[준킬러][수학2] 1극한

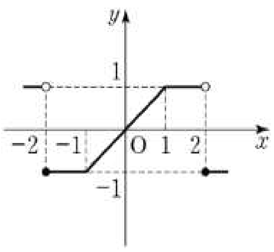
04 수2 01 함수의 극한

01 좌극한과 우극한

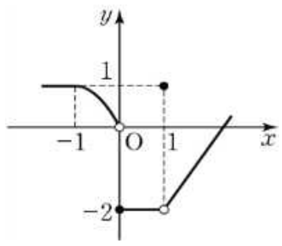
05 좌극한과 우극한5 (합성함수)

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 8

1. 두 함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 일부가 다음 그림과 같고, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4)=f(x)$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



$y=f(x)$



$y=g(x)$

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0} g(f(x))=-2$

ㄴ. $\lim_{x\to 2} g(f(x))=1$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{4} g\left(f\left(2k+\frac{1}{x}\right)\right)=-2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 01 함수의 극한

01 좌극한과 우극한

07 좌극한과 우극한7 (추론)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 12

2. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\le 2) \\ ax+b & (x>2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(\alpha)+\lim_{x\to\alpha+} f(x)=4$ 를 만족시키는 실수 α 의 개수가 4 이고, 이 네 수의 합이 8 이다. $a+b$ 의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$

④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

04 수2 01 함수의 극한

02 극한의 성질과 계산

08 부정형7 (부정형과 극한의 성질)

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 4

3. 다항함수 $g(x)$ 에 대하여 극한값 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$ 가 존재한다. 다항함수 $f(x)$ 가

$$f(x)+x-1=(x-1)g(x)$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 수2 01 함수의 극한

03 극한식의 해석

03 해석3 (차수를 이용한 다항식 결정)

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 19

4. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5,$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 9

5. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2g(x)}{x^2}=1$
(나) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+3g(x)}{x^3}=1$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)+g(x)}{x^3}$의 값은?

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{2}{5}$ ③ $\dfrac{3}{5}$

④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ 1

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 27

6. 다항함수 $f(x)$는 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $2x^2-5x\le f(x)\le 2x^2+2$
(나) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2+2x-3}=\dfrac{1}{4}$

$f(3)$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 06월 28

7. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-5x}{x^2-4}$의 값이 존재한다.
(나) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-3x+1\right)$의 값이 존재한다.

$f(3)$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 20

8. 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

> $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n}=4$인 자연수 n이 존재한다.

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

04 수2 01 함수의 극한

03 극한식의 해석

04 해석4 (인수를 이용한 다항식의 결정)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

9. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(1)=0$
>
> (나) $\lim_{x \to n} \frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$g(5)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 11월 18

10. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{3}{5}$$

을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 17

11. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 0} |x| \left\{ f\left(\frac{1}{x}\right) - f\left(-\frac{1}{x}\right) \right\} = a,$$

$$\lim_{x \to \infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = 3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 14

12. 상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은?

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 20

13. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최댓값을 구하시오.

(가) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|f(x)-1|}{x}$의 값이 존재한다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $xf(x) \geq -4x^2+x$이다.

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

14. 최고차항의 계수가 양수인 다항함수 $f(x)$와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x-1}$의 값이 존재한다.

(나) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{(x-3)g(x)} = k$ (k는 0이 아닌 상수)

(다) $\lim\limits_{x \to -3+} \dfrac{1}{g'(x)} = \infty$

$f(x)$의 차수의 최솟값이 m이다. $f(x)$의 차수가 최소일 때, $m+k$의 값은?

① $\dfrac{10}{3}$ ② $\dfrac{43}{12}$ ③ $\dfrac{23}{6}$ ④ $\dfrac{49}{12}$ ⑤ $\dfrac{13}{3}$

04 수2

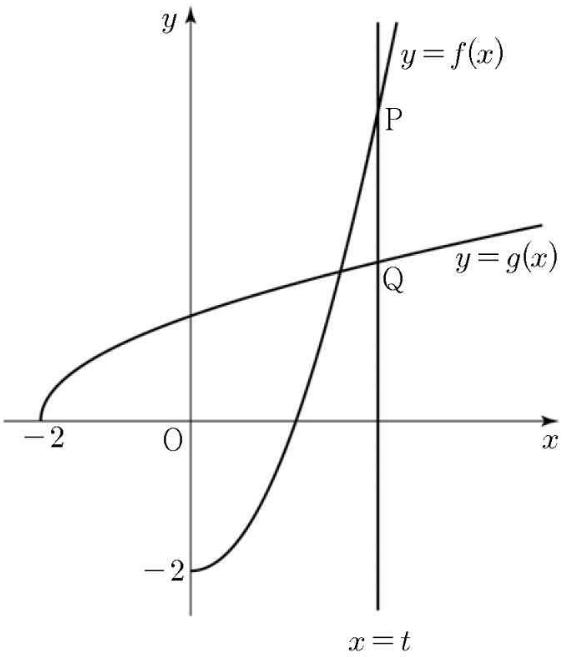
01 함수의 극한

04 극한의 활용

01 활용1 (좌표와 길이)

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 06월 20

15. 함수 $f(x)=x^2-2\,(x \geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라 하고, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 직선 $x=t\,(t>2)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 PQ의 길이를 $h(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t \to 2+} \dfrac{h(t)}{t-2}$의 값은?

