현 시점에서는 모두 가지고 있을 것이라 믿을게..?

즉슨, 이 조건에서 얻은 정보는 곡선 $y=f(x)$이 직선 $y=1$과 접한다는 점!

STEP 4 조건들을 종합해봅시다

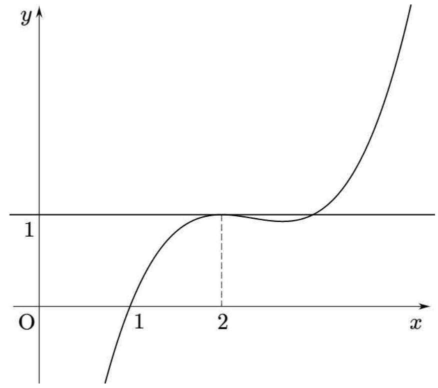
각 조건들에서 얻은 정보들을 정리하면 다음과 같아.

(가) 방정식 $f(x)=0$ 의 해는 오직 $x=1$ 뿐이다.

(나) 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지고, $-1 \le f(2) \le 1$, $f(2) \neq 0$

(다) 곡선 $y=f(x)$ 이 직선 $y=1$ 과 접한다.

이 상황들을 종합해서 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같겠지?



보통 다항함수의 식을 세울 때는 '접하는 직선'을 기준으로 세운다는 점을 바탕으로 $f(x)$ 의 식을 세우면 다음과 같아.

$$y=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-\alpha)+1 \ \ (\text{단, } \alpha > 2)$$

이때, 이 곡선이 점 $(1, 0)$을 지나야 하므로 이를 대입하면

$$\frac{1-\alpha}{2}+1=0$$

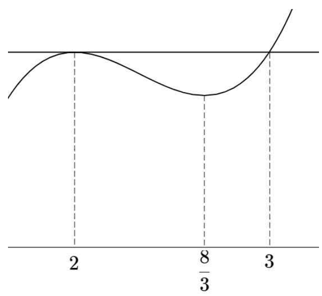
곧, $\alpha=3$ 임을 얻을 수 있어. 따라서 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$ 이므로

이를 이용해 $g(x)$ 의 극솟값을 구해보자.

$g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 에서 $f'(x)=0$ 인 두 지점 모두 $f(x)>0$ 이므로 $f'(x)$ 의 부호가 $(-)\to(+)$ 으로 변화하는 지점, 곧, $f(x)$ 가 극소일 때의 x 의 값을 구하면 돼.

이건 $f(x)$ 를 미분해서 구할 수도 있겠지만 우리 삼차함수 비율관계 알고 있잖아? 그걸 한 번 써보자.

극솟값은 $x=2$ 와 $x=3$ 을 $2:1$ 로 내분하는 지점, 곧, $x=\frac{8}{3}$ 에서 가지겠지?



따라서 $f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}\times\left(-\frac{1}{3}\right)+1=\frac{25}{27}$ 이니까 $\ln\left|g\left(\frac{8}{3}\right)\right|=\ln\frac{25}{27}$ 이겠지?

미적분 문제에서 다항함수 추론 문제가 나왔을 때는 그 포커싱이 다항함수 그 자체 뿐만 아니라, 미적분 스킬에도 집중되어 있어. 보통은 다음과 같이 단계화되는 경우가 많아.

[1단계] **주어진 조건들을 구하려는 함수에 대한 '정보'의 형태로 해석한다.**
[2단계] **각 '정보'들을 조합하여 원하는 함수를 추론한다.**

[수학2]에서는 다항함수 그 자체만을 다뤘기 때문에 이들에 대한 정보들이 유기적으로 이어져 있어.
하지만, 미적분 범위에서는 다항함수 뿐만 아니라 일반함수에 대해 더욱 초점을 맞추기 때문에 여기에 집중해서 조건들을 해석해야 해. 굳이 [수학2]와의 차이점을 말하라고 하면 [수학2]는 정보의 해석에 초점을 두고, 조건 사이의 관계에 조금 더 초점을 둔다면, [미적분]의 경우에는 각각의 조건 그 자체에 집중을 하는 경우가 많아.

물론 이것도 유형별로 구분하자면 복잡해지긴 하는데, 시험이 얼마 안 남은 우리의 입장에서는 일단 그렇구나 하고 받아들이는 것이 좋아.

SEOL:NAME, The Signature, [테크닉 총정리]

CHECK 01 적분을 계산하는 프로세스

치환적분이 되는지 먼저 확인한다
(치환적분은 일반적으로 보았을 때 바로 보이기 때문이다)

↓

치환적분이 안 되면, 부분적분을 시도한다

↓

그래도 안 되면, 문제에서 안 쓴 조건이 있는지 확인한다
(문제에서 주어진 조건을 통해 식이 변형되는 경우가 있기 때문)

CHECK 02 시험장 들어가기 전 외워야 할 적분 식들

① $\int \{f(x)+f'(x)\}e^{x} = f(x)e^{x}+C$

② $\int \{-f(x)+f'(x)\}e^{-x} = f(x)e^{-x}+C$

③ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$

④ $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$

⑤ $\int (x\cos x+\sin x)dx = x\sin x + C$, $\int (-x\sin x+\cos x)dx = x\cos x + C$

⑥ $\int \tan x dx = \ln|\cos x| + C$, $\int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

⑦ $\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}\{f(x)\}^2 + C$, $\int \{f(x)\}^n f'(x)dx = \frac{\{f(x)\}^{n+1}}{n+1}+C$

CHECK 03 함수 추론과 적분 스킬

㉠ 간단한 미분방정식 풀기

$$f(x)+f'(x)=g(x)$$

일 때, $f(x)$를 알고자 하면 양변에 e^x를 곱해서 적분함으로써 추론할 수 있다.

㉡ 치환적분 가능꼴로 만들기

[예시] $f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin \pi x+f(3)x+5x^2$

양변에 적당한 식을 곱해서 적분 가능한 꼴로 만들어줄 수 있다.

CHECK 04 조건 제시형 문제에서의 행동 강령

1. 문제에서 뽑은 최대한 뽑아낼 수 있을 때까지 뽑아내자.
2. 문제가 갑자기 풀리지 않으면 기본적인 조건들 중에서 쓸만한 게 있는지 확인하는 것도 중요하다.

CHECK 05 음함수/역함수 미분법 문제의 행동 강령

핵심은 주어진 상황을 식으로 전부 연계하는 것이다.

