제 2 교시

2024학년도 수능대비 SUM 모의고사 문제지

# 수학 영역

**짝수형**

| 성명 | |
|---|---|

| 수험 번호 | | | | | — | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

- ○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- ○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

**국가의 운명은 오직 청년 교육에 달려 있다**

- ○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- ○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- ○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- ○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.



※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마시오.

서울권 수학교육과 연합동아리 SUM

## 5지선다형

1. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt{27}$ 의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{27} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2}$

2. 함수 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(0)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

sol1) 정석

$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(3+h)^3 - 6(3+h)^2 + 4 - 4}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2(27 + 27h + 9h^2 + h^3) - 6(9 + 6h + h^2)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^3 + 12h^2 + 18h}{h} = \lim_{h \to 0} (2h^2 + 12h + 18) = 18$

sol2) 미분계수

$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(0)}{h}$ → 분모가 0으로...? 분자도 0으로 가나?

$f(0) = 4$, $f(3) = 2 \cdot 27 - 6 \cdot 9 + 4 = 54 - 54 + 4 = 4$

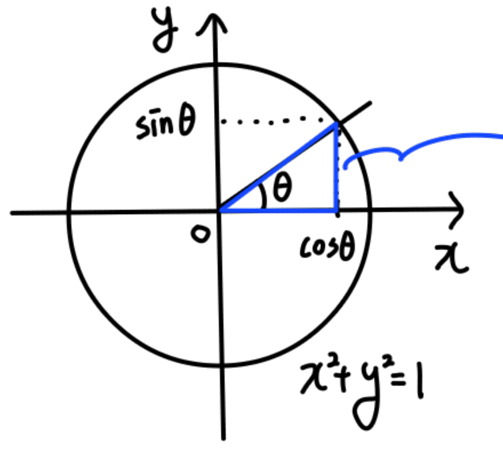
$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3)$

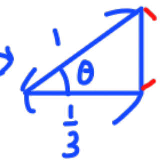
$f'(x) = 6x^2 - 12x$ $f'(3) = 6 \cdot 9 - 12 \cdot 3 = 18$

3. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 인 $\theta$에 대하여 $\sin\left(\frac{5}{2}\pi + \theta\right) = \frac{1}{3}$ 일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-2\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

$\sin\left(\frac{5}{2}\pi + \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta = \frac{1}{3}$

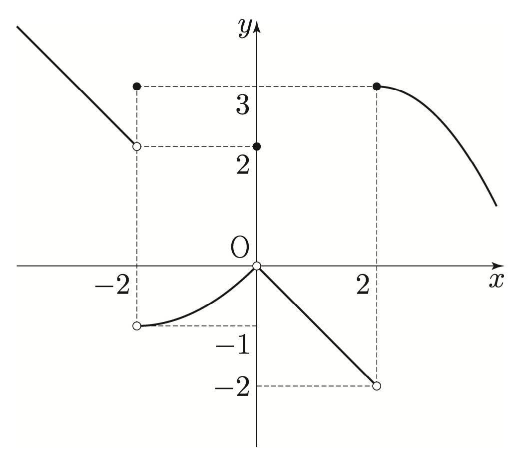



$\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.




$\lim_{x \to -2-} f(x)f(x+4) + f(0)$ 의 값은? [3점]

① $-2$ ② $-1$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\lim_{x \to -2-} f(x)f(x+4) = \lim_{x \to -2-} f(x) \cdot \lim_{x \to -2-} f(x+4)$

$= \lim_{x \to -2-} f(x) \cdot \lim_{x \to 2-} f(x) = 2 \cdot (-2) = -4$

$f(0) = 2$

$\lim_{x \to -2-} f(x) \cdot f(x+4) + f(0) = -4 + 2 = -2$

5. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3$, $a_5$, $a_4$가 이 순서대로 공차가 $-9$인 등차수열을 이룰 때, $a_1$의 값은? [3점]

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

$2a_5 = a_3 + a_4$

$2r^2 a_3 = a_3 + r a_3$

양변 $a_3$으로 나누기

if $a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = a_4 = a_5 = 0$

$\Rightarrow$ 공차가 $-9$인 등차수열 아님 $\Rightarrow$ 모순! $(a_3 \neq 0)$

$2r^2 = 1 + r$ $2r^2 - r - 1 = 0$ $(2r+1)(r-1) = 0$ $r = 1$ or $-\frac{1}{2}$

if $r = 1$

$a_3 = a_4 = a_5 \Rightarrow$ 공차가 $-9$인 등차수열 아님 $\Rightarrow$ 모순! $(r = -\frac{1}{2})$

$4a_5, a_5, -2a_5$

$-3a_5 = -9$ $a_5 = 3$ $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-5} \cdot 3$ $a_1 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$

$= 3 \cdot 16$

$= 48$

6. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5} a_k^2 = 90, \quad \sum_{k=1}^{5} (a_k + k)^2 = 225$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5} k a_k$의 값은? [3점]

① 20 ② 30 ③ 40 ④ 50 ⑤ 60

$$\sum_{k=1}^{5} (a_k + k)^2 = \sum_{k=1}^{5} (a_k^2 + 2k a_k + k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{5} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{5} k a_k + \sum_{k=1}^{5} k^2$$

$$= 90 + 2\sum_{k=1}^{5} k a_k + \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} = 225$$

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{5} k a_k = 225 - 90 - 55$$

$$= 80$$

$$\sum_{k=1}^{5} k a_k = 40$$

7. 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$에 접하고 기울기가 2인 두 접선 사이의 거리는? [3점]

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{5}$

$y' = 3x^2 - 6x + 2$

접선의 기울기가 2인 점

$3x^2 - 6x + 2 = 2$

$3x(x-2) = 0$ $x = 0$ $(0, 2)$ or $x = 2$ $(2, 2)$

$l_1 : y = 2x + 2$ / $l_2 : y = 2(x-2) + 2$

위의 점 $(0, 2)$ $= 2x - 2$

$\Rightarrow 2x - y - 2 = 0$

$$\frac{|2 \cdot 0 - 2 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

답지가 잘못 되어 있어요...

④이 맞습니다~!

8. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$\int_{-x}^{x}(2t+1)f(t)\,dt=0$$

이다. $f(1)=2$일 때, $f(3)$의 값은? [3점]

① 63 ② 72 ③ 81 ④ 90 ⑤ 99

$(2x+1)f(x)$ 가 '기함수' 이다

↳ $f(x)$의 인수 中 $(x-\frac{1}{2})$ 존재!

$\Rightarrow f(x)=(x-\frac{1}{2})g(x)$

(단, $g(x)$는 최고차항이 1인 삼차함수)

$(2x+1)f(x)=2(x^2-\frac{1}{4})g(x)$

우함수 → 기함수 $\Rightarrow g(x)=x^3-ax$

$f(x)=(x-\frac{1}{2})x(x^2-a)$ $f(1)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(1-a)=2$ $a=-3$

$f(3)=\frac{5}{2}\cdot3\cdot(9+3)=90$

9. 상수 $k$에 대하여 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-7x^2+12x+k$는 $x=a$, $x=b$, $x=c$ $(a<b<c)$에서 극값을 가진다.

$$f(a)\times f(c)<0,\quad |f(a)|=|f(b)+f(c)|$$

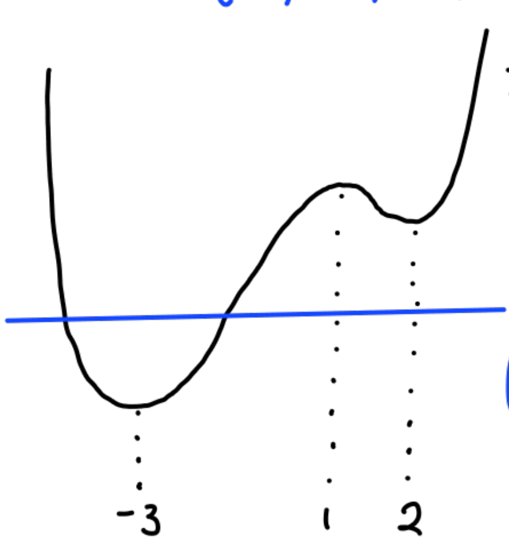
일 때, $k$의 값은? (단, $a$, $b$, $c$는 상수이다.) [4점]

① $\frac{46}{3}$ ② $\frac{47}{3}$ ③ 16 ④ $\frac{49}{3}$ ⑤ $\frac{50}{3}$

$f'(x)=2x^3-14x+12$

$=2(x-1)(x-2)(x+3)$ $a=-3,\ b=1,\ a=2$

$f(x)$의 개형




$x$축의 위치

($f(a)\times f(c)<0$ 이므로)

$|f(a)|=|f(b)+f(c)|$ $-f(-3)=f(1)+f(2)$

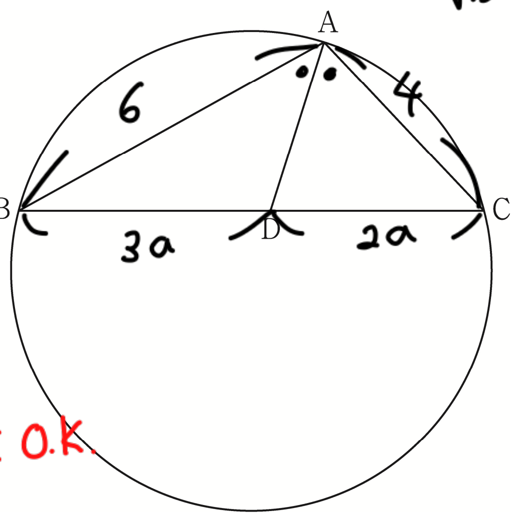
$-\frac{81}{2}+63+36-k=\frac{1}{2}-7+12+k+8-28+24+k$