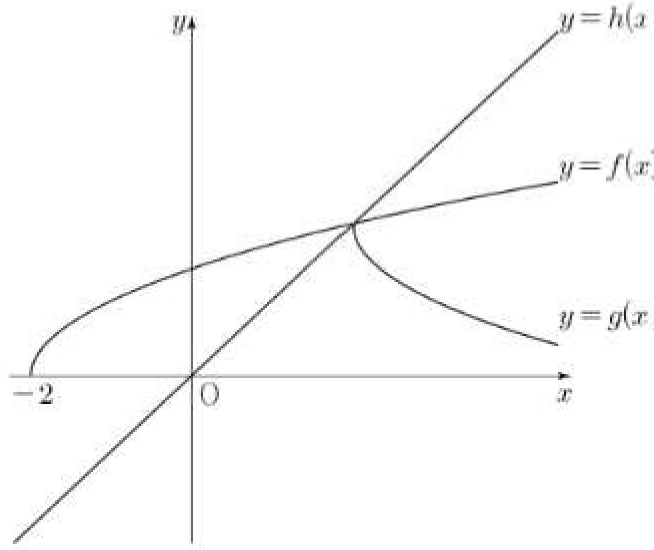


① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{11}{4}$

④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 14

16. 세 함수 $f(x)=\sqrt{x+2}$, $g(x)=-\sqrt{x-2}+2$, $h(x)=x$의 그래프가 그림과 같다.



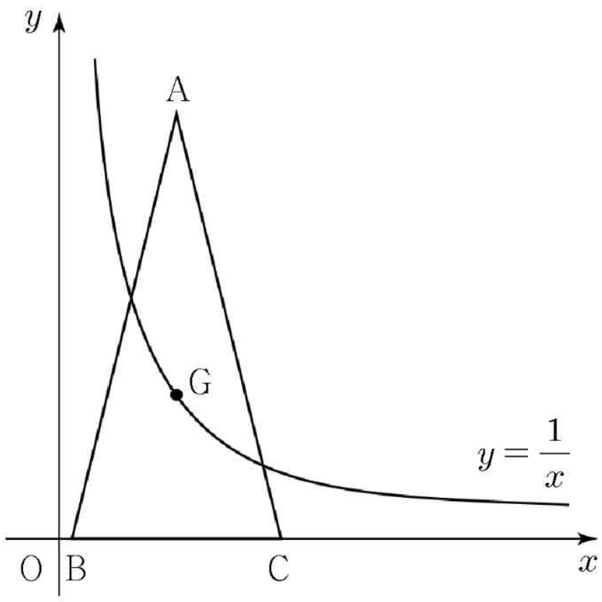
함수 $y=h(x)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(a, a)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 A, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나는 점을 C라 할 때, $\lim\limits_{a \to 2-} \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값은? (단, $0<a<2$)

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 09월 18

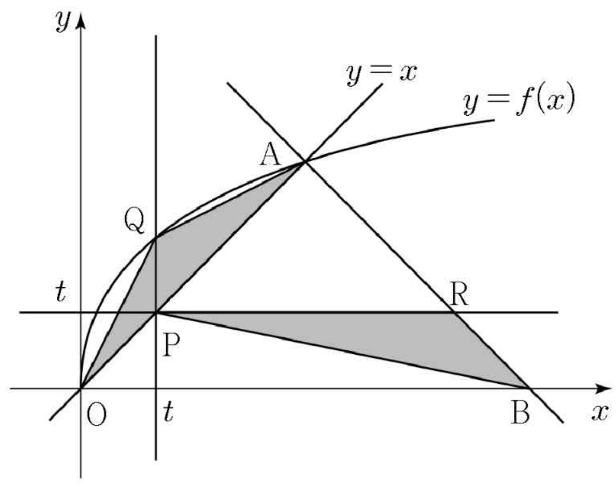
17. 그림과 같이 제 1사분면 위에 있는 점 A와 x축 위의 서로 다른 두 점 B, C를 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 삼각형 ABC의 무게중심 G가 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위에 있다. 점 G의 x좌표가 t, 삼각형 ABC의 넓이가 $3t$일 때, 선분 BC의 길이를 $f(t)$라 하자. $\displaystyle\lim_{t\to1}\frac{f(t)-2t}{t-1}$의 값은?



① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

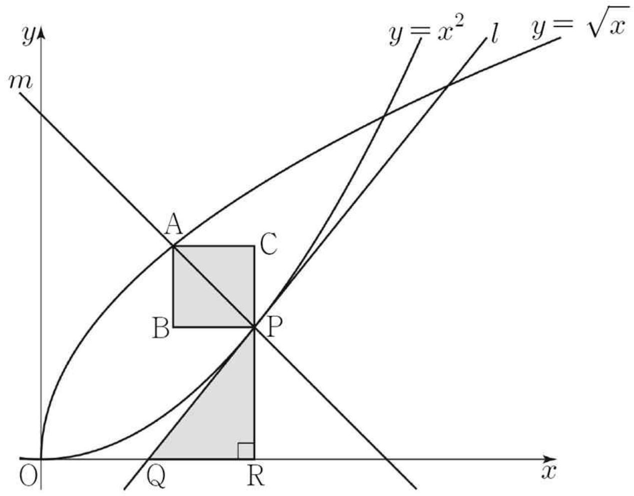
[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 09월 28

18. 그림과 같이 무리함수 $f(x)=\sqrt{x}$의 그래프가 직선 $y=x$와 만나는 두 점 중에서 원점 O가 아닌 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 직선 $y=x$와 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 직선 $x=t$가 직선 $y=x$와 만나는 점을 P, 직선 $x=t$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 Q, 직선 $y=t$가 직선 AB와 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 OAQ와 삼각형 PBR의 넓이를 각각 $S(t)$, $T(t)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to1-}\frac{T(t)}{S(t)}$의 값을 구하시오. (단, $0<t<1$)



[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 18

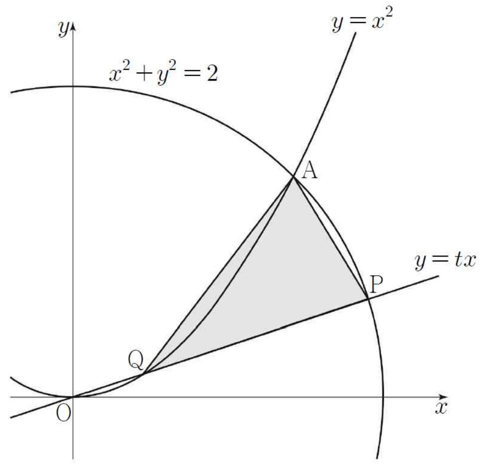
19. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)(0<t<1)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이를 $f(t)$라 하자. 또한, 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선 m이 곡선 $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 A라 할 때, 선분 PA를 대각선으로 하는 정사각형 PCAB의 넓이를 $g(t)$라 하자. $\displaystyle\lim_{t\to0+}\frac{t\times g(t)}{f(t)}$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