아무리 변수가 많더라도 일단 전부 다 써본 다음에 **최종 식에서 처음 식으로 다시 넘어오는 요령**이 중요하다.

어찌저찌 되었든 **결국 처음에 돌아와서는 미분하기 전의 원래 문자**만이 남는다.

거기에 대입해서 문제를 푸는 게 이러한 문제들의 특징이다.

CHECK 06 미적분 문제에서의 다항함수 추론

[1단계] 주어진 조건들을 구하려는 함수에 대한 '정보'의 형태로 해석한다.

[2단계] 각 '정보'들을 조합하여 원하는 함수를 추론한다.

P.S. 조건을 해석할 때 <u>내가 원하는 대로 해석하는 게 아니라</u> 문제가 원하는 대로 해석해야 한다!

PRACTICE
기출문제 ATTACK

001 [2021학년도 수능 가형 28번]

두 상수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 이라 하자. 함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$

002 [2013학년도 9월 가형 21번]

최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x) \le \frac{1}{3}$ 이다.

(나) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$

$f(1)$ 의 값은? [4점]

① -11 ② -9 ③ -7 ④ -5 ⑤ -3

003 [2013학년도 수능 가형 21번]

함수 $f(x) = kx^2 e^{-x}$ $(k > 0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

004 [2014학년도 수능 B형 30번]

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

005 [2017학년도 4월 가형 30번]

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$와 함수

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x) = 0$의 실근은 0과 2뿐이고 허근은 존재하지 않는다.

(나) $\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^3}{f(x)}$이 존재한다.

(다) 함수 $\left| \frac{g(x)}{x} \right|$는 $x = \frac{5}{4}$에서 연속이고 미분가능하지 않다.

함수 $g(x)$의 극솟값을 k라 할 때, $27k$의 값을 구하시오. [4점]

006 [2018학년도 6월 가형 21번]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x) = \ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x) = \ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x \to 1}(x-1)F'(x) = 3, \ \lim_{x \to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점]

① 57 ② 55 ③ 53 ④ 51 ⑤ 49

007 [2017학년도 7월 가형 30번]

상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수인 이차함수 $f(x)$가 있다. 함수 $g(x)$가

$$g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$$

일 때, 함수 $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $4\sqrt{e}$이다.
(다) 방정식 $g(x)=4\sqrt{e}$의 근은 모두 유리수이다.

$|f(-1)|$의 값을 구하시오. [4점]

008 [2019학년도 9월 가형 30번]

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이고 최솟값이 0 인 사차함수 $f(x)$ 와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$ 에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

(가) 방정식 $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4 이다.
(나) 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이다.
(다) 방정식 $h(x)=8$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6 이다.

$f'(5)$ 의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \to \infty} g(x)=0$) [4점]

009 [2019학년도 수능 가형 30번]

최고차항의 계수가 6π 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = \dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$ 이 $x=\alpha$ 에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$ 인 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$ 라 할 때, $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\alpha_1 = 0$이고 $g(\alpha_1) = \dfrac{2}{5}$이다.
>
> (나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)} = \dfrac{1}{g(\alpha_2)} + \dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = a\pi$라 할 때, a^2 의 값을 구하시오. (단, $0 < f(0) < \dfrac{\pi}{2}$) [4점]

010 [2021학년도 수능 가형 30번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이 때 극댓값이 모두 동일하다.

(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

011 [2022학년도 6월 미적분 30번]

$t > \frac{1}{2}\ln 2$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = \ln\left(1 + e^{2x} - e^{-2t}\right)$ 과 직선 $y = x + t$ 가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(\ln 2) = \frac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

012 [2023학년도 9월 미적분 30번]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0, \infty)$에서 $g(x) \geq 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f(-3)$이다.
(나) $x > -3$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2 = f'(x)$이다.

$\int_4^5 g(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

013 [2023학년도 수능 미적분 30번]

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin \pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
> (나) 열린구간 $(0,\ 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

014 [2022학년도 6월 미적분 29번]

$t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

015 [2021학년도 9월 가형 18번]

함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x > 0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$$

라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> ㄱ. $x \le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.
> ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$
> ㄷ. $g(a) \ge 1$인 실수 a가 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

016 [2020학년도 7월 가형 19번]

실수 전체의 집합에서 $f(x) > 0$ 이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \int_0^x \ln f(t)dt$$

일 때, 함수 $g(x)$ 와 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극값 2 를 갖는다.
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $g'(-x) = g'(x)$ 이다.

$\int_{-1}^{1} \frac{xf'(x)}{f(x)}dx$ 의 값은? [4점]

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

017 [2022학년도 7월 미적분 28번]

실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $f(x+2)=f(x)$

$\int_{-1}^{5} f(x)(x+\cos 2\pi x)dx=\frac{47}{2}$, $\int_{0}^{1} f(x)dx=2$일 때, $\int_{0}^{1} f'(x)\sin 2\pi x\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{5}{12}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

018 [2022학년도 9월 미적분 30번]

최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = 0$
>
> (나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0 \leq x < 1$일 때 $g(x) = f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1) = g(x)$이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_0^5 x\,g(x)dx = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

기출문제 ATTACK 정답 및 해설

빠른 정답

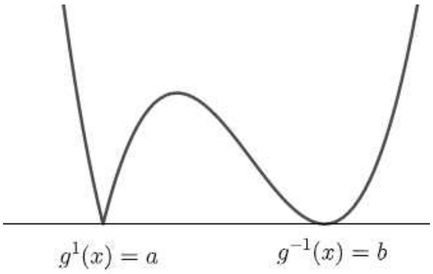
1	72	2	①	3	⑤	4	72	5	50
6	④	7	71	8	30	9	27	10	29
11	11	12	283	13	31	14	17	15	②
16	①	17	①	18	115				

해 설

001

[정답] 72

$g^{-1}(x)$의 치역이 모든 실수의 집합이므로 $|h(x)|$의 그래프는 다음과 같은 모양이다.



$(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $h(1)=0$이어야 한다.

