2023학년도 가톨릭대학교 의예과 논술 해설
오르비 Pafnuty Chebyshev - 오타, 오류 지적 환영합니다!

1. 제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오. (160점)

(ㄱ) 다음 조건을 만족하는 모든 실수 k의 집합을 A라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $\log_{\left(\frac{1}{2}k-5\right)}\{-(k-11)x^2+(k-11)+2\}$ 가 정의된다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 집합 A에 대하여 집합 B를 다음과 같이 정의한다.

$$B=\left\{(m,n)\,\middle|\,\frac{1}{3}m^2+n\in A, n>1, m\text{과 } n\text{은 정수}\right\}$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 집합 B에 대하여 집합 C를 다음과 같이 정의한다.

$$C=\{(m,n)\,|\,(m,n)\in B \text{ 이고, } x^n=m\text{을 만족하는 실수 } x\text{가 존재한다. }\}$$

(ㄹ) **[a의 n제곱근]** n이 2 이상의 정수일 때, n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^n=a$를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라고 한다.

논제. (160점) 제시문 (ㄷ)의 집합 C의 원소의 개수를 구하고 그 근거를 논술하시오.

해설)

우선 제시문 (ㄱ)을 해석한다. 로그의 밑 조건에서 $\frac{1}{2}k-5>0$, $\frac{1}{2}k-5\neq 1$ 이므로 $k>10$, $k\neq 12$ 이고, 또 진수가 양수이어야 한다.
i) $k=11$ 이면 진수가 2 이므로 가능.
ii) $k\neq 11$ 이면 판별식 $D=(k-11)^2+8(k-11)=(k-11)(k-3)<0$ 이다.
이상에서 $A=\{k|10<k\leq 11\}$ 이다. 그리고 (ㄴ) 에서 구하는 집합은 $10<\frac{1}{3}m^2+n\leq 11$을 만족하는 (m,n)의 순서쌍이다. $n>1$이므로 자명히 $|m|\leq 5$ 이고, 따라서 구하는 순서쌍은 $(0,11)$, $(\pm 1,10)$, $(\pm 2,9)$, $(\pm 3,8)$, $(\pm 4,5)$, $(\pm 5,2)$ 이다.
이 중 (ㄷ)의 조건을 만족하는 것은 $(0,11)$, $(1,10)$, $(\pm 2,9)$, $(3,8)$, $(\pm 4,5)$, $(5,2)$ 으로 답은 8개이다.

2. **제시문 (ㄱ)~(ㄹ)을 읽고 논제에 답하시오. (160점)**

(ㄱ) 좌표평면 위의 원 C_1, C_2는 다음과 같다.

$$\mathrm{C}_1 : (x-1)^2+y^2=\frac{1}{5}$$
$$\mathrm{C}_2 : (x+2)^2+(y+3)^2=\frac{4}{5}$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 원 C_1, C_2에 동시에 접하는 직선 중 기울기가 최대인 직선을 l, 최소인 직선을 m이라 하자.

(ㄷ) 제시문 (ㄱ)의 원 C_1, C_2와 제시문 (ㄴ)의 직선 l, m에 대하여 정의역이 열린 구간 $(0,1)$인 함수 $f(t)$, $g(t)$를 다음과 같이 정의한다.

(가) 직선 l이 원 C_1에 접하는 점을 A_1, 직선 m이 원 C_2에 접하는 점을 A_2라 하자.

(나) 직선 m을 y축의 방향으로 t만큼 평행이동한 직선과 원 C_1의 두 교점을 P_1, Q_1이라 할 때, $f(t)=\sin(\angle \mathrm{P}_1\mathrm{A}_1\mathrm{Q}_1)$ 이다. (단, $0<t<1$)

(다) 직선 l을 y축의 방향으로 t만큼 평행이동한 직선과 원 C_2의 두 교점을 P_2, Q_2라 할 때, $g(t)=\sin(\angle \mathrm{P}_2\mathrm{A}_2\mathrm{Q}_2)$ 이다. (단, $0<t<1$)

(ㄹ) 제시문 (ㄷ)의 함수 $f(t)$와 $g(t)$에 대하여 실수 m은 다음 조건을 만족시킨다.

정의역이 열린 구간 $(0,1)$인 함수 $y=f(t)g(t)$는 $t=M$ 에서 최댓값을 갖는다.

논제. (170점) 제시문 (ㄹ)의 M의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

해설)

두 원은 외부에 있으므로 공통접선은 4개이다. 이 중 y축에 평행한 것은 없으므로 접선의 방정식을 $\ell : y=mx+n$으로 놓으면 ℓ에서 점 $(1,0)$까지의 거리는 $\frac{1}{\sqrt{5}}$, 점 $(-2,-3)$까지의 거리는 $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 이므로 $\frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{|-2m+3+n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 에서 $\cdots(1)$

$2|m+n|=|-2m+3+n|$ 이고 정리하면 $n=-1$ 또는 $n=3-4m$ 이다.

i) $n=-1$ 인 경우

(1)에 대입하면 $m=2$ 또는 $m=\frac{1}{2}$ 이다.

ii) $n=3-4m$ 인 경우

(1)에 대입하면 $m=\dfrac{45\pm\sqrt{89}}{44}$ 이다.