$3k=49$ $k=\frac{49}{3}$

10. 넓이가 $\frac{256}{15}\pi$인 원 위에 $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=4$인 세 점 A, B, C가 있다. ∠A의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는? (단, $\overline{BC}>\overline{AB}$) [4점]

① $\frac{9\sqrt{15}}{5}$ ② $2\sqrt{15}$ ③ $\frac{11\sqrt{15}}{5}$ ④ $\frac{12\sqrt{15}}{5}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{15}}{5}$

$R=\frac{16}{\sqrt{15}}$




B로 풀어도 O.K

$\cos C=\frac{16+25a^2-36}{2\cdot4\cdot5a}=\frac{25a^2-20}{5\cdot8a}=\frac{5a^2-4}{8a}$

$\sin C=\frac{6}{2\cdot\frac{16}{\sqrt{15}}}=\frac{3\sqrt{15}}{16}$

$1-\sin^2C=\cos^2C=1-\frac{135}{16^2}=\frac{121}{256}$

$\cos C=\frac{11}{16}=\frac{5a^2-4}{8a}$

$11a=10a^2-8$

$10a^2-11a-8=0$

$(5a-8)(2a+1)$ $a=\frac{8}{5}$

$\triangle ABD=\frac{3}{5}\times\triangle ABC=\frac{3}{5}\cdot4\times5a\times\sin C\times\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{5}\times4\times8\times\frac{3\sqrt{15}}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{9\sqrt{15}}{5}$

**11.** 함수 $f(x)=x^2-4x+a$와 2 이상의 자연수 $n$에 대하여 $f\left(\frac{n}{10}\right)$의 $n$제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 하자. $\sum_{n=2}^{100} g(n)=100$일 때, $f(8)$의 값은? (단, $a$는 상수이다.) [4점]

① 30 ② 27 ③ 24 ④ 21 ⑤ 18

$n=2k+1$ (단, $k$는 자연수)

$g(n)=1$

$n=2k$ (단, $k$는 자연수)

$$g(n)=\begin{cases} 2 & \left(f\left(\frac{n}{10}\right)>0\right) \\ 1 & \left(f\left(\frac{n}{10}\right)=0\right) \\ 0 & \left(f\left(\frac{n}{10}\right)<0\right) \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{100} g(n)=\sum_{n=1}^{49} g(2n+1)+\sum_{n=1}^{50} g(2n)$$

$$=49+\sum_{n=1}^{50} g(2n)=100$$

$$\sum_{n=1}^{50} g(2n)=51$$

$f\left(\frac{n}{10}\right)>0$을 만족하는 $2n$이 25개

$f\left(\frac{n}{10}\right)=0$을 만족하는 $2n$이 1개

$f(5)=0$

$f(5)=25-20+a=a+5=0$

$a=-5$

$f(8)=64-32-5=27$

**12.** 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x\neq a$, $x\neq b\,(a\neq b)$인 임의의 실수 $x$에 대하여
> $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=3x^2-12$이다.
>
> (나) 함수 $f(x)$는 극댓값 22를 갖는다.

$f(2)+f(3)$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.) [4점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

(가) $f'(x)=3x^2-12$ (단, $x\neq a, x\neq b$)

$a$와 $b$ 中 더 작은 수를 $\alpha$라 하자

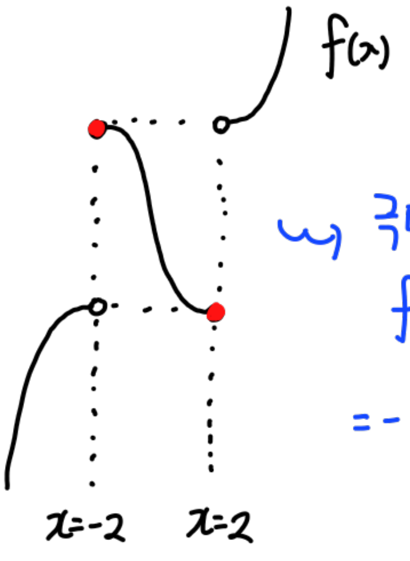
$$f(x)=\begin{cases} x^3-12x+C_1 & (x<\alpha) \\ x^3-12x+C_2 & (\alpha<x<\beta) \\ x^3-12x+C_3 & (x>\beta) \end{cases}$$

$x^3-12x$의 graph를 $y$축 평행이동 시킴

$x^3-12x$는 $x<-2$, $x>2$ 에서 증가

$-2<x<2$ 에서 감소

역함수를 가지기 위해서는 $\alpha=-2$, $\beta=2$




극대를 가지기 위해서는

$f(-2)=\lim_{x\to -2+} f(x)=22$

$=-8+24+C_2$ $C_2=6$

역함수를 가지기 위해서는

$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)$ : $\lim_{x\to -2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)$

$=-8+24+C_1$ : $=8-24+6$ : $=22$ $=8-24+C_3$

$=C_1+16$ $=-10$ $=C_3-16$

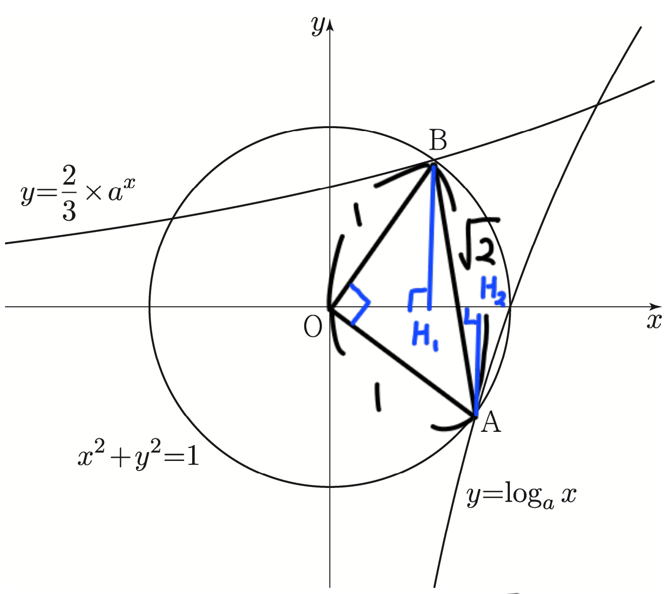
$C_1=-26$ $C_3=38$

$f(-2)\neq f(2)=\lim_{x\to 2-} f(x)=-10$ $f(3)=27-36+38=29$

$f(2)+f(3)=-10+29=19$

**13.** 실수 $a\,(a>1)$에 대하여 원 $x^2+y^2=1$이 곡선 $y=\log_a x$와 제4사분면에서 만나는 점을 A, 곡선 $y=\frac{2}{3}\times a^x$과 제1사분면에서 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$일 때, $a^{\sqrt{3}}$의 값은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$




$\angle BOH_1=\theta$라 하면 $\angle AOH_2=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\angle OAH_2=\theta$

$\angle BOH_1=\angle OAH_2=\frac{\pi}{2}$, $\overline{OB}=\overline{AO}$, $\angle BOH_1=\angle OAH_2$

$\Rightarrow \triangle BOH_1\equiv\triangle OAH_2$

$\overline{BH_1}=\overline{OH_2}$ / $\overline{OH_1}=\overline{AH_2}$

$B(k,\frac{2}{3}\times a^k)$라 하면 $(k>0)$

$\overline{BH_1}=\frac{2}{3}\times a^k=\overline{OH_2}=$(A의 x좌표)

$\overline{OH_1}=k=\overline{AH_2}=|$(A의 y좌표)$|$

$A(\frac{2}{3}\times a^k,-k)$

$-k=\log_a\frac{2}{3}\times a^k=k+\log_a\frac{2}{3}$

$-2k=\log_a\frac{2}{3}$ $a^{-2k}=\frac{2}{3}$ $a^k=\sqrt{\frac{3}{2}}$

$B(k,\sqrt{\frac{2}{3}})$ $\overline{OB}=1=\sqrt{k^2+\frac{2}{3}}$ $k^2=\frac{1}{3}$

$k=\sqrt{\frac{1}{3}}$

$a^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ $a^{\frac{3}{\sqrt{3}}}=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3$ $a^{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$

**14.** 최고차항의 계수가 $-1$이고 $f'(1)=f'(3)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 두 실수 $p$, $q$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$f'(x)=-3(x-1)(x-3)=-3x^2+12x-9$

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le 1)\\ |f(x-p)|+q & (x>1)\end{cases}$$

$f(x)=-x^3+6x^2-9x+k$

$f(1)=|f(1-p)|+q$

가 다음 조건을 만족시킨다.