$f(g^{-1}(1))=0$에서 $g^{-1}(1)=a$, $g(a)=1$이므로 $a=0$

따라서 $f(x)=x(x-b)^2$

$h'(x)=f'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x)$에서
$h'(3)=f'(1)=8$

$f'(x)=(x-b)^2+2x(x-b)$이므로

$(1-b)^2+2(1-b)-8=b^2-4b-5=0$에서

$a<b$이므로 $b=5$

$f(x)=x(x-5)^2$

$f(8)=72$

002

[정답] ①

조건 (나)에서 $x\to3$일 때,
(분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

$\lim_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=0$

$\therefore\ f(3)=g(3)$

또한, $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수의 관계이므로

$f(3)=g(3)=3\cdots$㉠

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}$

$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)-g(x)+g(3)}{(x-3)g(x)}$

$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\frac{1}{g(x)}-\frac{g(x)-g(3)}{x-3}\times\frac{1}{g(x)}\right\}$

$=f'(3)\times\frac{1}{g(3)}-g'(3)\times\frac{1}{g(3)}$

$=\frac{1}{3}\{f'(3)-g'(3)\}=\frac{8}{9}$

이때, $g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(3)}$ 이므로

$\frac{1}{3}\left\{f'(3)-\frac{1}{f'(3)}\right\}=\frac{8}{9}$

$3\{f'(3)\}^2-8f'(3)-3=0$

$\{3f'(3)+1\}\{f'(3)-3\}=0$

$\therefore\ f'(3)=-\frac{1}{3}$ 또는 $f'(3)=3$

그런데, $f(x)$의 삼차항의 계수는 양수이고 역함수가 존재해야 하므로

$f'(x) \geq 0$ 이다.

$\therefore\ f'(3) = 3 \cdots$ ㉡

㉠에 의하여

$f(x) - 3 = (x-3)(x^2 + ax + b)$

라 하고 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = x^2 + ax + b + (x-3)(2x+a) \cdots$ ㉢

㉡에 의하여

$f'(3) = 9 + 3a + b = 3$

$\therefore\ 3a + b = -6 \cdots$ ㉣

㉢의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f''(x) = 2x + a + (2x+a) + 2(x-3)$$
$$= 6x + 2a - 6$$

이때, 변곡점의 x좌표는

$6x + 2a - 6 = 0$ 에서

$$x = \frac{3-a}{3}$$

그런데, $f'(3) = 3$ 에서

$$g'(3) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{3}$$

이므로 조건 (가)에 의하여 $f(x)$의 변곡점의 x좌표는 3이 되어야 한다. 즉,

$$\frac{3-a}{3} = 3$$

$\therefore\ a = -6$

㉣에 대입하면 $b = 12$ 이므로

$$f(x) - 3 = (x-3)(x^2 + ax + b)$$
$$= (x-3)(x^2 - 6x + 12)$$

$\therefore\ f(1) = -2 \times 7 + 3 = -11$

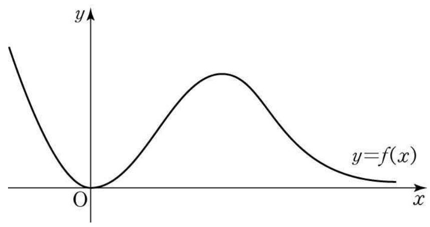
003

[정답] ⑤

$f(x) = kx^2e^{-x}\,(k > 0)$에서

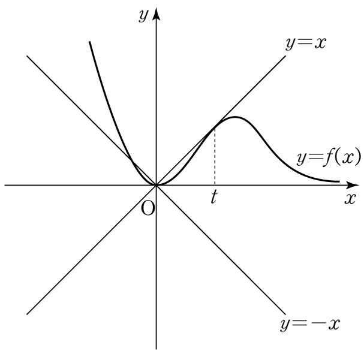
$f'(x) = 2kxe^{-x} - kx^2e^{-x} = kx(2-x)e^{-x}$

$f'(x) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$



x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{4k}{e^2}$	↘

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하므로 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$, $y = -x$와 만나는 교점을 찾는다.



이때, 미분가능하지 않은 점이 한 곳만 있으려면

$x > 0$에서 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$가 만나지 않거나 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면

$kt^2e^{-t} = t$ …… ㉠이고

$x = t$에서 접선의 기울기가 1이므로

$kt(2-t)e^{-t} = 1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2 - t = 1$ $\quad\therefore\ t = 1$

$\therefore\ k = e$

따라서 k의 최댓값은 e이다.

004

[정답] 72

$g(x)=f(x)e^{-x},\ \ g'(x)=f'(x)-f(x)e^{-x}$

$g''(x)=f''(x)-2f'(x)+f(x)e^{-x}$

$f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\neq 0)$로 놓으면

$g''(x)=ax^2+(b-4a)x+2a-2b+ce^{-x}$

조건 (가)에서 방정식 $g''(x)=0$의 두 근이
$x=1,\ x=4$를 두 근으로 갖는다.
근과 계수의 관계에서

$\dfrac{4a-b}{a}=5,\ \dfrac{2a-2b+c}{a}=4$이므로 $b=-a,\ c=0$

즉, $f(x)=ax^2-ax$이고 $g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$

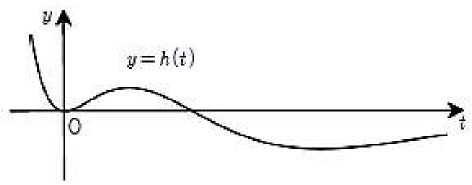
한편, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $T(t,\,g(t))$에서 그은 접선의 방정식은 $y-g(t)=g'(t)(x-t)$

이 접선이 점 $(0,\,k)$를 지나므로

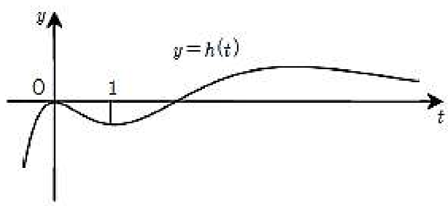
$k-g(t)=g'(t)(0-t)$에서 $k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$

$h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$로 놓으면 조건 (나)에 의하여 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $-1<k<0$이어야 한다.

$a<0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, 문제의 조건을 만족시키지 않는다.



$a>0$인 경우 함수 $y=h(t)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같고, $h(1)=-1$이어야 한다.



$h(1)=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$

$\therefore g(-2)\times g(4)=f(-2)e^2\times f(4)e^{-4}$
$\qquad\qquad\qquad\quad =72a^2e^{-2}=72e^2e^{-2}=72$

005

[정답] 50

(가)에서 $f(x)=x^m(x-2)^n$ (단, $m,\ n$은 자연수)

(나)에서

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^3}{x^m(x-2)^n}=\begin{cases}0 & (n=1,\,2)\\ \dfrac{1}{2^m} & (n=3)\\ \text{발산} & (n\geq 4)\end{cases}$$

$\therefore n$은 3 이하의 자연수

$f'(x)=x^{m-1}(x-2)^{n-1}\{(m+n)x-2m\}$이므로

$$g(x)=x-\frac{x^m(x-2)^n}{x^{m-1}(x-2)^{n-1}\{(m+n)x-2m\}}$$

ⅰ) $m\geq 2,\ n\geq 2$일 때

함수 $g(x)$는 $x\neq 0,\ x\neq 2,\ x\neq\dfrac{2m}{m+n}$인 모든 실수에서 정의된다.