이때 $9<\sqrt{89}<10$ 이므로 $\dfrac{45-\sqrt{89}}{44}>\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{45+\sqrt{89}}{44}<2$ 이다. 따라서 $l: y=2x-1$, $m: y=\dfrac{1}{2}x-1$ 이고, l, m을 y축으로 t만큼 평행이동한 직선은 각각 $y=2x+t-1$, $y=\dfrac{1}{2}x+t-1$ 이다. m을 평행이동한 직선과 C_1의 중심과의 거리는 $\dfrac{|2t-1|}{\sqrt{5}}$이므로, $\overline{P_1Q_1}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{t-t^2}$ 이고, 사인법칙을 적용하면 $f(t)=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{4}{\sqrt{5}}\times\sqrt{t-t^2}=2\sqrt{t-t^2}$ 이다. 마찬가지로 $g(t)=\dfrac{\sqrt{4t-t^2}}{2}$를 얻고,

$f(t)g(t)=\dfrac{1}{2}\sqrt{t-t^2}\sqrt{4t-t^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{t^2(t-1)(t-4)}$ 에서 $h(t)=t^2(t-1)(t-4)$가 최대일 때 $f(t)g(t)$는 최대이다. $h'(t)=t(4t^2-15t+8)$ 에서 $0<t<15-\dfrac{\sqrt{97}}{8}$ 이면 $h'(t)>0$, $\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}<t<1$ 이면 $h'(t)<0$ 이므로, 구하는 답은 $t=\dfrac{15-\sqrt{97}}{8}$ 이다.

3. **제시문 (ㄱ)~(ㄷ)을 읽고 논제에 답하시오. (180점)**

(ㄱ) 함수 $f(t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$f(t)=\int_0^t\left\{\frac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}-\frac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{5}{4}}}\right\}dx$$

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 함수 $f(t)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$는 다음과 같다.

$$v(t)=3t^2\{f(t)+1\}$$

(ㄷ) 제시문 (ㄴ)의 점 P에 대하여 s는 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리이다.

논제. (180점) 제시문 (ㄷ)의 s에 대하여 s^4의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

해설)

$\dfrac{1}{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{x^4}{(1+x^4)^{\frac{5}{4}}}=\dfrac{1}{(1+x^4)^{\frac{5}{4}}}>0$ 이므로 $t\geq 0$ 이면 $f(t)\geq 0$ 이다. 따라서

$$s=\int_0^1 v(t)dt=\int_0^1 3t^2f(t)dt+\int_0^1 3t^2dt=\left([t^3f(t)]_0^1-\int_0^1 t^3\cdot\frac{1}{(1+t^4)^{\frac{5}{4}}}dt\right)+1$$

$$=f(1)-\left[-\frac{1}{(1+t^4)^{1/4}}\right]_0^1+1=2^{-\frac{1}{4}}+f(1)$$ 에서

$$f(1)=\int_0^1\left\{\frac{1}{(1+x^4)^{1/4}}-\frac{x^4}{(1+x^4)^{5/4}}\right\}dx,$$

$$\int_0^1\frac{1}{(1+x^4)^{1/4}}dx=\left[\frac{x}{(1+x^4)^{1/4}}\right]_0^1+\int_0^1 x\cdot\frac{x^3}{(1+x^4)^{5/4}}dx=2^{-\frac{1}{4}}+\int_0^1\frac{x^4}{(1+x^4)^{5/4}}dx$$

이므로 $f(1)=2^{-\frac{1}{4}}$, $s=2\cdot 2^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$ 이고 $s^4=2^3=8$ 이다.

별해) $f(1)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(1+x^4)^{5/4}}dx$ 에서 $x=\sqrt{\tan\theta}$로 치환하면

$$f(1)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}d\theta=\lim_{t\to 0}\int_t^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}d\theta=\lim_{t\to 0}[\sqrt{\sin\theta}]_t^{\pi/4}=2^{-\frac{1}{4}}$$ 이다.

이는 이상적분(improper integral)으로, 교과과정 외이다.

4. **제시문 (ㄱ)~(ㄴ)을 읽고 논제에 답하시오. (190점)**

(ㄱ) 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 0$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이다.
(다) 실수 x가 $a_n < x \le a_{n+1}$일 때, 집합 $\left\{\frac{1}{k}\ln\frac{k}{x}\,\middle|\,1 \le k \le 5n, k\text{는 자연수}\right\}$의 원소 중 최댓값은 $\frac{1}{n}\ln\frac{n}{x}$이다.

(ㄴ) 제시문 (ㄱ)의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수의 합 S를 다음과 같이 정의한다.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{a_{n+1}}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - \left(\frac{a_n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$$

논제. (190점) 제시문 (ㄴ)의 S의 값을 구하고 그 근거를 논술하시오.