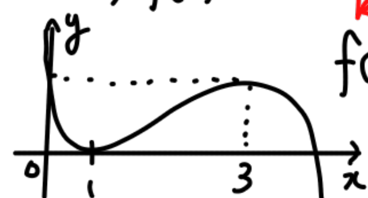
$|p|\le 2$ 일 때, $|f(1-p)|>0 \Rightarrow f(1)-f(1-p)=q$

| |
|---|
| (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3보다 작다. |
| (나) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. |
| (다) $\lvert p\rvert\le 2$, $\lvert q\rvert\le 2$ |

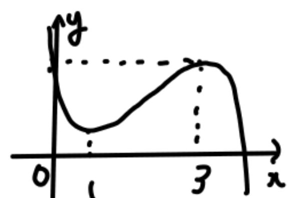
$p^2+q^2$의 값이 최대일 때, $g(6)$의 값은? [4점]

① 106 ② 108 ③ 110 ④ 112 ⑤ 114

case1) $f(1)=0$ $k-4=0$ $k=4$

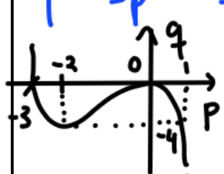



case2) $f(1)>0$ $k-4>0$ $k>4$




$-1+6-9+k+(1-p)^3-6(1-p)^2+9(1-p)-k=q$

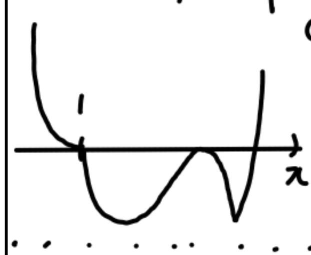
$-p^3-3p^2=q$



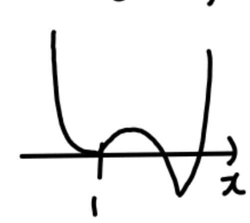

$-1\le p\le\sqrt{3}-1$
$-2\le q\le 0$

If $p=0$ 이면, $q=0$
이 때, (4) 성립 X

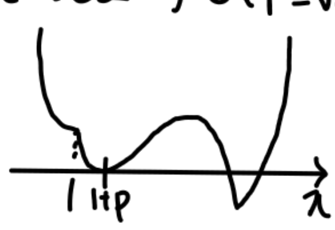
case 1-1) $0<p\le\sqrt{3}-1$
이 때만 성립
$p=1$, $q=-4$
(다) 성립 X




case 1-2) $-1\le p<0$
언제나 성립




case2-1) $0<p\le\sqrt{3}-1$
이 때만 성립




$|f(1)|+q=0$ $q=4-k$

$0<p\le\sqrt{3}-1$ $p^2+q^2$의 최댓값

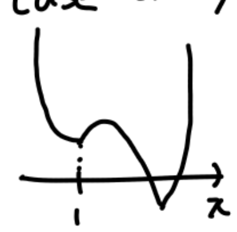
$(\sqrt{3}-1)^2+(-2)^2=3-2\sqrt{3}+1+4=8-2\sqrt{3}$

$-2\le -p^3-3p^2\le 2$

$-1\le p<0$ $p^2+q^2$의 최댓값

$(-1)^2+(-2)^2=5$

case 2-2) $-1\le p<0$
언제나 성립 X




$5>8-2\sqrt{3}\Rightarrow p^2+q^2$이 최대일 때 $p=-1$, $q=-2$ (case 1-2)

$g(6)=|f(6-(-1))|-2=|f(7)|-2$

$=|-7^3+6\cdot 7^2-9\cdot 7+4|-2=108-2=106$

$\therefore 106$

15. $0<x\le\pi$일 때, 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=\sin x$가 만나는 두 점의 $x$좌표를 $x_1$, $x_2$라 하자. $x_1<x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

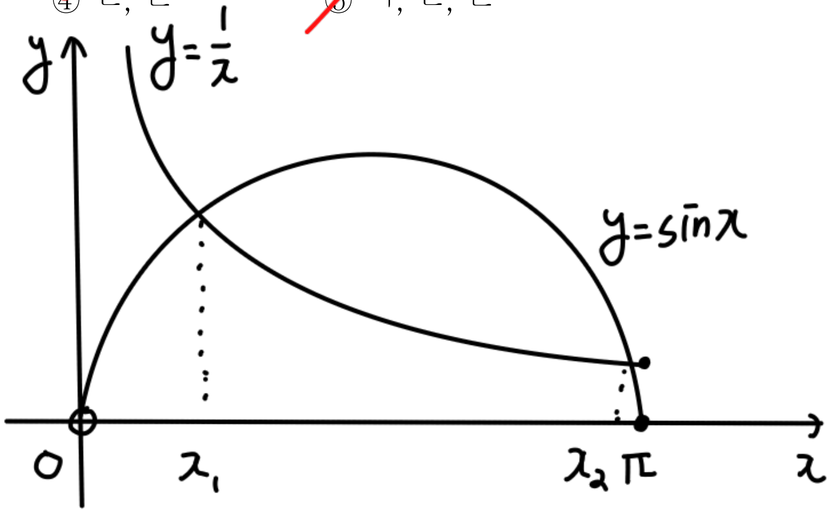
<보 기>

ㄱ. $\sin x_2>\frac{\sqrt{3}}{2}$

ㄴ. $\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{x_1x_2}$

ㄷ. $x_1x_2>\frac{\pi}{2}$

① ~~ㄱ~~　② ~~ㄴ~~　③ ~~ㄷ~~　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ~~ㄱ, ㄴ, ㄷ~~




ㄱ. $\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{3}{2\pi}$ 이므로

$x=\frac{2}{3}\pi$에서 '$y=\sin x$'가 더 큼!

즉, $x_2>\frac{2}{3}\pi$ 이므로

$\sin x_2<\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다! X

ㄴ. $\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}$　$\sin x_2=\frac{1}{x_2}$, $\sin x_1=\frac{1}{x_1}$

$=\frac{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{\frac{x_1-x_2}{x_2x_1}}{x_2-x_1}=-\frac{1}{x_1x_2}$ ㄴ

ㄷ. $x_1x_2=-\frac{x_2-x_1}{\sin x_2-\sin x_1}$ (by ㄴ)

$\frac{\sin x_2-\sin x_1}{x_2-x_1}>\frac{\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}}{\pi-\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi}$

$-\frac{x_2-x_1}{\sin x_2-\sin x_1}>\frac{\pi}{2}$ ㄷ

$=x_1x_2$

## 단답형

16. 부등식 $2\log_4(x-3)\le 3$을 만족시키는 정수 $x$의 개수를 구하시오. [3점]

$x>3$ (by 진수조건)

$\log_2(x-3)\le\log_2 8$

$x-3\le 8$

$3<x\le 11$

$\therefore$ 8개

17. 함수

$$f(x)=\begin{cases}2x^2-5x+2 & (x<a)\\ -x+8 & (x\ge a)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 $a$의 값의 합을 구하시오. [3점]

$2a^2-5a+2=-a+8$

$2a^2-4a-6=0$

sol1) 직접 $a$ 구하기

$a^2-2a-3=0$

$(a-3)(a+1)=0$

$a=-1$ or $a=3$

$-1+3=2$

$\therefore 2$

sol2) 근과 계수와의 관계

$-\frac{-4}{2}=2$

$\therefore 2$

**18.** 공차가 서로 다른 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 자연수 $k$에 대하여 $a_k = b_k$이다.

$$|a_p - b_p| = |a_q - b_q|$$

를 만족시키는 두 자연수 $p$, $q\,(p<q)$의 모든 순서쌍 $(p, q)$의 개수가 4일 때, $k$의 값을 구하시오. [3점]

$a_n - b_n = C_n$ 이라 하자!

등차수열의 합 또는 차 역시 등차수열이다

$C_n = d(n-k)$

$|C_n| = |d(n-k)| = |d|\cdot|n-k|$

$k$를 기준으로 떨어진 거리가 같으면 절댓값이 같다

$(k-1, k+1) / (k-2, k+2) / (k-3, k+3) / (k-4, k+4)$

$(k-5, k+5)$는 안 됨!

$k=5$

$\therefore 5$

**19.** 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면

$$x_1(t) = t^3 - 2t^2 + 2, \quad x_2(t) = t^2 - 3t$$

이다. 선분 PQ를 $1:2$로 내분하는 점 R의 속도가 11인 순간 점 P의 위치를 구하시오. [3점]

점 R의 위치를 $x_3(t)$라 하자

$x_3(t) = \dfrac{2x_1(t) + x_2(t)}{2+1} = \dfrac{2t^3 - 4t^2 + 4 + t^2 - 3t}{3}$

$= \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + \frac{4}{3}$

$\frac{d}{dt}x_3(t) = 2t^2 - 2t - 1 = 11$

$2t^2 - 2t - 12 = 0$

$2(t-3)(t+2) = 0$

$t = -2$ or $t = 3$

불가능

$x_1(t) = 27 - 18 + 2 = 11$ $\quad\therefore 11$

**20.** 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_0^1 xf(t)\,dt + \int_x^{x+1} f(t)\,dt$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\int_0^{10} f(t)\,dt = 80$
>
> (나) 모든 자연수 $n$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} g(k) = 2n^2$이다.

$\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$g(x) = x\int_0^1 f(t)dt + \int_x^{x+1} f(t)dt$

$\sum_{k=1}^{n} g(k) - \sum_{k=1}^{n-1} g(k) = g(n) = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 4n-2$

$\sum_{k=1}^{9} g(k) = \sum_{k=1}^{9}\left\{k\int_0^1 f(t)dt + \int_k^{k+1} f(t)dt\right\}$

$= \int_0^1 f(t)dt \cdot \sum_{k=1}^{9} k + \sum_{k=1}^{9}\int_k^{k+1} f(t)dt$

$= \frac{9\cdot 10}{2}\cdot\int_0^1 f(t)dt + \int_1^{10} f(t)dt$

$= 45\int_0^1 f(t)dt + \int_1^{10} f(t)dt$

$= 44\int_0^1 f(t)dt + \int_0^{10} f(t)dt = 2\cdot 9^2 = 162$

$44\int_0^1 f(t)dt = 162 - \int_0^{10} f(t)dt = 82$

$\int_0^1 f(t)dt = \frac{41}{22}$

$g(1) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt = 2$

$\int_1^2 f(t)dt = 2 - \frac{41}{22} = \frac{3}{22}$

$\therefore 25$

풀이를 보면 알겠지만 주기가 '반드시' 생긴다!! 이를 이용한 풀이는 '해설 영상'에서!!