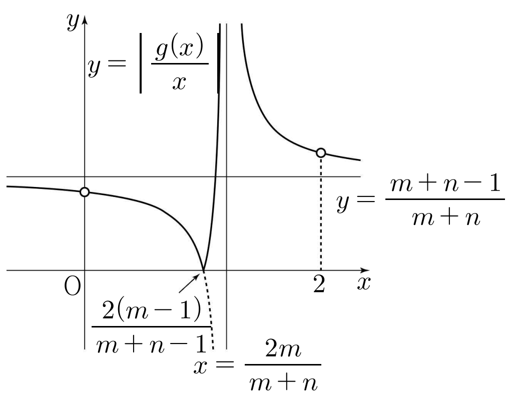
$$g(x)=\frac{x\{(m+n-1)x-2(m-1)\}}{(m+n)x-2m}$$

$$\frac{g(x)}{x}=\frac{(m+n-1)x-2(m-1)}{(m+n)x-2m}$$

$$=\frac{\dfrac{2n}{(m+n)^2}}{x-\dfrac{2m}{m+n}}+\frac{m+n-1}{m+n}$$

이고 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{2m}{m+n},\ y=\dfrac{m+n-1}{m+n}$



$\dfrac{g(x)}{x}=0$에서 $x=\dfrac{2(m-1)}{m+n-1}$

함수 $\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|$는 $x=\dfrac{2(m-1)}{m+n-1}$일 때 연속이고 미분가능하지 않다.

(다)에서

$\dfrac{2(m-1)}{m+n-1}=\dfrac{5}{4}$

$m=\dfrac{5n+3}{3}$

m은 자연수이고 $n\le 3$인 자연수이므로 $m=6$, $n=3$

ii) $m\ne 1$, $n=1$일 때

함수 $g(x)$는 $x\ne 0$, $x\ne \dfrac{2m}{m+1}$인 모든 실수에서 정의된다.

$g(x)=\dfrac{x\{mx-2(m-1)\}}{(m+1)x-2m}$

함수 $\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|$는 $x=\dfrac{2(m-1)}{m}$일 때 연속이고 미분가능하지 않다.

$\dfrac{2(m-1)}{m}=\dfrac{5}{4}$

∴ 자연수 m이 존재하지 않는다.

iii) $m=1$, $n\ne 1$일 때

함수 $g(x)$는 $x\ne 2$, $x\ne \dfrac{2}{n+1}$인 모든 실수에서 정의된다.

$g(x)=\dfrac{nx^2}{(n+1)x-2}$

함수 $\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|$는 $x=\dfrac{5}{4}$에서 미분가능하므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

iv) $m=n=1$일 때

$g(x)$는 $x\ne 1$인 모든 실수에서 정의된다.

$g(x)=\dfrac{x^2}{2x-2}$

함수 $\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|$는 $x=\dfrac{5}{4}$에서 미분가능하므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

i), ii), iii), iv)에 의하여

$m=6$, $n=3$

$\therefore g(x)=\dfrac{2x(4x-5)}{3(3x-4)}$

$g'(x)=\dfrac{8(3x^2-8x+5)}{3(3x-4)^2}$

$g'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\left(\dfrac{4}{3}\right)$	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	$\dfrac{2}{3}$	↘		↘	$\dfrac{50}{27}$	↗

함수 $g(x)$의 극솟값 k는 $\dfrac{50}{27}$

따라서 $27k=50$

006

[정답] ④

$F(x)=\ln|f(x)|$를 미분하면 $F'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)F'(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)f'(x)}{f(x)}=3$에서

$f(1)=0$이다.

$f(x)=(x-1)q(x)$라 하면

$f'(x)=q(x)+(x-1)q'(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\{Q(x)+(x-1)Q'(x)\}}{(x-1)Q(x)}=1\ne 3$

$f(x)=(x-1)^k h(x)$ ($k\ge 2$인 자연수)라 하면

$f'(x)=k(x-1)^{k-1}h(x)+(x-1)^k h'(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\{k(x-1)^{k-1}h(x)+(x-1)^k h'(x)\}}{(x-1)^k h(x)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{k(x-1)^k h(x)+(x-1)^{k+1}h'(x)}{(x-1)^k h(x)}$

$=k$

이므로 조건으로부터 $k=3$이다.

따라서 $f(x)=(x-1)^3(x-a)$의 꼴이 된다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F'(x)}{G'(x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)\times g(x)\sin x}{f(x)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}=\dfrac{1}{4}$ $\cdots$ ①

에서 $x\to 0$일 때

(분자) $\to 0$이므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

따라서 $f(0)g(0)=0$이다.

(i) $f(0)=a\neq 0$일 때 $g(0)=0$

$f(x)=(x-1)^3(x-a)$이고

$f'(x)=3(x-1)^2(x-a)+(x-1)^3$
$\quad\;\;=(x-1)^2(4x-3a-1)$

이고

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{(x-1)^2(4x-3a-1)}{(x-1)^3(x-a)}=\frac{4x-3a-1}{(x-1)(x-a)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4x-3a-1)g(x)\sin x}{(x-1)(x-a)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x-3a-1}{(x-1)(x-a)}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{xg(x)}{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}$$

$$=0\neq\frac{1}{4}$$

이 되어 모순이다. 따라서 $f(0)=0$

(ii) $f(0)=0$일 때

$f(x)=(x-1)^3x$이다.

x에 대해 미분하면

$f'(x)=3(x-1)^2x+(x-1)^3$이므로

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{3(x-1)^2x+(x-1)^3}{(x-1)^3x}=\dfrac{4x-1}{x(x-1)}$이다.

위의 식을 ①에 대입하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4x-1)g(x)\sin x}{x(x-1)\{g'(x)\sin x+g(x)\cos x\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x-1}{x-1}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{g(x)}{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}=\frac{1}{4}$$

에서 $g(0)=0$이다.