해설)

t에 대한 함수 $y = \frac{1}{t}\ln\frac{t}{x}$를 생각하자. $y' = \frac{1-\ln\frac{t}{x}}{t^2}$에서, y는 $t = ex$에서 극대이고, $x \to 0+$일 때 $y \to -\infty$, $x \to \infty$일 때 $y \to 0$ 이다. 구간 $[1, 5n]$이 $t = ex$를 포함하지 않는다면 n에서 최대일 수 없으므로, $ex \in [1, 5n]$ 이다. 1에서 $5n$까지의 자연수 중 n에서 최대이므로, $[ex] = n$ 또는 $[ex] = n-1$ 이다. 이하, $n \ge 2$이다.

i) $[ex] = n$ 인 경우

x의 범위는 $\frac{n}{e} \le x < \frac{n+1}{e}$이다. 이때 자연수 집합에서 가능한 최댓값의 후보는 $\frac{1}{n}\ln\frac{n}{x}$ 또는 $\frac{1}{n+1}\ln\frac{n+1}{x}$ 인데, 최댓값이 $\frac{1}{n}\ln\frac{n}{x}$ 이므로 $\frac{1}{n}\ln\frac{n}{x} \ge \frac{1}{n+1}\ln\frac{n+1}{x}$ 이고 x에 대해 정리하면 $x \le \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$ 이다.

ii) $[ex] = n-1$ 인 경우 $(n \ge 2)$

x의 범위는 $\frac{n-1}{e} \le x < \frac{n}{e}$ 이다. 마찬가지로 $\frac{1}{n}\ln\frac{n}{x} \ge \frac{1}{n-1}\ln\frac{n-1}{x}$ 이고 정리하면 $x \ge \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$이다. 만약 $n = 1$ 이면 x의 범위는 $0 < x < \frac{1}{e}$이다.

여기서 위 조건을 정리하면 $\begin{cases} \dfrac{n}{e} \le x < \dfrac{n+1}{e} \\ x \ \ge \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} \dfrac{n-1}{e} \le x < \dfrac{n}{e} \\ x \ge \dfrac{(n-1)^n}{n^{n-1}} \end{cases}$ 인데,

각각의 대소를 정리해야 한다. 다음의 보조정리를 증명한다.

lemma) 임의의 양의 실수 x에 대하여, 다음이 성립한다.

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

pf) 양변의 로그를 취하면 $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) < 1 < (x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$와 동치이다.

$p(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $q(x) = (x+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$라 하자. $p'(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$,

$q'(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}$, $p''(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)^2} < 0$, $q''(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)} > 0$ 이고

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} p'(x) = \lim_{x\to\infty} q'(x) = 0$ 이므로 실수 전체에서 $p'(x) > 0$, $q'(x) < 0$ 이다.

이때 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} q(x) = 1$ 이므로, 실수 전체에서 $p(x) < 1 < q(x)$ 이다.

따라서 문제의 부등식이 성립한다.

위 부등식에서 $x = n$을 대입하면 $\dfrac{(n+1)^n}{n^n} < e < \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$ 이고, 정리하면

$\dfrac{n}{e} < \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n} < \dfrac{n+1}{e}$를 얻는다. 마찬가지로 $x = n-1$를 대입하면

$\dfrac{n-1}{e} < \dfrac{(n-1)^n}{n^{n-1}} < \dfrac{n}{e}$ 를 얻고, 최종적으로 구하는 범위는 $\dfrac{(n-1)^n}{n^{n-1}} \le x \le \dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$

이고, $a_n = \dfrac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$으로 놓으면 모든 자연수 n에 대하여 조건을 만족한다. $(a_1 = 0)$

마지막으로,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{n^n}{(n+1)^n}\right)^{1/n} - \left(\frac{(n-1)^n}{n^n}\right)^{1/n}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ 이다. 따라서 구하는 답은 1 이다.

문항 강평

1. 기본적인 문제로 거의 대부분의 응시자가 정확히 풀었을 것입니다.

2. 소재 자체는 기본적인데 계산량이 많이 버거웠습니다. 계산 실수가 나기도 쉬웠습니다.

3. 대학수학을 어느 정도 접해본 경우는 쉽게 풀었을텐데, 저 포함 대부분이 삼각치환으로 풀었을 것 같습니다. 분모가 0이 되기 때문에 극한을 취하지 않은 경우는 아마 확실하게 감점당했을 것이고, 이상적분으로 극한을 취한 경우에도 교과과정 외이기 때문에 점수가 어떻게 부여되었을지 확실하지 않습니다. 수능만 충실히 한 학생이 현장에서 부분적분을 떠올리기는 힘들지 않았나 생각이 듭니다.

4. 이번 논술에서 가장 까다로운 문항으로 생각합니다. 공식 해설(선행학습영향평가)의 해설이 가장 깔끔하지만, 현장에선 좀 발상을 떠올리기 힘들지 않았나 생각이 듭니다. 우선 x를 상수 취급하는 것부터 생소하고, 정수에 대해 방침을 세우는 것이 어렵습니다.

총평: 1, 2, 3은 완벽히 풀고, 4에서 엉망진창으로라도 a_n을 구했다면 합격권으로 생각합니다. 1, 3을 최대한 빠르게, 15분 이내로 끊고, 35분 정도를 2번에, 나머지 시간을 전부 4번에 박는게 최선의 전략이 아니었나 싶습니다.