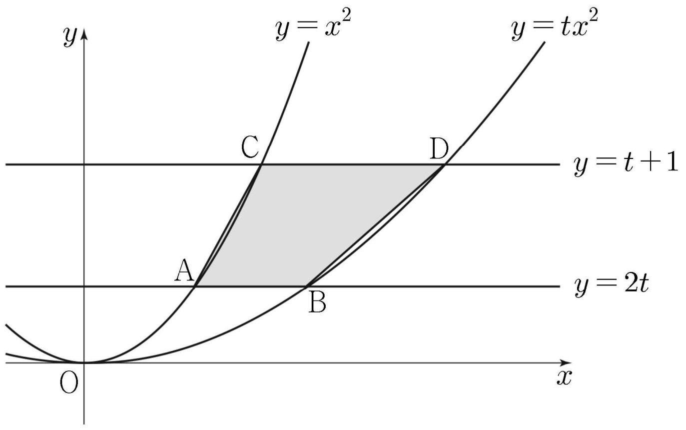
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 28

20. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=2$와 곡선 $y=x^2$이 제 1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 실수 $t\ (0<t<1)$에 대하여 직선 $y=tx$가 원 $x^2+y^2=2$, 곡선 $y=x^2$과 제 1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 PAQ의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}=k$이다. $20k$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 18

21. 그림과 같이 실수 $t\ (0<t<1)$에 대하여 직선 $y=2t$가 두 곡선 $y=x^2$, $y=tx^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=t+1$이 두 곡선 $y=x^2$, $y=tx^2$과 제1사분면에서 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ABDC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 1-} \frac{S(t)}{(1-t)^2}$의 값은?

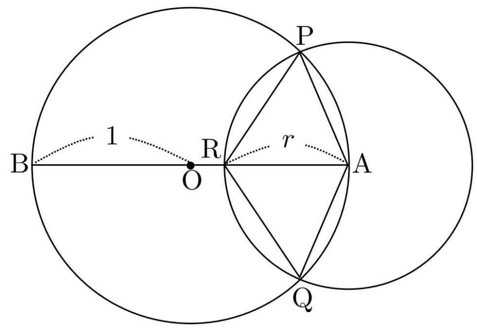


① $\frac{1}{4}$　② $\frac{\sqrt{2}}{4}$　③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ 1

04 수2　01 함수의 극한
04 극한의 활용
02 활용2 (원 관련)

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 16

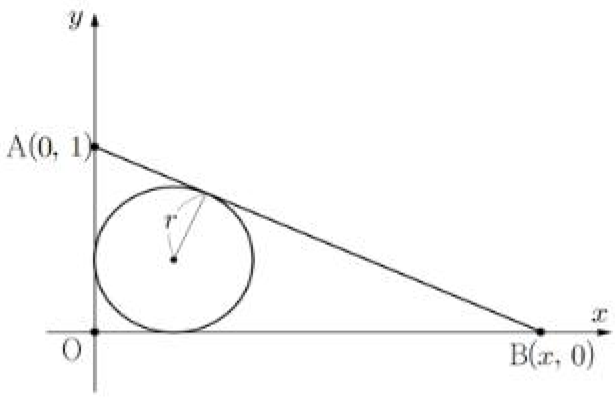
22. 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 한 점 A가 있다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 원 O와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 원 O의 지름 AB와 만나는 점을 R라 하자. 사각형 APRQ의 넓이를 $\mathrm{S}(r)$라 할 때, $\lim_{r \to 2-} \frac{\mathrm{S}(r)}{\sqrt{2-r}}$의 값은? (단, $0<r<2$)



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 9

23. 그림과 같이 세 점 A(0, 1), O(0, 0), B(x, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형과 그 삼각형에 내접하는 원이 있다. 점 B가 x축을 따라 원점에 한없이 가까워질 때, △AOB에 내접하는 원의 반지름의 길이 r에 대하여 $\frac{r}{x}$의 극한값은? (단, $x>0$)

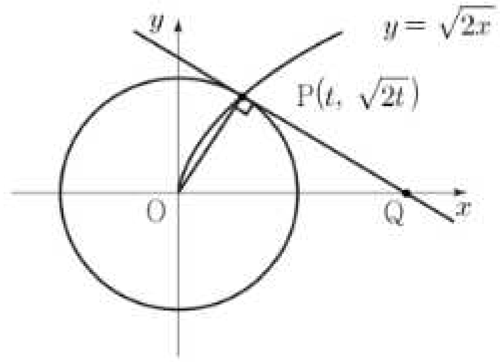


① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 04월 19

24. 그림과 같이 좌표평면에서 곡선 $y=\sqrt{2x}$ 위의 점 P$(t,\ \sqrt{2t})$가 있다. 원점 O를 중심으로 하고 선분 OP를 반지름으로 하는 원을 C, 점 P에서의 원 C의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 원 C의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값은? (단, $t>0$)

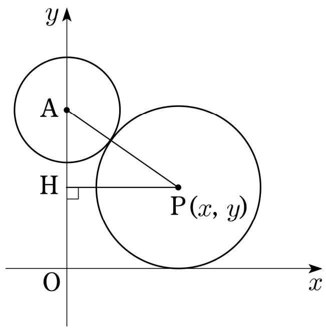


① $\sqrt{2}\pi$　② 2π　③ $2\sqrt{2}\pi$

④ 4π　⑤ $4\sqrt{2}\pi$

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 10월 16

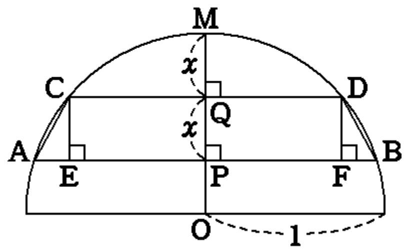
25. 그림과 같이 중심이 A(0, 3)이고 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 x축에 접하는 원의 중심을 P(x, y)라 하자. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{PH}^2}{\overline{PA}}$의 값은?



① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 22

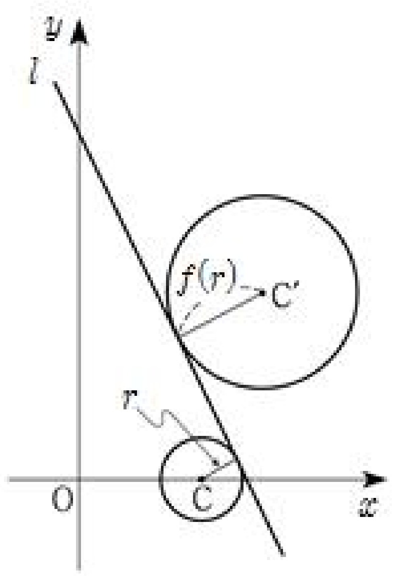
26. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 O인 반원의 호를 이등분하는 점을 M이라 하고, 선분 OM 위의 점 P를 지나고 선분 OM에 수직인 직선과 반원이 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 또, 선분 PM의 중점 Q를 지나고 선분 OM에 수직인 직선과 반원이 만나는 점을 각각 C, D라 하고, 점 C, D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자. $\overline{PM}=2x$일 때, 사다리꼴 ABDC와 직사각형 EFDC의 넓이를 각각 $S(x)$, $T(x)$라 하자. $\lim_{x \to +0} \frac{T(x)}{S(x)}$의 값은?



① $\sqrt{2}-1$ ② $2-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}-1$
④ $2(\sqrt{2}-1)$ ⑤ $2(2-\sqrt{3})$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 20

27. 그림과 같이 중심이 $\mathrm{C}(2, 0)$이고 반지름의 길이가 r $(r<\sqrt{5})$인 원 C가 있다. 기울기가 -2이고 원 C에 접하는 직선을 l이라 하자. 직선 l에 접하고 중심이 $\mathrm{C}'(3, 3)$인 원 C′의 반지름을 $f(r)$라 할 때, $\lim_{r\to 0+} f(r)$의 값은?



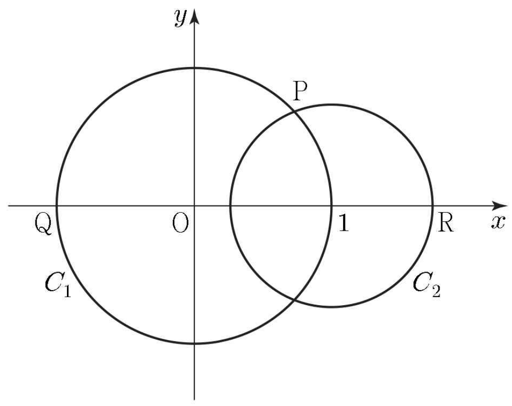
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

그림과 같이 좌표평면 위의 두 원

$C_1 : x^2+y^2=1$

$C_2 : (x-1)^2+y^2=r^2\,(0<r<\sqrt{2})$

이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 다음의 물음에 답하시오.

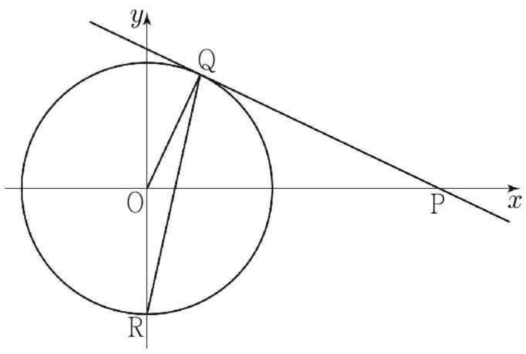


[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 14

28. 점 P의 x좌표를 $f(r)$라 할 때, $\lim_{r\to\sqrt{2}-}\dfrac{f(r)}{4-r^4}$의 값은?

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ 2 ⑤ 4

1보다 큰 실수 t에 대하여 그림과 같이 점 $\mathrm{P}\left(t+\dfrac{1}{t},\ 0\right)$에서 원 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2t^2}$에 접선을 그었을 때, 원과 접선이 제 1사분면에서 만나는 점을 Q, 원 위의 점 $\left(0,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}t}\right)$을 R라 하자. 다음 물음에 답하시오.



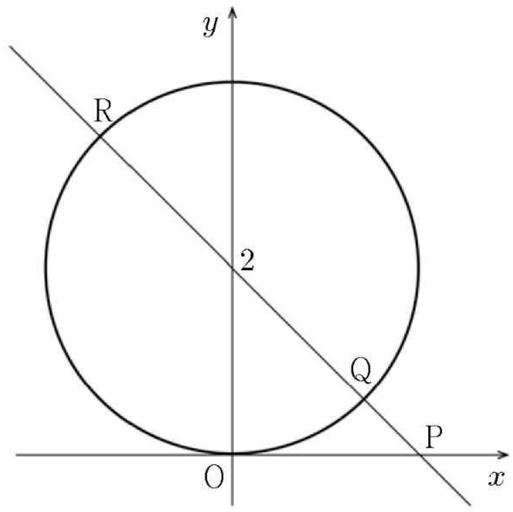
[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 04월 14

29. 삼각형 ORQ의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\{t^4\times S(t)\}$의 값은?