$g(x)=xk(x)$라 하면 $g'(x)=k(x)+xk'(x)$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x-1}{x-1}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{xk(x)}{\{k(x)+xk'(x)\}\sin x+xk(x)\cos x}$$

$$=\frac{1}{4}$$

에서 $k(0)=0$이다.

따라서 $g(x)=x^mp(x)$ ($m\geq 2$인 자연수)라 하면

$g'(x)=mx^{m-1}p(x)+x^mp'(x)$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x-1}{x-1}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{x^mp(x)}{\{mx^{m-1}p(x)+x^mp'(x)\}\sin x+x^mp(x)\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x-1}{x-1}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{x^{m-1}p(x)}{\{mx^{m-1}p(x)+x^mp'(x)\}\dfrac{\sin x}{x}+x^{m-1}p(x)\cos x}$$

$$=1\times 1\times\frac{1}{m+1}$$

$$=\frac{1}{m+1}$$

이므로 조건으로부터 $m=3$이다.

따라서 $g(x)=x^3$이다.

그러므로 $f(3)+g(3)=3\cdot 2^3+3^3=51$

007

[정답] 71

$f(x)=a(x-m)^2+n$이라 하자.

$f'(x)=2a(x-m)$이고 $f''(x)=2a$이다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=|f'(x)|$는 각각 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

함수 $g(x)=|f'(x)|e^{f(x)}$의 그래프도 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

(i) $x > m$ 인 경우

$a > 0$ 이면 함수 $y = f'(x)e^{f(x)}$ 는 실수 전체에서 증가하므로 함수 $g(x)$ 의 최댓값이 존재하지 않는다.
그러므로 조건 (나)에 의하여 $a < 0$ 이다.

$$g'(x) = -\left(f'(x)e^{f(x)}\right)'$$

$$g'(x) = -\left[f''(x) + \{f'(x)\}^2\right]e^{f(x)}$$

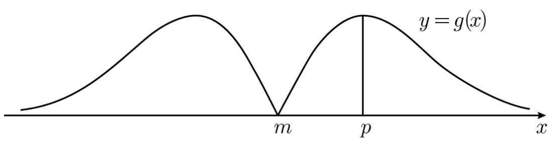
$$g'(x) = \left\{-4a^2(x-m)^2 - 2a\right\}e^{f(x)}$$

방정식 $g'(x) = 0$ 을 만족하는 x 는 한 개이고 그 값을 $p\ (p > m)$ 이라 하자. 함수 $g(x)$ 는 $x = p$ 에서 극댓값을 갖고, 그 값이 최댓값이다.

(ii) $x < m$ 인 경우

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $x = m$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $g(x)$ 는 $x = 2m - p$ 에서 극댓값을 갖고, 그 값이 최댓값이다.

(i), (ii)에 의하여 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(m) = 0$ 이고, 함수 $g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극솟값을 가지므로 $m = 2$ 이다.

함수 $g(x)$ 는 $x = p$ 에서 최댓값이 $4\sqrt{e}$ 이므로

$g(p) = |f'(p)|e^{f(p)} = 4\sqrt{e}$ 이다.

상수항을 포함한 모든 항의 계수가 유리수이므로

$$f'(p) = 2a(p-2) = -4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$f(p) = a(p-2)^2 + n = \frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

또한 함수 $g(x)$ 는 $x = p$ 에서 극댓값을 가지므로

$$g'(p) = 0 \text{에서 } 2a(p-2)^2 + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $n = 1$, $p = \dfrac{9}{4}$ 이므로 $a = -8$

$$f(x) = a(x-m)^2 + n = -8(x-2)^2 + 1$$

따라서 $|f(-1)| = 71$

008

[정답] 30

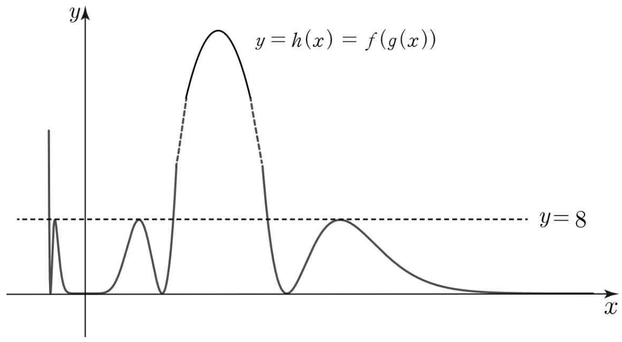
$f(x) = 0$의 근이 $x = 0$이라 가정하면

$f(g(x)) = 0$의 근은 $g(x) = 0$, $x = 0$이므로

$h(x) = 0$의 실근이 1개이다.

$f(x)$의 최솟값이 0이고 $h(x)$는 최고차항의 계수가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2(x-\alpha)^2$이고 $\alpha \le g(2)$이다.



$h(x) = 8$의 실근이 6개이므로 $f(x)$의 극댓값은 8

$f(x)$는 $x = \dfrac{\alpha}{2}$에서 극대이므로 $f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = 8$이고 $\alpha = 4$

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2(x-4)^2$이고

$f'(5) = 30$

009

[정답] 27

$g'(x) = \dfrac{-\cos(f(x)) \times f'(x)}{\{2 + \sin(f(x))\}^2}$ 이므로

$g'(x) = 0$ 에서

$\cos(f(x)) = 0$ 또는 $f'(x) = 0$

이때, $\cos(f(x)) = 0$ 에서

$f(x) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $f(x) = \pm\dfrac{3}{2}\pi$ 또는

$f(x) = \pm\dfrac{5}{2}\pi$ $\cdots$

그런데 조건 (가)에서

$\dfrac{1}{g(\alpha_1)}=\dfrac{1}{g(0)}=2+\sin(f(0))=\dfrac{5}{2}$ 이므로

$\sin(f(0))=\dfrac{1}{2}$

이때 $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $f(0)=\dfrac{\pi}{6}$ ⋯ ㉠

따라서 $\cos(f(\alpha_1))=\cos(f(0))\neq 0$ 이므로
$f'(0)=0$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x)=6\pi x^3+px^2+\dfrac{\pi}{6}$ (p는 상수)

로 놓으면 조건 (나)에서

$\dfrac{1}{g(\alpha_5)}-\dfrac{1}{g(\alpha_2)}=\sin(f(\alpha_5))-\sin(f(\alpha_2))=\dfrac{1}{2}$
⋯ ㉢