21. 모든 항이 정수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+5 & (a_n<0) \\ a_n-2 & (a_n\geq 0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. 두 자연수 $m$, $n$에 대하여 $a_m-a_n$의 최댓값이 15일 때, $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최솟값을 구하시오. [4점]

case 1) $a_1>0$

처음으로 $a_n<0$이 되는 $n$의 값을 $k$라 하자

$a_k=a_1-2(k-1)=a_1-2k+2<0$

$a_{k-1}=a_1-2(k-2)=a_1-2k+4\geq 0$ $\quad -4\leq a_1-2k<-2$

case 1-1) $a_1-2k=-4$ $\quad a_k=-2$

| $n$ | 1 | ⋯ | $k$ | $k+1$ | $k+2$ | $k+3$ | $k+4$ | $k+5$ | $k+6$ | $k+7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_1$ | ⋯ | -2 | 3 | 1 | -1 | 4 | 2 | 0 | -2 |

주기 생김!

$a_m-a_n$의 최댓값: $a_1-(-2)=2k-2$ $\quad$ 15 될 수 없음

case 1-2) $a_1-2k=-3$ $\quad a_k=-1$

| $n$ | 1 | ⋯ | $k$ | $k+1$ | $k+2$ | $k+3$ | $k+4$ | $k+5$ | $k+6$ | $k+7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_1$ | ⋯ | -1 | 4 | 2 | 0 | -2 | 3 | 1 | -1 |

주기 생김!

$a_m-a_n$의 최댓값: $a_1-(-2)=2k-1=15$ $\quad k=8$ $\quad a_1=13$

case 2) $a_1<0$

처음으로 $a_n\geq 0$이 되는 $n$의 값을 $k$라 하자

$a_{k-1}=a_1+5(k-2)<0$ $\quad a_1+5k<10$

$a_k=a_1+5(k-1)\geq 0$ $\quad a_1+5k\geq 5$ $\quad 5\leq a_1+5k<10$

case 2-1) $a_1+5k=5$ $\quad a_k=0$

| $n$ | 1 | ⋯ | $k$ | $k+1$ | $k+2$ | $k+3$ | $k+4$ | $k+5$ | $k+6$ | $k+7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_1$ | ⋯ | 0 | -2 | 3 | 1 | -1 | 4 | 2 | 0 |

주기 생김!

$a_m-a_n$의 최댓값: $4-a_1=5k-1$ $\quad$ 15될 수 X

case 2-2) $a_1+5k=6$ $\quad a_k=1$

| $n$ | 1 | ⋯ | $k$ | $k+1$ | $k+2$ | $k+3$ | $k+4$ | $k+5$ | $k+6$ | $k+7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_1$ | ⋯ | 1 | -1 | 4 | 2 | 0 | -2 | 3 | 1 |

주기 생김!

$a_m-a_n$의 최댓값: $4-a_1=5k-2$ $\quad$ 15될 수 X

case 2-3) $a_1+5k=7$ $\quad a_k=2$

| $n$ | 1 | ⋯ | $k$ | $k+1$ | $k+2$ | $k+3$ | $k+4$ | $k+5$ | $k+6$ | $k+7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_1$ | ⋯ | 2 | 0 | -2 | 3 | 1 | -1 | 4 | 2 |

주기 생김!

$a_m-a_n$의 최댓값: $4-a_1=5k-3$ $\quad$ 15될 수 X

case 2-4) $a_1+5k=8$ $\quad a_k=3$

| $n$ | 1 | ⋯ | $k$ | $k+1$ | $k+2$ | $k+3$ | $k+4$ | $k+5$ | $k+6$ | $k+7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_1$ | ⋯ | 3 | 1 | -1 | 4 | 2 | 0 | -2 | 3 |

주기 생김!

$a_m-a_n$의 최댓값: $4-a_1=5k-4$ $\quad$ 15될 수 X

case 2-5) $a_1+5k=9$ $\quad a_k=4$

| $n$ | 1 | ⋯ | $k$ | $k+1$ | $k+2$ | $k+3$ | $k+4$ | $k+5$ | $k+6$ | $k+7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $a_1$ | ⋯ | 4 | 2 | 0 | -2 | 3 | 1 | -1 | 4 |

주기 생김!

$a_m-a_n$의 최댓값: $4-a_1=5k-5=15$ $\quad k=4$ $\quad a_1=-11$

case 1-2) $\sum_{n=1}^{100}a_n=\sum_{n=1}^{7}a_n+\sum_{n=8}^{100}a_n=7a_4+13(-1+4+2+0-2+3+1)+(-1)+4$

$=49+13\cdot 7+3=143$

case 2-5) $\sum_{n=1}^{100}a_n=\sum_{n=1}^{3}a_n+\sum_{n=4}^{100}a_n=3a_2+13(4+2+0-2+3+1-1)+4+2+0-2+3+1$

$=-18+91+8=72$ $\quad \therefore 81$

22. 삼차함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $|f'(x)|=\frac{1}{2}$은 오직 하나의 실근을 가진다.
>
> (나) $g(1)=|g(3)-g(5)|+g(3)=5$

$f(0)+f(6)=6$일 때, $f(-1)$의 값을 구하시오. [4점]

$g(1)=5$, $f(5)=1$ $\quad g(1)-g(3)=|g(3)-g(5)|$

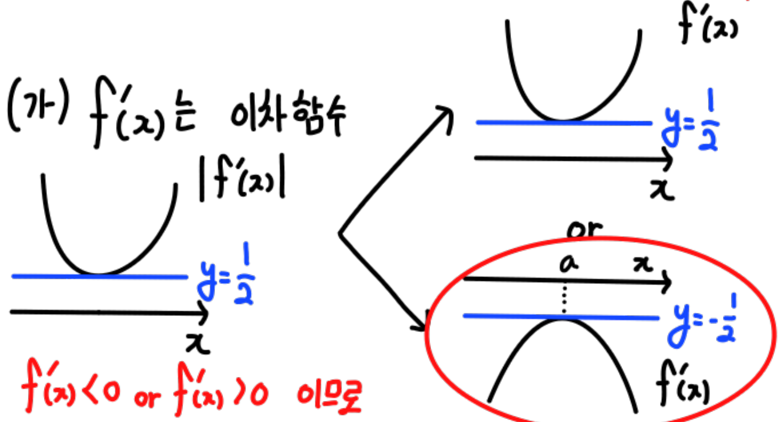
if $g(3)<g(5)$ $\rightarrow g(1)-g(3)=g(5)-g(3)$

$g(1)=g(5)$ 역함수 존재 X $\Rightarrow g(3)>g(5)$

$g(3)=a$, $g(5)=b$라 하자 그럼, $f(a)=3$, $f(b)=5$ $\quad (a>b)$

$g(3)-g(1)=g(5)-g(3)$ $\quad a-5=b-a$ $\quad 2a=b+5$

$f(b)-f(a)=f(a)-f(5)$ $\quad 2f(a)=f(b)+f(5)$ 따라서 $f(x)$는 $(a, f(a))$ 대칭이다!




$f'(x)<0$ or $f'(x)>0$ 이므로

$f(x)$는 실수전체의 집합에서 계속 증가 or 감소

$f(a)=3$, $f(b)=5$ $\quad a>b$이므로 감소

$2f(a)=f(5)+f(b)=6=f(0)+f(6)$ $\quad a=3$, $b=1$

$f'(x)=3k(x-3)^2-\frac{1}{2}=3kx^2-18kx+27k-\frac{1}{2}$ $\quad (k<0)$

$f(x)=kx^3-9kx^2+(27k-\frac{1}{2})x+C$

$f(3)=27k-81k+81k-\frac{3}{2}+C=27k+C-\frac{3}{2}=3$

$54k+2C=9$

$f(5)=125k-225k+135k-\frac{5}{2}+C=35k+C-\frac{5}{2}=1$

$70k+2C=7$

$16k=-2$ $\quad k=-\frac{1}{8}$ $\quad C=\frac{63}{8}$ $\quad \therefore 13$

$f(x)=-\frac{1}{8}(-1)^3+\frac{9}{8}\cdot(-1)^2-\frac{31}{8}(-1)+\frac{63}{8}=\frac{1+9+31+63}{8}=\frac{104}{8}=13$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

해설 : 정상우



제 2 교시

# 수학 영역(확률과 통계)

짝수형

**5지선다형**

**23.** ${}_{3}\Pi_{2}+{}_{3}H_{3}$의 값은? [2점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

${}_{3}\Pi_{2} = 3^{2} = 9$

${}_{3}H_{3} = {}_{5}C_{3} = 10$

$\therefore {}_{3}\Pi_{2} + {}_{3}H_{3} = 19$

※ ${}_{n}\Pi_{r} = n^{r}$

${}_{n}C_{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

${}_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{r}$

**24.** 확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}(80, p)$를 따르고

$$\mathrm{E}(X^{2})-\mathrm{E}(X)=395$$

를 만족시킬 때, $p$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$E(X) = 80p$

$V(X) = 80p(1-p)$

$E(X^{2}) - E(X) = V(X) + \{E(X)\}^{2} - E(X)$

$= 80p(1-p) + 6400p^{2} - 80p = 395$

$6320p^{2} = 395$

$p^{2} = \dfrac{395}{6320} = \dfrac{79}{1264} = \dfrac{1}{16}$

$\therefore p = \dfrac{1}{4} \quad (0 \le p \le 1)$

25. 주사위를 두 번 굴려서 나온 눈의 수를 각각 $a$, $b$라 할 때, 직선

$$y=\left(a-\frac{3}{2}\right)x+a-b$$

가 제2사분면을 지날 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

일차함수가 제 2 사분면을 지나려면

① 기울기가 음수 … $(a-\frac{3}{2}<0) \Rightarrow a<\frac{3}{2}$

이나

② y절편이 양수 … $(a-b>0) \Rightarrow a>b$

①: $a<\frac{3}{2}$ 이고 $a$는 $1 \le a \le 6$ 인 자연수

$\longrightarrow$ $a=1$. 즉, $a=1$ 이면 $b$값에 관계없이 항상 제 2사분면을 지난다.