① $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 06월

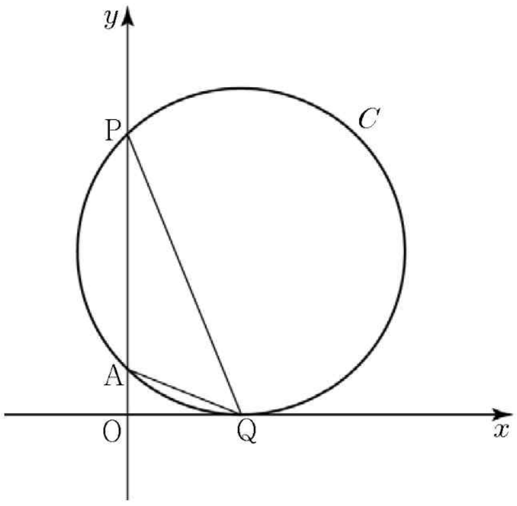
30. 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 $(0,\ 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 양수 t에 대하여 점 $\mathrm{P}(t,\ 0)$과 원의 중심을 지나는 직선이 원과 만나는 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q, 나머지 한 점을 R라 하자.
$\lim_{t\to0+}\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{PQ}}^2}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 06월 15

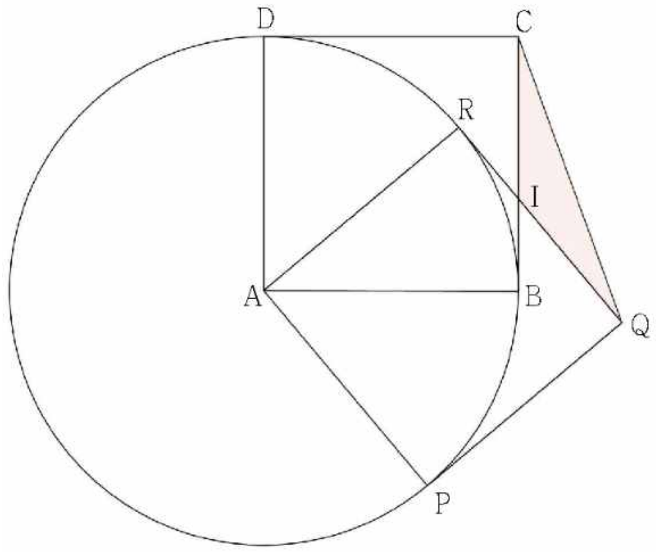
31. 그림과 같이 좌표평면 위의 점 A(0, 1)을 지나고 x축에 접하는 원 C가 있다. 원 C가 y축과 만나는 또 다른 점을 P라 하고, x축과 접하는 점을 Q$(t,\ 0)$이라 하자. 삼각형 APQ의 넓이를 $S(t)$, 원 C의 반지름의 길이를 $r(t)$라 할 때, $\lim_{t \to \infty} \frac{S(t)}{t \times r(t)}$의 값은? (단, $t>1$이다.)



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

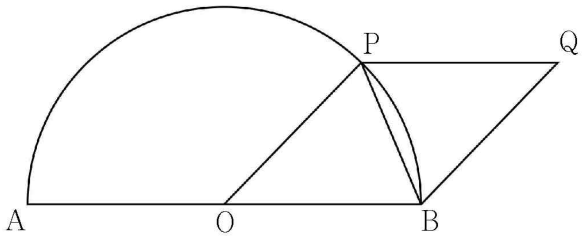
[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 06월 30

32. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD와 점 A가 중심이고 선분 AB를 반지름으로 하는 원이 있다. 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 사각형 APQR가 정사각형이 되도록 원 위에 점 R와 원의 외부에 점 Q를 잡는다. 그림과 같이 선분 BC와 선분 QR가 만나도록 할 때, 선분 BC와 선분 QR의 교점을 I라 하자. 삼각형 IQC의 둘레의 길이를 L, 넓이를 S라 할 때, 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $\frac{L^2}{S}$의 값이 $a+b\sqrt{2}$에 한없이 가까워진다. a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이다.)



[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 19

33. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 선분 AB의 중점 O가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선과 점 B를 지나고 직선 OP와 평행한 직선이 만나는 점을 Q라 하자. $\overline{BP}=t$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{3-\overline{AQ}}{t^2}$의 값은? (단, $0<t<\sqrt{2}$)



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

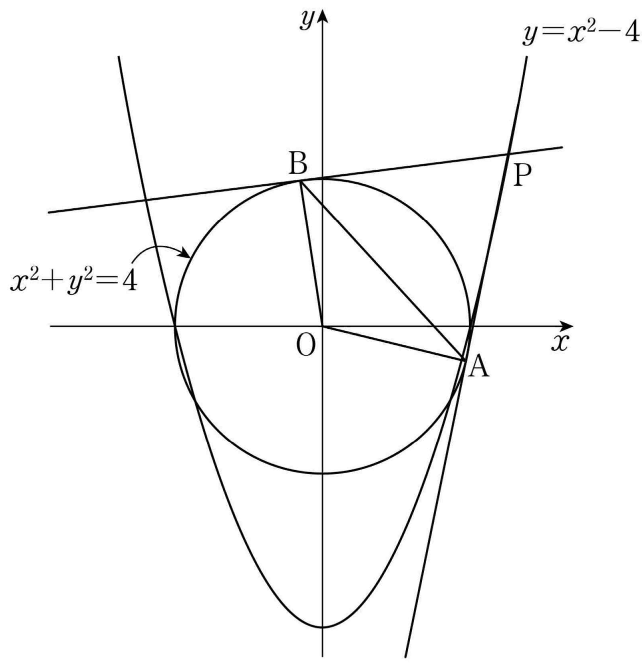
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 12

34. 곡선 $y=x^2-4$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2-4)$에서 원 $x^2+y^2=4$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$, 삼각형 PBA의 넓이를 $T(t)$라 할 때,

$$\lim_{t\to 2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)}$$

의 값은? (단, O는 원점이고, $t>2$이다.)

① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2



04 수2 01 함수의 극한

04 극한의 활용

04 활용4 (정의된 함수)

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 24

35. x가 양수일 때, x보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수를 $f(x)$라 하고, 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>2f(x)) \\ \dfrac{1}{f(x)} & (x \le 2f(x)) \end{cases}$$

라고 하자. 예를 들어, $f\left(\frac{7}{2}\right)=2$이고 $\frac{7}{2}<2f\left(\frac{7}{2}\right)$이므로 $g\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}$이다. $\lim_{x\to 8+} g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to 8-} g(x)=\beta$라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 경찰대 고3 07월 16

36. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=-\frac{1}{2}$이 만나는 점을 A, B라 하자. 점 P(0, t)$\left(t\neq-\frac{1}{2}\right)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 C의 개수를 $f(t)$라 하자.

> (가) C는 A나 B가 아닌 원 위의 점이다.
>
> (나) A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 A, B, P를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이와 같다.

$f(a)+\lim_{t\to a-} f(t)=5$이고 $\lim_{t\to 0-} f(t)=b$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 30

37. 실수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases}2^{x-2} & (x<2)\\ 2^{-x+2} & (x\geq 2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-k|+k$라 하자. 직선 $y=2k$와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(k)$라 할 때, $\lim\limits_{k\to\frac{1}{4}-}\left\{h(k)h\left(k+\frac{1}{4}\right)\right\}$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 21

38. 세 실수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-|2x+a| & (x<0)\\ x^2+bx+c & (x\geq 0)\end{cases}$$

이고, 함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 각각 $g(t)$, $h(t)$라 할 때, 두 함수 $g(t)$, $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 치역은 $\{1, 2, 3, 4\}$이다.
(나) $\lim\limits_{t\to 2-}h(t)\times\lim\limits_{t\to 2+}h(t)=12$

$f(-2)+f(6)$의 값은?

① 12　② 14　③ 16
④ 18　⑤ 20

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 20

39. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=\left|\dfrac{kx}{x-1}\right|$라 하자. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가

$$\lim_{t\to 0+} g(t)+\lim_{t\to 2-} g(t)+g(4)=5$$

를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① 6 ② $\dfrac{15}{2}$ ③ 9

④ $\dfrac{21}{2}$ ⑤ 12

04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

02 연속성2 (연속성 판단)

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

40. 두 함수 $f(x)=[x]$, $g(x)=\sin\pi x$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $(f\circ g)(x)$는 모든 정수에서 연속이다.
ㄷ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

03 연속성3 (연속조건 해석)

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 09월 17

[출처] 2020 일반_시중교재 희망에듀 임정선 마플시너지

[출처] 2020 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

41. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 에 대하여

$x<0$ 일 때, $f(x)+g(x)=x^2+4$

$x>0$ 일 때, $f(x)-g(x)=x^2+2x+8$

이다. 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이고 $\lim_{x\to 0-} g(x)-\lim_{x\to 0+} g(x)=6$ 일 때, $f(0)$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 3

04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

05 연속성5 (구간정의함수)

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 09월 29

42. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+3 & (x\ge 1) \\ -x^2+2bx-3 & (x<1) \end{cases}$$

의 역함수가 존재하도록 하는 두 실수 a, b 에 대하여 $3a+2b$ 의 최댓값을 구하시오.

04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

06 연속성6 (점정의함수)

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 23

43. $f(x)$가 다항함수일 때, 모든 실수에서 연속인 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-x^2}{x-1} & (x \neq 1) \\ k & (x=1) \end{cases}$$

로 정의하자. $\lim_{x\to\infty} g(x)=2$일 때, $k+f(3)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수)

[출처] 2016 모의_공공 경찰대 고3 07월 6

44. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-a}{\sqrt{x^2+b}-\sqrt{c^2+b}} & (x \neq c) \\ 4c & (x=c) \end{cases}$$

가 $x=c$에서 연속이 되도록 하는 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 최솟값은?

① 0 ② $-\dfrac{1}{8}$ ③ $-\dfrac{1}{4}$

④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ -1

04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

08 연속성8 (주기함수)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 11

45. 두 정수 a, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 4$에서 $f(x) = ax^2 + bx - 24$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이다.

$1 < x < 10$일 때, 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다. $a+b$의 값은?

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

09 연속성9 (함수의 사칙연산)

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월 18

46. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1, \ \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = k$$

를 만족시키고, 함수 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & (x \le 2) \\ 2-x & (x > 2) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x) = f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 30

47. 함수 $f(x)=x^2-8x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 2x+5a & (x \geq a) \\ f(x+4) & (x < a) \end{cases}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

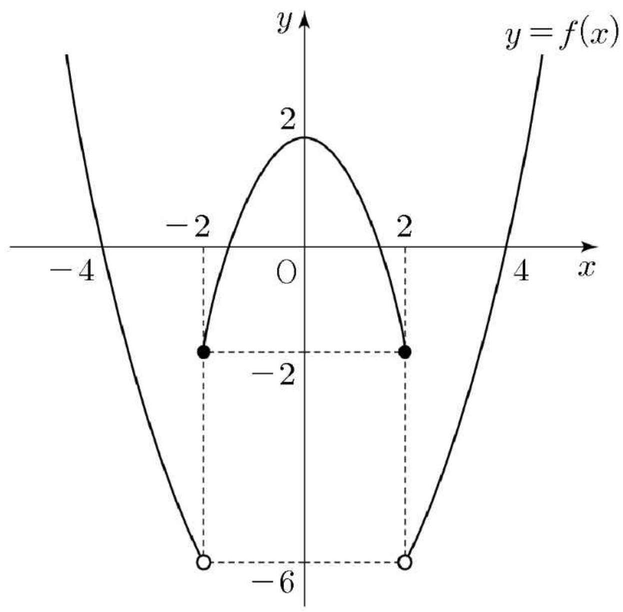
(나) 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 09월 17

48. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-8 & (|x|>2) \\ -x^2+2 & (|x|\leq 2) \end{cases}$$

의 그래프가 그림과 같다.