이때, $\cos(f(x))=0$ 이면

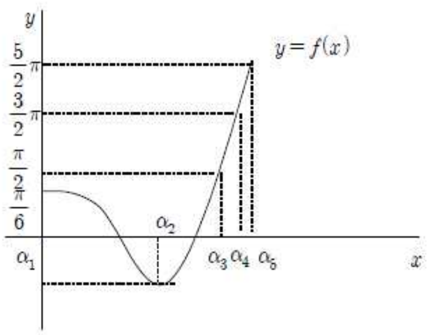
$\sin(f(x))=-1$ 또는 $\sin(f(x))=1$

이므로 ㉢을 만족시키기 위해서는

$f'(\alpha_2)=0$, $f'(\alpha_5)\neq 0$ 또는
$f'(\alpha_2)\neq 0$, $f'(\alpha_5)=0$

(ⅰ) $f'(\alpha_2)=0$, $f'(\alpha_5)\neq 0$ 인 경우

$x\geq 0$ 에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(\alpha_5)=\dfrac{5}{2}\pi$ 이므로

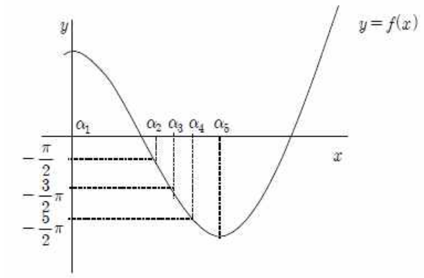
$\sin(f(\alpha_5))-\sin(f(\alpha_2))=1-\sin(f(\alpha_2))=\dfrac{1}{2}$

$\sin(f(\alpha_2))=\dfrac{1}{2}$ ⋯ ㉣

그런데, $-\dfrac{\pi}{2}<f(\alpha_2)<\dfrac{\pi}{6}$ 이므로 ㉣을 만족시키는 α_2는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $f'(\alpha_2)\neq 0$, $f'(\alpha_5)=0$ 인 경우

$x\geq 0$ 에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 $\sin(f(\alpha_2))=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$

이므로 $\sin(f(\alpha_5))=-\dfrac{1}{2}$ 이어야 한다.

따라서, $\cos(f(\alpha_5))\neq 0$ 이므로 $f'(\alpha_5)=0$

이고 위의 그림에서

$-\dfrac{7}{2}\pi<f(\alpha_5)<-\dfrac{5}{2}\pi$

이므로 $f(\alpha_5)=-3\pi+\dfrac{\pi}{6}$

즉, $f'(x)=18\pi x^2+2px=2x(9\pi x+p)=0$ 에서

$\alpha_5=-\dfrac{p}{9\pi}$ 이므로

$f(\alpha_5)=f\left(-\dfrac{p}{9\pi}\right)=6\pi\times\left(-\dfrac{p}{9\pi}\right)^3+p\left(-\dfrac{p}{9\pi}\right)^2+\dfrac{\pi}{6}$

$=-3\pi+\dfrac{\pi}{6}$

$\dfrac{-2p^3}{3^5\pi^2}+\dfrac{p^3}{3^4\pi^2}=-3\pi$

$p^3=-3^6\pi^3$

따라서 $p=-9\pi$ 이므로

$f(x)=6\pi x^3-9\pi x^2+\dfrac{\pi}{6}$

$f'(x)=18\pi x^2-18\pi x$

따라서

$f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{9}{2}\pi+9\pi=\dfrac{27}{2}\pi$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{9}{4}\pi+\dfrac{\pi}{6}=-3\pi+\dfrac{\pi}{6}$

$$\sin\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\sin\left(-3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\cos\left(-3\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$g'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-\cos\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\times f'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left\{2+\sin\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right\}^2}$$

$$=\frac{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{27}{2}\pi}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=3\sqrt{3}\pi$$

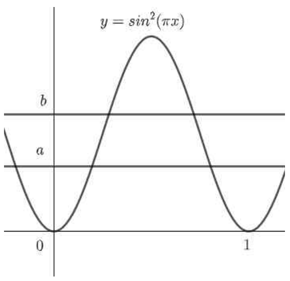
따라서

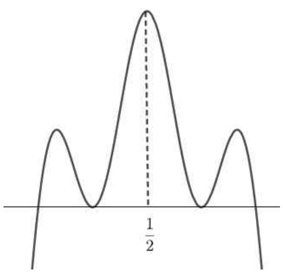
$$a^2=(3\sqrt{3})^2=27$$

010

[정답] 29

$f(x)$가 극댓값을 갖는 x의 값을 a, 극솟값을 갖는 x의 값을 b라 하자. (가)가 성립하려면
$0<a<b<1$이어야 하고





$g(x)$의 그래프는 위의 오른쪽 그림과 비슷한 모양이 된다. 조건 (가), (나)를 만족하려면

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}=f(a)=f(1)$이고

$y=\frac{1}{2}$와 $f(x)$는 서로 접해야 한다. 따라서

$$f(x)-\frac{1}{2}=(x-a)^2(x-1)$$

$g(x)$의 최솟값은 $[0,1]$에서 $f(x)$의 최솟값과 같다.

$f'(x)=(x-a)(3x-a-2)$이므로

$f(0)=-a^2+\frac{1}{2}=0$ 이거나 $f\left(\frac{a+2}{3}\right)=0$이다.

$f\left(\frac{a+2}{3}\right)=\frac{4(a-1)^3}{27}+\frac{1}{2}=0$에서는 $a=-\frac{1}{2}$이므로 조건에 맞지 않고

$f(0)=-a^2+\frac{1}{2}=0$에서 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$이면 조건에 맞는다.