$\Rightarrow$ 6가지

②: $a=2, 3, \cdots, 6$ 일때, $a>b$ 여야 하므로

$a=2$ 일 때 $b=1$

$a=3$ 일 때 $b=1, 2$

⋮

$a=6$ 일 때 $b=1, 2, \cdots, 5$

$\rightarrow$ 15가지

따라서 제 2사분면을 지나는 모든 경우의 수는 $6+15=21$.

$\therefore$ (확률) $=\frac{21}{6\times6}=\frac{7}{12}$

26. 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{7},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=5\{\mathrm{P}(A^C)-\mathrm{P}(B)\}$$

를 만족시킬 때, $\{\mathrm{P}(A)\}^2+\{\mathrm{P}(B)\}^2$의 값은? (단, $A^C$은 $A$의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{22}{49}$ ② $\frac{24}{49}$ ③ $\frac{26}{49}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{30}{49}$

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{7}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$5\{P(A^c)-P(B)\}=5(1-P(A)-P(B))$

$\therefore P(A)+P(B)-\frac{1}{7}=5-5(P(A)+P(B))$

$6(P(A)+P(B))=\frac{36}{7}$

$\therefore P(A)+P(B)=\frac{6}{7}$

$\{P(A)\}^2+\{P(B)\}^2=\{P(A)+P(B)\}^2-2P(A)P(B)$

$=\left(\frac{6}{7}\right)^2-\frac{2}{7}=\frac{36-14}{49}=\frac{22}{49}$

☆ 두 사건 A.B가 독립이면

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$P(B|A)=P(B)$

**27.** 7개의 문자 S, U, M, M, A, T, H를 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 나열할 때, U가 A보다 오른쪽에 있고 A와 U가 서로 이웃하지 않도록 하는 경우의 수는? [3점]

① 600 ② 750 ③ 900 ④ 1050 ⑤ 1200

① U가 A보다 오른쪽에 있는 경우

: U, A 대신 □를 넣어

S, □, M, M, □, T, H를 넣어 나열한 후,

왼쪽 □에 U, 오른쪽 □에 A를 넣으면 된다.

따라서 경우의 수는 $\frac{7!}{2!\,2!} = 1260$

② U, A가 A U로 이웃해 있는 경우

: A U를 한 세트로 봐서

S, M, M, T, H, $\boxed{AU}$를 일렬로 나열하면 되므로

경우의 수는 $\frac{6!}{2!} = 360$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 ① − ② 이므로

$1260 - 360 = 900$

**28.** 연속확률변수 $X$가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 2$이고, 상수 $a\left(0 < a < \frac{1}{2}\right)$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P\left(\frac{1}{2} \le X \le 1\right) = \frac{1}{10}$, $P(X \le 1) = \frac{1}{3}$

(나) $P(X \le a) = \frac{2}{3}a$, $P(a \le X \le 2a) = \frac{1}{15}$

방정식

$$P(X \ge 1) \times \left\{P(X \le 2a) - P\left(X \le \frac{1}{2}\right)\right\} = -\frac{1}{45}$$

을 만족시키는 $a$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{30}$ ② $\frac{1}{15}$ ③ $\frac{2}{15}$ ④ $\frac{1}{10}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

$P(X \ge 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(X \le 2a) = P(X \le a) + P(a \le X \le 2a)$

$= \frac{2}{3}a + \frac{1}{15}$

$P(X \le \frac{1}{2}) = P(X \le 1) - P(\frac{1}{2} \le X \le 1)$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{7}{30}$

$\therefore P(X \ge 1) \times \{P(X \le 2a) - P(X \le \frac{1}{2})\}$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{15} - \frac{7}{30}\right) = -\frac{1}{45}$

양변에 45를 곱하면

$20a + 2 - 7 = -1$

$\therefore a = \frac{1}{5}$

**단답형**

답 624

**29.** 집합 $X=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\rightarrow X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(1)f(2)f(3)\le 0$
>
> (나) 집합 $X$의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.

① $f(1)=0$

0.1.2.3 중 중복허락하여 2개를 고른 경우 (순서고려X)

$\underbrace{-3\le f(-3)\le f(-2)\le f(-1)\le f(0)}_{-3.-2.-1.0\text{ 중 중복허락하여 4개를 고른 경우 (순서고려X)}}\le f(1)=0\le \overbrace{f(2)\le f(3)}$

$\Rightarrow {}_4H_4\times{}_4H_2={}_7C_4\times{}_5C_2=\boxed{350}$

② $f(1)\ne 0,\ f(2)=0$

0.1.2.3 중 하나

$\underbrace{-3\le f(-3)\le f(-2)\le f(-1)\le f(0)\le f(1)}_{-3.-2.-1\text{ 중 중복허락하여 5개를 고른 경우 (순서고려X)}}<f(2)=0\le f(3)$

$\Rightarrow {}_3H_5\times 4={}_7C_5\times 4=\boxed{84}$

③ $f(1),\ f(2)\ne 0,\ f(3)=0$

$\underbrace{-3\le f(-3)\le\cdots\le f(1)\le f(2)}_{-3.-2.-1\text{ 중 중복허락하여 6개를 고른 경우 (순서고려X)}}<f(3)=0$

$\Rightarrow {}_3H_6={}_8C_6=\boxed{28}$

④ $f(1)f(2)f(3)<0$

1) $f(1),\ f(2),\ f(3)<0$ 또는 $(f(1)<0),\ (f(2),\ f(3)>0)$

1): (위 풀이들과 마찬가지로) ${}_3H_7={}_9C_7=36$

2): 〃 ${}_3H_5\times{}_3H_2={}_7C_5\times{}_4C_2=126$

$36+126=\boxed{162}$

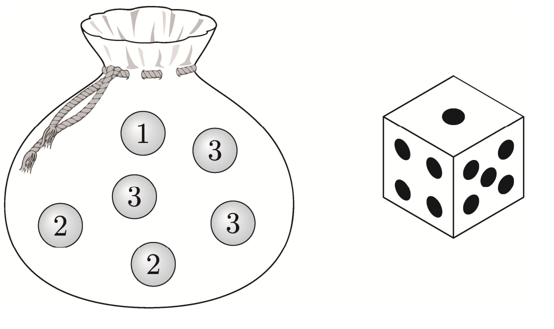
∴ 답은 $350+84+28+162=624$

**30.** 주머니에 1이 적힌 공 1개, 2가 적힌 공 2개, 3이 적힌 공 3개가 들어 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는다.

답 21

> 주사위를 두 번 던져 나오는 눈의 수를 차례로 $a,\ b$라 할 때,
>
> • $a=b$이면 주머니에서 $a$개의 공을 꺼내어 꺼낸 공에 적힌 수를 모두 더한 값의 2배를 점수로 얻는다. ··· ㉠
>
> • $a\ne b$이면 주머니에서 $|a-b|$개의 공을 꺼내어 꺼낸 공에 적힌 수를 모두 더한 값을 점수로 얻는다. ··· ㉡

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 10점일 때, $a=2$ 또는 $b=2$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]




㉠에서 10점을 얻은 경우! 꺼낸 공에 적힌 수의 합이 5가 되어야 하므로 꺼낸 공이 1.2.2 또는 2.3 이어야 한다.

① $a=b=2$ 이고 주머니에서 2,3을 하나씩 뽑을 확률

: $\frac{1}{36}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{1}{36}\times\frac{6}{15}=\frac{1}{90}$

② $a=b=3$이고 주머니에서 1 하나, 2 두개를 뽑을 확률

: $\frac{1}{36}\times\frac{{}_1C_1\times{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{1}{720}$

㉡에서 10점을 얻은 경우! 꺼낸공에 적힌 수의 합이 10이 되어야 하므로 꺼낸공이 1.3.3.3 또는 2.3.3.3 이어야 한다.

① $|a-b|=4$ 이고, 주머니에서 1 하나, 3 세개를 뽑을 확률.

: $|a-b|=4$인 $(a,b)$의 순서쌍은 (1.5), (2.6), (5,1), (6.2) 4개이다.

따라서 확률은 $\frac{4}{36}\times\frac{{}_1C_1\times{}_3C_3}{{}_6C_4}=\frac{1}{9}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{135}$

② $|a-b|=4$ 이고, 주머니에서 2 두개, 3 두개를 뽑을 확률.

: $|a-b|=4$인 $(a,b)$의 순서쌍은 (1.5), (2,6), (5,1), (6,2) 4개이다.

따라서 확률은 $\frac{4}{36}\times\frac{{}_2C_2\times{}_3C_2}{{}_6C_4}=\frac{1}{9}\times\frac{3}{15}=\frac{1}{45}$

따라서 10점을 얻을 확률은 $\frac{1}{90}+\frac{1}{720}+\frac{1}{135}+\frac{1}{45}$, 이 중 $a=2$ 또는 $b=2$인 경우는 ○인 경우 이므로 10점을 얻으면서 $a=2$ 또는 $b=2$인 확률은 $\frac{1}{30}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{135}+\frac{1}{45}\right)$.