함수 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 k의 값의 곱은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 10

49. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5a & (x<a) \\ -2x+4 & (x \ge a) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $f(-x)f(x)$가 $x=a$에서 연속이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

10 연속성10 (합성함수)

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 11

50. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서

$$f(x)=(x-1)(2x-1)(x+1)$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이다. $a>1$에 대하여 함수 $g(x)$가

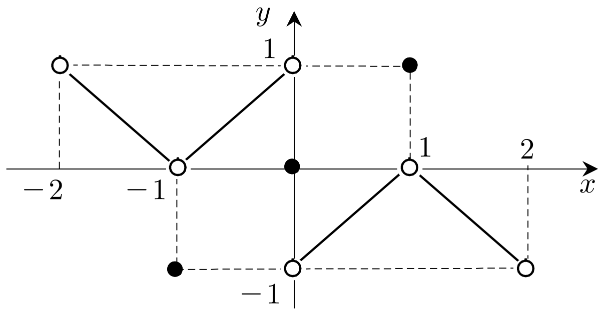
$$g(x)=\begin{cases} x & (x \ne 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$$

일 때, 합성함수 $(f \circ g)(x)$가 $x=1$에서 연속이다. a의 최솟값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 10

51. 열린구간 $(-2,\ 2)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 0+} f(x) = -1$

ㄴ. 함수 $(f \circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

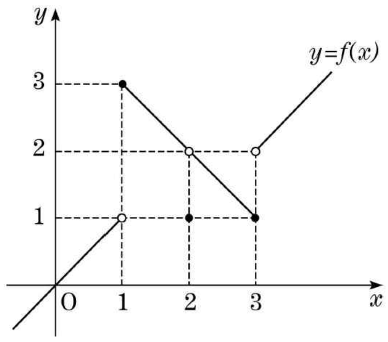
ㄷ. $-2<a<2$ 인 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)f(-x)$의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 03월 30

52. 다음 그림은 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 함수 $f(x)$는 $x=1, x=2, x=3$에서만 불연속이다. 이차함수 $g(x)=x^2-4x+k$에 대하여 함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=2$에서 불연속이 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오.



04 수2 02 함수의 연속성

01 함수의 연속성

11 연속성11 (추론과 해석)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 11

53. 모든 실수에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{x-1} & (|x|>1) \\ \dfrac{a}{1-x} & (|x|<1) \\ \dfrac{a}{2} & (|x|=1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 a의 값이 존재한다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=a$는 한 개의 실근을 갖는다. (단, $a\neq 0$)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 21

54. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.

(나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은?

① $\dfrac{5}{13}$ ② $\dfrac{5}{14}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{5}{16}$ ⑤ $\dfrac{5}{17}$

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 29

55. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x & (x \ge 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오.
(단, a, b, c는 상수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 12

56. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\dfrac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 8

57. 자연수 n과 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x^2}=2$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{f(x)} & (f(x)\neq 0) \\ \dfrac{1}{n} & (f(x)=0) \end{cases}$$

이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 n의 최솟값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

04 수2 02 함수의 연속성

02 연속함수의 성질과 활용

02 불연속 후보군2 (연속X불연속)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 07월 28

58. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x-2} & (x\neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$$

와 이차함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $g(0)=8$
(나) 함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

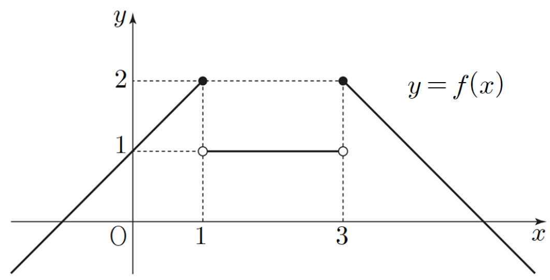
이때 $g(6)$의 값을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 11월 14

59. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (1<x<3) \\ 3-|x-2| & (x\leq 1,\ x\geq 3) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(2)$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3

④ -4 ⑤ -5

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 21

60. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x\le -1) \\ 1 & (-1<x\le 1) \\ x-1 & (x>1) \end{cases}$$

이고 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
>
> (나) 함수 $f(x)g(x+k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 k가 존재한다. (단, $k\neq 0$)

$g(0)<0$일 때, $g(2)$의 값은?

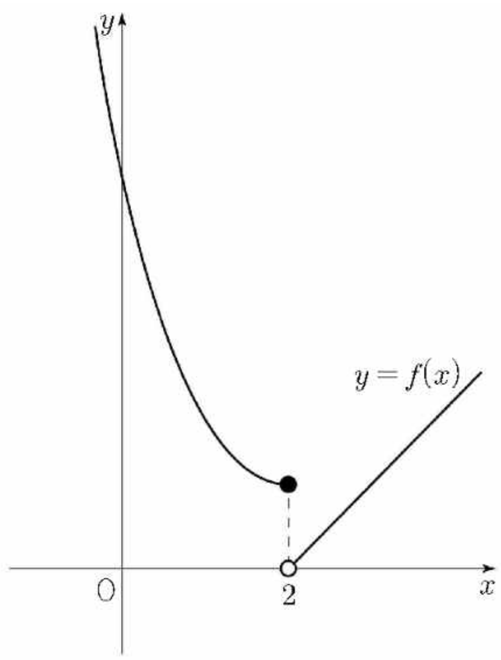
① 3 ② 6 ③ 9
④ 12 ⑤ 15

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 06월 16

61. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+5 & (x\le 2) \\ x-2 & (x>2) \end{cases}$$

와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(5)$의 값은?



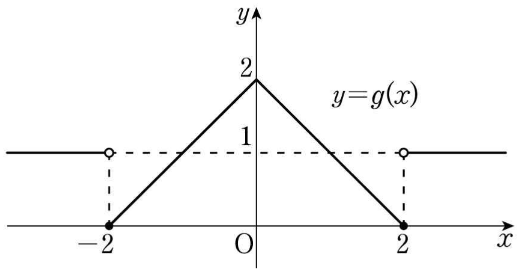
① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 14

62. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}-|x|+2 & (|x|\le 2)\\ 1 & (|x|>2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y=f(x-a)g(x)$의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?