따라서

$$f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1)+\frac{1}{2}$$

$f(2)=5-2\sqrt{2}$ 이므로 $a^2+b^2=29$

011

[정답] 11

곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 두 점을

$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha+t),\ \mathrm{Q}(\beta,\ \beta+t)\ (\alpha<\beta)$

로 놓으면

$$f(t)=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)$$

이때, α, β는 방정식

$$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$$

의 서로 다른 두 실근이므로

$$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^{x+t}$$

$$e^{2x}-e^t\times e^x+1-e^{-2t}=0$$

$e^x=k\ (k>0)$로 놓으면

$$k^2-e^tk+1-e^{-2t}=0$$

따라서 $k=\frac{e^t\pm\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$ 이므로

$$e^\alpha=\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2},$$

$$e^\beta=\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

즉,

$$\alpha=\ln\frac{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

$$\beta=\ln\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$$

이므로

$$\beta-\alpha=\ln\frac{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{e^t-\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}$$

$$=\ln\frac{\left(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}\right)^2}{4\left(1-e^{-2t}\right)}$$

$$=2\ln\left(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}\right)-\ln4-\ln\left(1-e^{-2t}\right)$$

따라서

$$g(t)=2\ln\left(e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}\right)-\ln4-\ln\left(1-e^{-2t}\right)$$

라 하면

$$g'(t)=2\times\frac{e^t+\dfrac{2e^{2t}-8e^{-2t}}{2\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}}{e^t+\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}-\frac{2e^{-2t}}{1-e^{-2t}}$$

이므로

$$g'(\ln2)=2\times\frac{2+\dfrac{8-2}{2}}{2+1}-\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

즉, $f(t)=\sqrt{2}\,g(t)$에서

$$f'(\ln2)=\sqrt{2}\,g'(\ln2)=\frac{8}{3}\sqrt{2}$$

이므로 $p=3,\ q=8$

따라서 $p+q=11$

012

[정답] 283

$x>0$일 때, $g(x)\geq0$이므로 $x=-3$일 때 $g(x+3)\geq0$이다.

따라서 조건 (나)에서 $x>-3$일 때 $f'(x)\geq0$이다.

또, 조건 (가)에서 $f(x)\geq f(-3)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극소이면서 최소이다.

조건 (나)에 $x=0$을 대입하면 $f'(0)=0$이므로

$$f'(x)=4x^2(x+3)=4x^3+12x^2$$

$f(x)=x^4+4x^3+C$ (단, C는 적분상수)

$$\therefore\int_4^5 g(x)dx=\int_1^2 g(x+3)dx$$

$$=\int_1^2\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx$$

$f(x)-f(0)=t$로 치환하면

$f(1)-f(0)=5,\ f(2)-f(0)=48$

$f'(x)dx=dt$ 이므로

$$\int_1^2\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx=\int_5^{48}\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_5^{48}$$

$$=-\frac{1}{48}+\frac{1}{5}=\frac{48-5}{240}=\frac{43}{240}$$

$\therefore p+q=240+43=283$

013

[정답] 31

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a>0$, b, c, d는 상수)
라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이므로

$$f(3)=27a+9b+3c+d=\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$$f'(3)=27a+6b+c=0\qquad\cdots\cdots ㉡$$

조건 (가)에서

$h(0)=g(f(0))=g(d)=e^{\sin\pi d}-1=0$

$e^{\sin\pi d}=1,\ \sin\pi d=0$

따라서, d는 정수이다. 또한,

$g'(x)=e^{\sin\pi x}\times\pi\cos\pi x$

$h'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$

이므로

$h'(0)=g'(f(0))\times f'(0)=g'(d)\times c$

$=e^{\sin\pi d}\times\pi\cos\pi d\times c=\pi\cos\pi d\times c=0$

그런데, $\cos\pi d\neq0$이므로 $c=0$

따라서, ㉠, ㉡에서

$$27a+9b+d=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots ㉢,\quad 9a+2b=0\ \cdots\cdots ㉣$$

이고 $a>0$이므로 $b<0$이고 ㉢$-$㉣에서

$3b+d=\dfrac{1}{2}$이므로 $d>0$

즉, d는 자연수이다.

따라서 $f'(0)=c=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값이 $f(0)=d$, $x=3$에서 극솟값이 $\dfrac{1}{2}$이다.

즉, $0<x<3$에서 $f(3)<f(x)<f(0)$이므로

$$\frac{1}{2}<f(x)<d$$

그런데 조건 (나)에 의하여 열린구간 $(0,\ 3)$에서 방정식

$$h(x)=g(f(x))=e^{\sin \pi f(x)}-1=1$$

즉, $e^{\sin \pi f(x)}=2$, $\sin \pi f(x)=\ln 2$가 서로 다른 실근의 개수가 7이고 함수 $y=\sin \pi t$의 주기는 2이므로

$$d=8$$

ⓒ, ⓔ에서

$$a=\frac{5}{9},\ b=-\frac{5}{2}$$

이므로

$$f(x)=\frac{5}{9}x^3-\frac{5}{2}x^2+8$$

따라서

$$f(2)=\frac{40}{9}-10+8=\frac{22}{9}$$

즉, $p=9$, $q=22$이므로

$$p+q=31$$

014

[정답] 17

$$f'(x)=\frac{2t\ln x}{x}-2x=\frac{2t\ln x-2x^2}{x}$$

이고 $f(x)$는 $x=k$에서 극대이므로

$$2t\ln k-2k^2=0$$

$$t\ln k=k^2$$

이때 실수 k의 값을 $g(t)$라 했으므로

$$t\ln g(t)=\{g(t)\}^2 \qquad \cdots\cdots \ ㉠$$

그런데 $g(\alpha)=e^2$이므로

㉠에 $t=\alpha$를 대입하면

$$\alpha\ln g(\alpha)=\{g(\alpha)\}^2$$

$$2\alpha=e^4,\ \alpha=\frac{e^4}{2}$$

또한, ㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\ln g(t)+t\times\frac{g'(t)}{g(t)}=2g(t)\times g'(t)$$

이 식에 $t=\alpha$를 대입하면

$$\ln g(\alpha)+\alpha\times\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}=2g(\alpha)\times g'(\alpha)$$

$$2+\frac{e^4}{2}\times\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}=2e^2\times g'(\alpha)$$

$$\frac{3}{2}e^2\times g'(\alpha)=2$$

$$g'(\alpha)=\frac{4}{3e^2}$$

$$\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{e^4}{2}\times\frac{16}{9e^4}=\frac{8}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=8$이므로

$$p+q=17$$

015

[정답] ②

ㄱ. $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$이므로 $x\le 0$일 때,

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt=\int_0^x 0\times f(1-t)dt=\int_0^x 0dt=0 \ \text{(참)}$$

ㄴ. $g\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)f(1-t)dt$에서 $1-t=s$라 하면

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\int_1^{\frac{1}{2}}f(1-s)f(s)(-ds)=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(s)f(1-s)ds=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)f(1-t)dt$$

이므로

$$g(1)=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)f(1-t)dt$$

$$= g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = 2g\left(\frac{1}{2}\right) \text{ (참)}$$

ㄷ. $x \le 0$일 때 $g(x) = 0$이고, $x \ge 1$일 때

$$g(x) = \int_0^x f(t)f(1-t)dt$$

$$= \int_0^1 f(t)f(1-t)dt + \int_1^x f(t)f(1-t)dt$$

$$= g(1) + 0 = g(1)$$

한편, $0 < x < 1$일 때

$g'(x) = f(x)f(1-x) > 0$

이므로 함수 $g(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 증가한다.