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.



∴ (문제의 확률) $=\dfrac{\frac{1}{90}+\frac{1}{270}+\frac{1}{90}}{\frac{1}{90}+\frac{1}{720}+\frac{1}{135}+\frac{1}{45}}=\dfrac{8+\frac{8}{3}+8}{8+1+\frac{16}{3}+16}=\dfrac{48+8}{75+16}=\dfrac{56}{91}=\dfrac{8}{13}$

∴ $p+q=13+8=21$

제 2 교시

# 수학 영역(미적분) 해설 송승혁

@math_is_song

짝수형

## 5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{5\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}+7\times\left(\frac{4}{7}\right)^{n}}{\left(\frac{3}{5}\right)^{n}+\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}}$ 의 값은? [2점] ①

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$\frac{3}{5}>\frac{4}{7}$ 이므로

$5\times\frac{3}{5}=3$

24. 열린구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=e^{2x}\tan x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 실수 $a$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

의 값이 존재하지 않을 때, $g(a)$의 값은? [3점] ④

① $\frac{9}{8}\pi$ ② $\pi$ ③ $\frac{7}{8}\pi$ ④ $\frac{3}{4}\pi$ ⑤ $\frac{5}{8}\pi$

$f'(g(a))=0$

$f'(x)=2e^{2x}\cdot\tan x+e^{2x}\cdot\sec^2 x$

$=e^{2x}(2\tan x+\sec^2 x)$

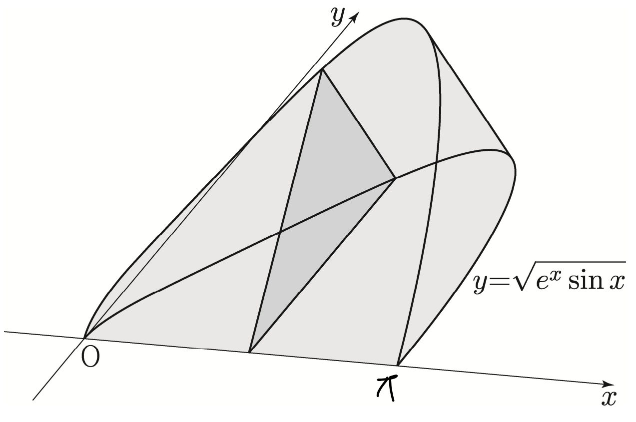
$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\tan x+\sec^2 x=0$ $(\times\cos^2 x)$

$\Rightarrow 2\sin x\cos x+1=0$

$=(\sin x+\cos x)^2=0$ 이므로

$x=\frac{3}{4}\pi$ $\therefore g(a)=\frac{3}{4}\pi$

**25.** 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{e^x \sin x}\ (0 \le x \le \pi)$와 $x$축으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점] 5




① $\frac{\sqrt{3}}{4}(e^{\pi}-1)$　② $\frac{\sqrt{3}}{8}(e^{\pi}-1)$　③ $\frac{\sqrt{3}}{16}(e^{\pi}-1)$

④ $\frac{\sqrt{3}}{4}(e^{\pi}+1)$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{8}(e^{\pi}+1)$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\pi} e^x \cdot \sin x\, dx = \left[\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right]_0^{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \times e^{\pi} + \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8}(e^{\pi}+1)$$

**26.** 곡선 $y=\frac{t}{2}\ln x-\frac{1}{4t}x^2$ 위의 점 P가 $x=1$부터 $x=e$까지 움직인 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(1)$의 값은? [3점] 3

① $\frac{1-e^2}{4}$　② $\frac{2-e^2}{4}$　③ $\frac{3-e^2}{4}$

④ $1-\frac{e^2}{4}$　⑤ $\frac{5-e^2}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{2x} - \frac{x}{2t}$$
$$\int_1^e \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^e \frac{t}{2x} + \frac{x}{2t}\, dx = \left[\frac{t}{2}\ln|x| + \frac{1}{4t}x^2\right]_1^e = \frac{t}{2} + \frac{1}{4t}(e^2-1) = f(t)$$
$$\therefore f'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4t^2}(e^2-1)\Big|_{t=1} = \frac{3-e^2}{4}$$

**27.** 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x tf'(x-t)\,dt$$

가 $g'(3)=g''(3)=0$을 만족시킬 때, $\int_0^1 \frac{f'(x)}{g'(x)+1}dx$의 값은? [3점]

2

① $\ln 6$ ② $\ln 5$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 3$ ⑤ $\ln 2$

$x-t=s$.

$-dt=ds$, $t=0: s=x$, $t=x: s=0$

$g(x)=\int_0^x (x-s)f'(s)\,ds$

$g'(x)=\int_0^x f'(s)\,ds=f(x)-f(0)$

$g'(3)=0 \Rightarrow f(3)=f(0)$

$g''(x)=f'(x)$ ∴ $f'(3)=0$

$\int_0^1 \frac{f'(x)}{g'(x)+1}dx=\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)-f(0)+1}dx$

$=\left[\ln|f(x)-f(0)+1|\right]_0^1=\ln 5$ ■

**28.** 첫째항이 $\pi$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

5

(가) $\frac{\pi}{2}\le a_n \le \pi$

(나) $\sin^2 a_{n+1}+\cos^2\frac{a_n}{2}=1$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-k)$가 실수 $S$에 수렴할 때, $k+S$의 값은? (단, $k$는 상수이다.) [4점]

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=k$

① $\frac{4}{5}\pi$ ② $\frac{5}{6}\pi$ ③ $\frac{6}{7}\pi$ ④ $\frac{7}{8}\pi$ ⑤ $\frac{8}{9}\pi$

(나) $\sin^2 a_{n+1}=\sin^2\frac{a_n}{2}$ ⇒ 모든 자연수 $n$에 대하여 i) 또는 ii) 성립.

⇒ i) $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$ → $a_2=\frac{\pi}{2}$, $a_3=\frac{\pi}{4}$, … (가)에 모순.

ii) $a_{n+1}+\frac{a_n}{2}=\pi$ ($\frac{3}{4}\pi\le a_{n+1}+\frac{a_n}{2}\le\frac{3}{2}\pi$ 이므로 두 개의 합이 $\pi$가 아니면 모순)

iii) i) → ii) 혹은 ii) → i)가 교차하는 경우

(가)와 i)를 동시에 만족하는 자연수 $m$이 존재한다고 가정

→ $a_m\ge\pi$ 이어야 $a_{m+1}=\frac{a_m}{2}\ge\frac{\pi}{2}$ 임

∴ $a_m=\pi$

$a_m+\frac{a_{m-1}}{2}=\pi$ 이므로 $(m\ge2)$

$a_m=\pi-\frac{1}{2}a_{m-1}$ 이다.

$\frac{\pi}{2}\le a_{m-1}\le\pi$ ⇒ $\frac{\pi}{2}\le a_m\le\frac{3}{4}\pi$. $a_m=\pi$와 모순.

ii) → i)

수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수이므로 2이상의 자연수 $n$에 대하여 $a_n<\pi$을 만족 ∴ ii) → i) 교차 불가능.

∴ 모든 자연수 $n$에 대하여 ii)가 성립. ⇒ $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}+\frac{a_n}{2}=\pi$; $\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{2}{3}\pi=k$

$a_{n+1}+\frac{a_n}{2}=\pi$ ⇒ $\left(a_{n+1}-\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2}{3}\pi\right)$

$a_n-\frac{2}{3}\pi=b_n$이라 하면 $b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n$

$b_1=\frac{\pi}{3}$이므로 모든 자연수 $n$에 대하여 $b_n\ne0$ ⇒ $\{b_n\}$은 공비가 $\left(-\frac{1}{2}\right)$인 등비수열

∴ $\frac{\frac{1}{3}\pi}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{9}\pi=S$

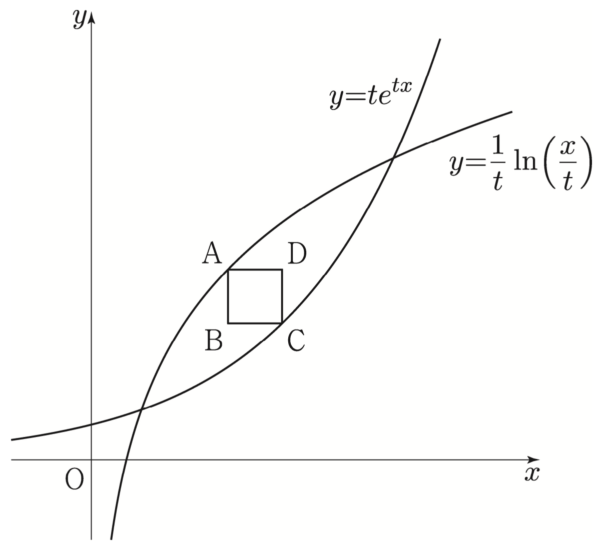
∴ $k+S=\frac{8}{9}\pi$ ■

**단답형**

29. 그림과 같이 양수 $t\left(0<t<\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$에 대하여 두 곡선

$$y=\frac{1}{t}\ln\frac{x}{t},\quad y=te^{tx}$$ => 역함수 관계.

가 정사각형 ABCD와 각각 점 A, C에서만 만난다. 선분 AB는 $y$축과 평행하고 정사각형 ABCD의 넓이가 최대일 때, 선분 AB의 길이를 $f(t)$라 하자. $f(\alpha)=e$인 실수 $\alpha$에 대하여 $f'(\alpha)=pe^q$일 때, $p^2+q^2$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 $x$좌표는 점 C의 $x$좌표보다 작고, $p$와 $q$는 정수이다.) [4점]




사각형 ABCD의 넓이가 최대 => $\overline{AC}$가 최대

=> 점 A, C (접·기) = 1인 순간.