즉, $g(a) \le g(1)$이고 ㄴ에서 $g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right)$이므로

$g(a) \le 2g\left(\frac{1}{2}\right)$

이때 곡선 $y = f(x)f(1-x)$ 위의 점

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ \left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2\right)$에 대하여 선분 OA를 대각선으로 하고 각 변이 x축 또는 y축에 수직인 직사각형의 넓이를 S라 하면

$2g\left(\frac{1}{2}\right) \leqq 2S \leqq 2 \times \frac{1}{2} \times \left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2 \leqq (\ln 2)^{20} < 1$

따라서 $g(a) \ge 1$을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

ㄴ. $f(t)f(1-t)$는 $t = \frac{1}{2}$에 대한 선대칭함수이다.

따라서

$g(x) = \int_0^x f(t)f(1-t)dt$는 $\left(\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$에 대한 점대칭함수이다.

$\therefore\ g(1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right)$ (참)

016

[정답] ①

$g(x) = \int_0^x \ln f(t)dt$에서

$g(0) = 0,\ g'(x) = \ln f(x),\ g''(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

조건 (가)에 의하여 $g(1) = 2,\ g'(1) = 0$

조건 (나)에 의하여 $g'(-1) = g'(1) = 0$

$$\int_{-1}^{1} \frac{xf'(x)}{f(x)}dx = \int_{-1}^{1} xg''(x)dx$$

$$= \Big[xg'(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} g'(x)dx$$

$$= g'(1) + g'(-1) - 2\int_0^1 g'(x)dx$$

$$= 2g'(1) - 2\{g(1) - g(0)\}$$

$$= 2 \times 0 - 2(2-0) = -4$$

017

[정답] ①

$$\int_{-1}^{5} f(x)(x + \cos 2\pi x)dx$$

$$= \int_{-1}^{5} xf(x)dx + \int_{-1}^{5} f(x)\cos 2\pi x\,dx \quad \cdots \text{㉠}$$

조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0,\ \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx$$

$$\int_{-1}^{5} xf(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} xf(x)dx + \int_1^3 xf(x)dx + \int_3^5 xf(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} xf(x)dx + \int_{-1}^{1} (x+2)f(x+2)dx + \int_{-1}^{1} (x+4)f(x+4)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} xf(x)dx + \int_{-1}^{1} (x+2)f(x)dx + \int_{-1}^{1} (x+4)f(x)dx$$

$$= 3\int_{-1}^{1} xf(x)dx + 6\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

$$= 12\int_{0}^{1} f(x)dx = 24 \quad \cdots \text{ ㉡}$$

조건 (가), (나)에 의하여 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)\cos 2\pi(-x) = f(x)\cos 2\pi x$

$f(x+2)\cos 2\pi(x+2) = f(x)\cos 2\pi x$

$$\int_{-1}^{5} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\cos 2\pi x\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx + \int_{-1}^{1} f(x+2)\cos 2\pi(x+2)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x+4)\cos 2\pi(x+4)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$= 3\int_{-1}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$= 6\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx = \frac{1}{6}\left(\frac{47}{2} - 24\right) = -\frac{1}{12}$$

따라서

$$\int_{0}^{1} f'(x)\sin 2\pi x\,dx$$

$$= \Big[f(x)\sin 2\pi x\Big]_{0}^{1} - 2\pi\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx$$

$$= -2\pi\int_{0}^{1} f(x)\cos 2\pi x\,dx = \frac{\pi}{6}$$

018

[정답] 115

조건 (가)에서 $x \to 0$일 때, (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\pi \times f(x)) = \sin(\pi \times f(0)) = 0$에서

$f(0) = n$ (n은 정수)이다.

한편, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 9이므로

$f(x) = 9x^3 + ax^2 + bx + n$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

이 때, $h(x) = \sin(\pi \times f(x))$라 하면 $h(0) = 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0)\text{이다.}$$

즉, $h'(0) = 0$이다.

이 때, $h'(x) = \pi f'(x) \times \cos(\pi \times f(x))$이므로

$h'(0) = \pi \times f'(0) \times \cos(n\pi) = 0$에서

$f'(0) = 0$

$f'(x) = 27x^2 + 2ax + b$에서

$f'(0) = b = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1+} g(x)$이어야 한다.

이때, 함수 $g(x)$는 $0 \le x < 1$일 때 $g(x) = f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1) = g(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to 1+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0+} g(x)$이다.

$\lim\limits_{x\to 1-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 9 + a + n$,

$\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = n$이므로

$9 + a + n = n$

$a = -9 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$f'(x) = 27x^2 - 18x = 9x(3x-2)$이므로

$f'(x) = 0$에서 $x = 0$에서 극대이고 $x = \frac{2}{3}$에서 극소이다.

조건 (나)에 의해 $f(0) \times f\left(\frac{2}{3}\right) = 5$이므로

$$n \times \left(n - \frac{4}{3}\right) = 5$$

$(3n+5)(n-3)=0$

n이 정수이므로 $n=3$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠~㉢에 의해 $f(x)=9x^3-9x^2+3$

따라서

$$\int_0^5 xg(x)dx$$

$$=\int_0^1 xg(x)\,dx+\int_1^2 xg(x)dx+\cdots+\int_4^5 xg(x)dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 (x+1)g(x+1)dx$$

$$+\int_0^1 (x+2)g(x+2)dx+\int_0^1 (x+3)g(x+3)dx$$

$$+\int_0^1 (x+4)g(x+4)dx$$

$$=\int_0^1 xf(x)dx+\int_0^1 (x+1)f(x+1)dx$$

$$+\int_0^1 (x+2)f(x+2)dx+\int_0^1 (x+3)f(x+3)dx$$

$$+\int_0^1 (x+4)f(x+4)dx$$

$$=5\int_0^1 xf(x)dx+10\int_0^1 f(x)dx$$

$$=5\int_0^1 (9x^4-9x^3+3x)\,dx+10\int_0^1 (9x^3-9x^2+3)\,dx$$

$$=5\left[\frac{9}{5}x^5-\frac{9}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+10\left[\frac{9}{4}x^4-3x^3+3x\right]_0^1$$

$$=\frac{21}{4}+\frac{45}{2}=\frac{111}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=111$이므로 $p+q=4+111=115$