∴ $y'=\frac{1}{tx}$, $y'=t^2e^{tx}$

↳ $x=\frac{1}{t}$ ↳ $x=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t^2}\right)$

∴ $\left|\frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t^2}\right)-\frac{1}{t}\right|=f(t)$

$f(t)=\frac{1}{t}|-1-2\ln t|$

$0<t<\frac{1}{\sqrt{e}}$에서 $-1-2\ln t>0$이므로

$f(t)=\frac{1}{t}(-1-2\ln t)$ => $f(\alpha)=e$이므로 $\alpha=\frac{1}{e}$.

$f'(t)=\frac{-2+1+2\ln t}{t^2}$ ∴ $f'(\alpha)=-3e^2$

$(-3)^2+2^2=13$

30. 최고차항의 계수가 $a\,(0<a<1)$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 $k$에 대하여 정의역이 $\{x\,|\,x>0\}$인 함수

$$g(x)=\log_a f(e^x+k)$$ $f(k+1)\geq 0$

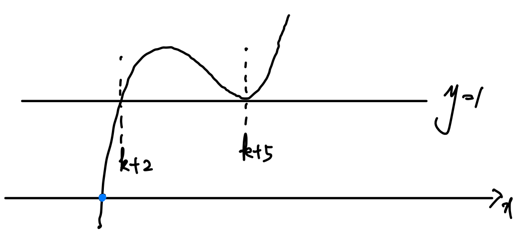
가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $g'(x)=0$은 두 실근 $\ln 3$, $\ln 5$를 갖는다.
>
> (나) 함수 $\frac{1}{g(x)}$은 $x=\ln 2$와 $x=\ln 5$에서만 불연속이다.

$a$의 값이 최대일 때, $f'(2)=\frac{3}{2}$이다. $f(7)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$$g'(x)=\frac{f'(e^x+k)\cdot e^x}{f(e^x+k)\ln a}$$ $e^x>0$, $f(e^x+k)>0$, $\ln a<0$ → (가): $f'(k+3)=f'(k+5)=0$

(나): $\frac{1}{g(x)}=\log_{f(e^x+k)}a$ → $f(k+2)=f(k+5)=1$




$f(x)=a(x-k-2)(x-k-5)^2+1$에서 $f(k+1)\geq 0$이므로

$-16a+1\geq 0$; $a\leq\frac{1}{16}$

$a$의 값이 최대이므로 $f(x)=\frac{1}{16}(x-k-2)(x-k-5)^2+1$

$f'(x)=\frac{3}{16}(x-k-3)(x-k-5)$ => $f'(2)=\frac{3}{16}(-k-1)(-k-3)=\frac{3}{2}$

$k^2+4k-5=0$

→ $k=1$ (∵ $k>0$)

∴ $f(7)=\frac{1}{16}(7-3)(7-6)^2+1=\frac{5}{4}$이므로

$4+5=9$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

# 수학 영역(기하)

문제, 해설 by @jhlee_04
" 수능은 기하가 미래다"

짝수형

## 5지선다형

**23.** 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(-2,\ a,\ 4)$, $\mathrm{B}(4,\ -2,\ b)$에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표가 $(c,\ 0,\ 2)$일 때, $a+b+c$의 값은? [2점]

① $-5$ ② $-4$ ③ $-3$ ④ $-2$ ⑤ $-1$

$c=\dfrac{4\cdot1-2\cdot2}{1+2}=0$

$0=\dfrac{-2\cdot1+a\cdot2}{1+2}=\dfrac{2a-2}{3}$, $a=1$

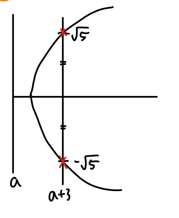
$2=\dfrac{b\cdot1+4\cdot2}{1+2}=\dfrac{b+8}{3}$. $b=-2$

$\therefore a+b+c=-1$

**24.** 두 양수 $a$, $b$에 대하여 쌍곡선 $\dfrac{(x-a)^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 점 $(0,\ 2)$를 지나고, 직선 $x=a+3$과 만나는 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$이다. $ab$의 값은? [3점]

① $4\sqrt{2}$ ② $8$ ③ $8\sqrt{2}$ ④ $16$ ⑤ $16\sqrt{2}$

①




$\dfrac{3^2}{4}-\dfrac{(\sqrt{5})^2}{b^2}=1$, $\dfrac{5}{b^2}=\dfrac{5}{4}$, $b=2$

② $\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{2^2}{4}=1$, $a^2=8$, $a=2\sqrt{2}$

$\therefore ab=4\sqrt{2}$

**25.** 좌표평면에 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(-1,\ 1)$이 있다.

$$|\vec{p}-\vec{a}|=\vec{a}\cdot\vec{b}$$ $= 2\cdot(-1)+4\cdot1=2$

⇒ $\vec{p}$는 중심이 (2,4)이고 반지름이 2인 원을 나타냄

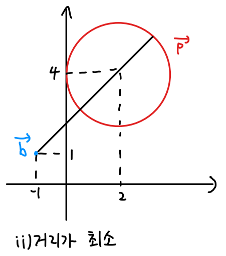
를 만족시키는 벡터 $\vec{p}$에 대하여 $|\vec{p}-\vec{b}|$의 최댓값과

⇒ $\vec{p}$가 나타내는 원과 $\vec{b}$가 가리키는 점 사이의 거리

최솟값을 각각 $M$, $m$이라 할 때, $M^2-m^2$의 값은? [3점]

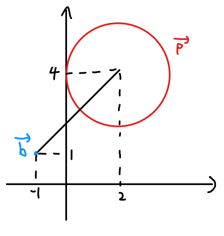
① $20\sqrt{2}$ ② $22\sqrt{2}$ ③ $24\sqrt{2}$ ④ $26\sqrt{2}$ ⑤ $28\sqrt{2}$

i) 거리가 최대




$M=(\vec{b}$에서 중심까지 거리$)+($반지름의 길이$)$
$=3\sqrt{2}+2$

ii) 거리가 최소




$m=(\vec{b}$에서 중심까지 거리$)-($반지름의 길이$)$
$=3\sqrt{2}-2$

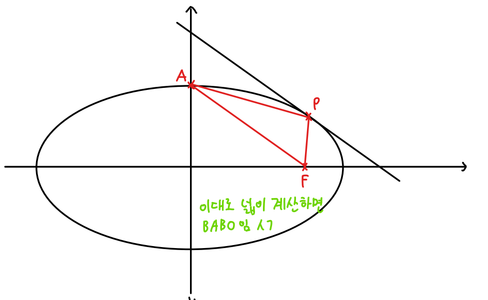
$\therefore M^2-m^2=(M+m)(M-m)$
$=6\sqrt{2}\cdot4$
$=24\sqrt{2}$

**26.** 타원 $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 $y$축 위의 꼭짓점 A와 한 초점 F에 대하여 직선 AF와 평행한 접선의 접점을 P라 하자. 삼각형 AFP의 넓이의 최솟값은? [3점]

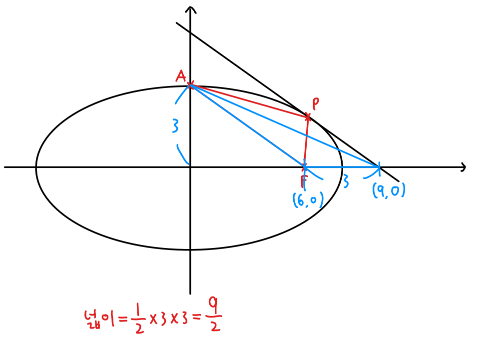
① 3 ② $\dfrac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\dfrac{9}{2}$ ⑤ 5

A(0, 3), F(6, 0) ⇒ 접선 기울기: $-\frac{1}{2}$

접선: $y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{45\cdot\frac{1}{4}+9}$
$=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$




⇓

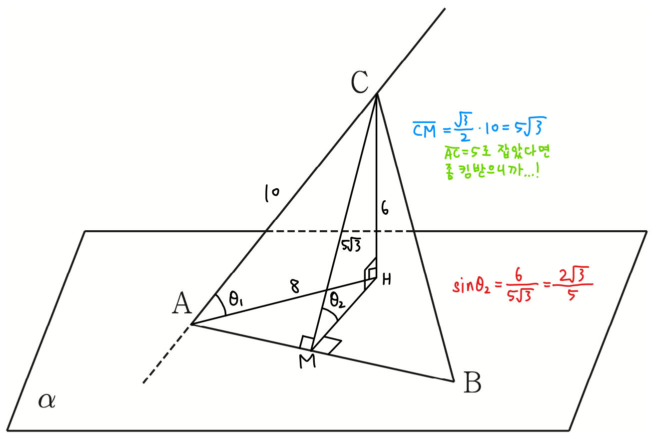



넓이 $=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$

**27.** 평면 $\alpha$ 위의 서로 다른 두 점 A, B와 평면 $\alpha$ 위에 있지 않은 점 C에 대하여 삼각형 ABC는 정삼각형이다. 직선 AC와 평면 $\alpha$가 이루는 예각의 크기를 $\theta_1$, 평면 ABC와 평면 $\alpha$가 이루는 예각의 크기를 $\theta_2$라 하자.

$\sin\theta_1 = \frac{3}{5}$ 일 때, $\sin\theta_2$의 값은? [3점]

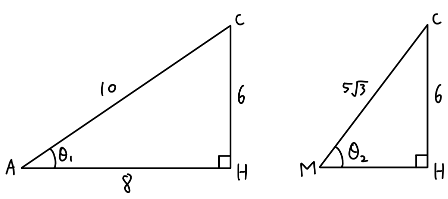
① $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ② $\frac{2\sqrt{3}}{5}$  ③ $\frac{3\sqrt{3}}{10}$  ④ $\frac{\sqrt{3}}{5}$  ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{10}$




$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10 = 5\sqrt{3}$

$\overline{AC}=5$로 잡았다면 좀 킹받으니까...!

$\sin\theta_2 = \frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$




여기까지 틀리면 안되요!

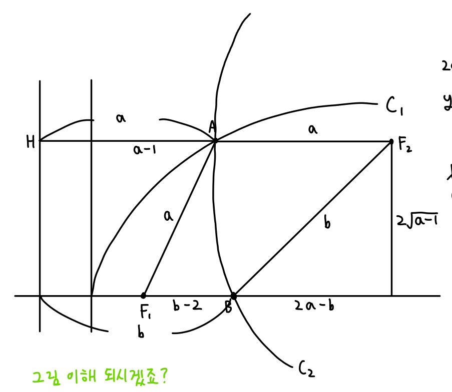
**28.** 포물선 $C_1 : y^2 = 4x$의 제1사분면 위의 점 A를 꼭짓점으로 하고 준선이 $x = k\,(k < 0)$인 포물선 $C_2$가 있다. 두 포물선 $C_1$, $C_2$의 초점을 각각 $\mathrm{F}_1$, $\mathrm{F}_2$라 할 때, 포물선 $C_2$가 $x$축과 만나는 점을 B라 하자. 사각형 $\mathrm{AF_1BF_2}$가 다음 조건을 만족시킬 때, 사각형 $\mathrm{AF_1BF_2}$의 넓이는? (단, $k$는 상수이다.) [4점]

> (가) $\overline{\mathrm{AF_1}} = \overline{\mathrm{AF_2}}$
>
> (나) 사각형 $\mathrm{AF_1BF_2}$의 둘레는 $\frac{98}{5}$이다.

① $\frac{82}{5}$  ② $\frac{84}{5}$  ③ $\frac{86}{5}$  ④ $\frac{88}{5}$  ⑤ 18

$C_1$에서 $\overline{AF_1} = \overline{AH} = \overline{AF_2}$

$C_2$에서 $\overline{AH} = \overline{AF_2}$ $\Rightarrow$ $C_1, C_2$는 같은 준선을 가짐 $(k=-1)$




$2a+2b-2=\frac{98}{5}$, $a+b=\frac{54}{5}$

$y^2=4(a-1)$에서 $y=2\sqrt{a-1}$

피타고라스

$\cancel{b^2} = 4a-4+4a^2-4ab+\cancel{b^2}$

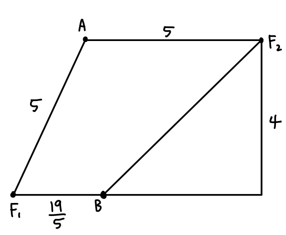
$a^2-ab+a-1=0$

$b=\frac{54}{5}-a$ 대입

$a^2-\frac{54}{5}a+a^2+a-1=0$

$10a^2-49a-5=0$, $a=5$, $b=\frac{29}{5}$

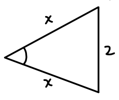
그림 이해 되시겠죠?




넓이 $=\frac{1}{2}\cdot\left(5+\frac{19}{5}\right)\cdot 4=\frac{88}{5}$

**단답형**

29. 좌표평면에서 $\overline{\mathrm{AC}}=2$, $\cos(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{7}{8}$ 인 마름모 ABCD가 있다.



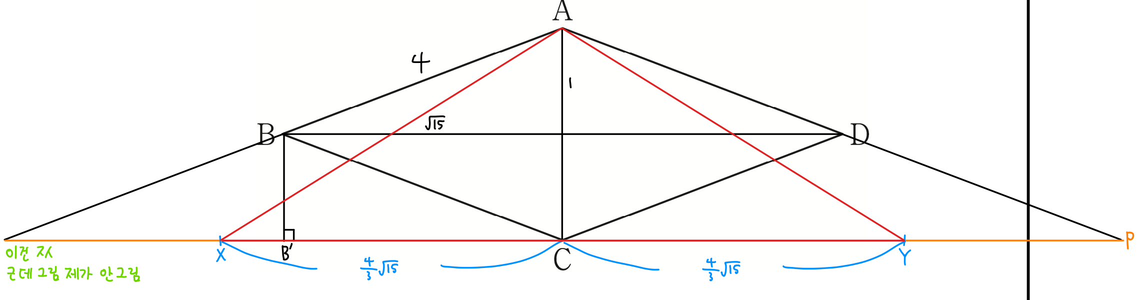

$4=x^2+x^2-2x^2\cdot\frac{7}{8}=\frac{1}{4}x^2$
$x=4$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1+t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ \ (-1\le t\le 1)$$

을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형 위를 움직이는 서로 다른 두 점 X, Y가

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AX}}=22,\quad \overrightarrow{\mathrm{BX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{YB}}=\frac{32}{3}$$

를 만족시킨다. 삼각형 AXY의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]




i) $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CX})=\underset{2}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}+\underset{20}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CX}}=22$

$\sqrt{15}\cdot|\overrightarrow{CX}|=20,\ |\overrightarrow{CX}|=\frac{4}{3}\sqrt{15}$

ii) $\overrightarrow{BX}\cdot(\overrightarrow{YB'}+\overrightarrow{B'B})=\underset{\frac{35}{3}}{\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{YB'}}+\underset{-1}{\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{B'B}}=\frac{32}{3}$

$\frac{\sqrt{15}}{3}\cdot|\overrightarrow{YB'}|=\frac{35}{3},\ |\overrightarrow{YB'}|=\frac{7}{3}\sqrt{15}$

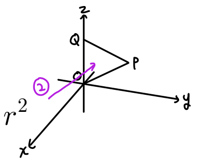
$\overline{AC}=2,\ \overline{XY}=\frac{8}{3}\sqrt{15}$

$\therefore$ 넓이$=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\sqrt{15}\cdot2=\frac{8}{3}\sqrt{15}$

$p=3,\ q=8 \Rightarrow 3+8=11$

성분 이용한 풀이, 추가 코멘트는 해설강의에!

30. 좌표공간에 중심이 $\mathrm{P}(2,\,2\sqrt{3},\,4)$이고 점 Q에서 $z$축에 접하는 구

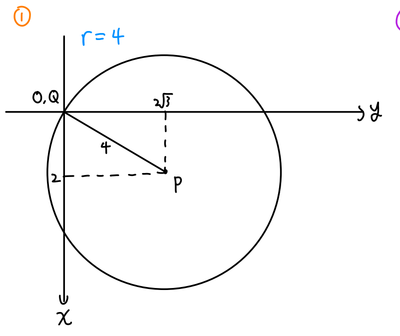


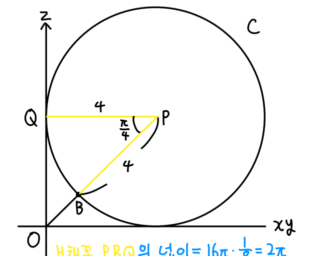

$$S:\,(x-2)^2+(y-2\sqrt{3})^2+(z-4)^2=r^2$$

가 있다. 구 $S$와 평면 POQ가 만나서 생기는 원 $C$, 구 $S$와 선분 OP의 교점 B, 두 점 O, Q를 지나는 평면 $\alpha$가 다음 조건을 만족시킨다.

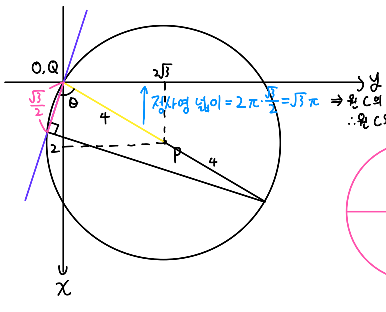
> 원 $C$의 평면 $\alpha$ 위로의 정사영의 넓이와 부채꼴 PQB의 $yz$평면 위로의 정사영의 넓이는 같다.

구 $S$와 평면 $\alpha$가 만나서 생기는 원의 넓이가 $k\pi$일 때, $80k$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

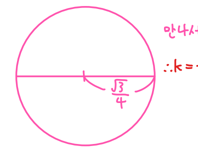



부채꼴 PBQ의 넓이$=16\pi\cdot\frac{1}{8}=2\pi$
원 C의 넓이$=16\pi$




정사영 넓이$=2\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\pi$ $\Rightarrow$ 원 C의 정사영 넓이$=\sqrt{3}\pi$
$\therefore$ 원 C와 평면 $\alpha$ 사이의 이면각의 크기 : $\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{16}$




만나서 생기는 원의 넓이$=\frac{3}{16}\pi$
$\therefore k=\frac{3}{16}$. $80k=15$

고생하셨습니다! 수능 화이팅!!

## 서울권 수학교육과 연합동아리 SUM

○ 건국대학교 · 동국대학교 · 상명대학교 · 서울대학교 · 성균관대학교 · 이화여자대학교 · 한양대학교 · 홍익대학교 수학교육과 참여

### 감수

김기홍 나동하 박재형

### 출제

김서진 김주완 박재형 서지영 송승혁 이경민 이민지 이수현
이지훈 정상우 정세영 채우진 채형석

### 검토

김기홍 김서진 김주완 나동하 박재형 서지영 송승혁 이경민
이민지 이수현 이신혁 이지훈 정상우 정세영 채우진 채형석

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.