① -16 ② -12 ③ -8
④ -4 ⑤ -1

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 29

63. 5이하의 두 자연수 a, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=x^2-2ax+a^2-a+1$$

$$g(x)=\begin{cases}x+b & (1<x<3)\\ 7-b & (x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 3)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 12

64. 다항함수 $f(x)$는 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$을 만족시키고, 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-3} & (x\ne 3)\\ 1 & (x=3)\end{cases}$$

이다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(1)$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 12

65. $a>2$인 상수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\le 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$$

라 하자. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(1)+h(3)$의 값은?

(가) $x\neq 1$, $x\neq a$일 때, $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$이다.

(나) $h(1)=h(a)$

① $-\dfrac{15}{6}$ ② $-\dfrac{7}{3}$ ③ $-\dfrac{13}{6}$

④ -2 ⑤ $-\dfrac{11}{6}$

04 수2 02 함수의 연속성

02 연속함수의 성질과 활용

03 불연속 후보군3 (불연속X불연속)

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 17

66. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (|x|<1) \\ x^2-4|x|+3 & (|x|\ge 1) \end{cases}$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 2개이다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x$는 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a는 없다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 15

67. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3 & (x<0)\\ -2x+2 & (x\geq 0)\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}2x & (x<a)\\ 2x-1 & (x\geq a)\end{cases}$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

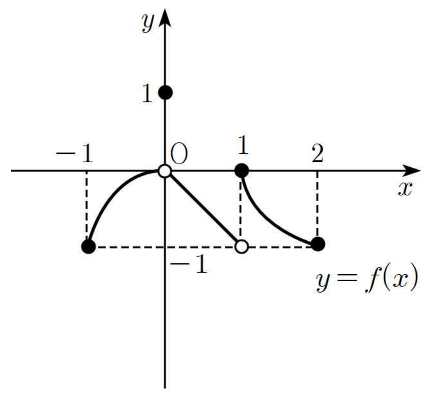
04 수2 02 함수의 연속성

02 연속함수의 성질과 활용

04 불연속 후보군4 (합성함수)

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 10

68. 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음과 같다.



닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$ 를

$$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2},\ h(x)=\frac{f(x)-|f(x)|}{2}$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1}h(x)$ 는 존재한다.

ㄴ. 함수 $(h\circ g)(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이다.

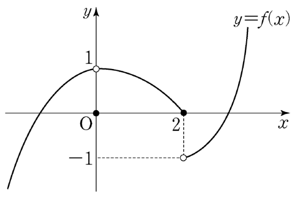
ㄷ. $\lim_{x\to 0}(g\circ h)(x)=(g\circ h)(0)$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 11월 15

69. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, 삼차함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1이고, $g(0)=3$이다. 합성함수 $(g \circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(3)$의 값은?

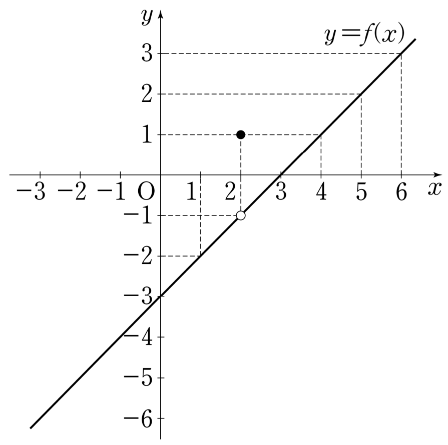


① 31 ② 30 ③ 29

④ 28 ⑤ 27

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 09월 6

70. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



합성함수 $(f \circ f)(x)$가 $x=a$에서 불연속이 되는 모든 a의 값의 합은? (단, $0 \le a \le 6$이다.)

① 3 ② 4 ③ 5

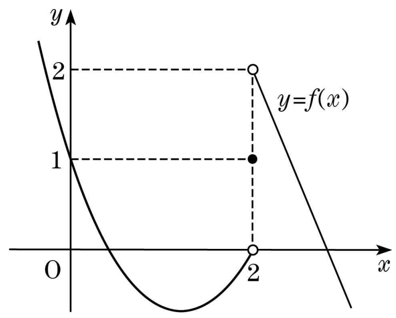
④ 6 ⑤ 7

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 10월 25

71. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다. 함수

$$g(x)=ax^3+bx^2+cx+10\ (a,\ b,\ c \text{는 상수})$$

에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $g(1)+g(2)$ 의 값을 구하시오.



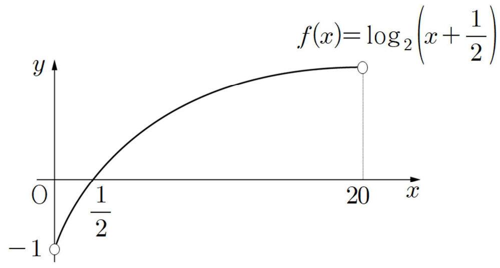
04 수2 02 함수의 연속성

02 연속함수의 성질과 활용

05 불연속 후보군5 (불연속점의 개수)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 17

72. $0<x<20$ 에서 정의된 함수 $y=f(x)$ 가 다음과 같다.



함수 $g(x)=[x]^2-[x]$ 에 대하여 합성함수 $y=g(f(x))$ 의 불연속점의 개수는?
(단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 11

73. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & (x<1) \\ 1 & (x=1) \\ -x^2+2x+1 & (x>1) \end{cases}$$

에 대한 설명 중 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to 1}|f(x)|=2$

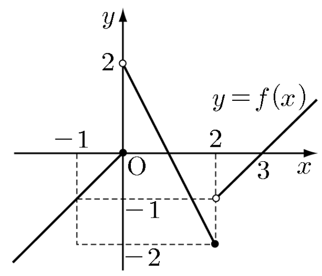
ㄴ. $\lim_{x\to 2+} f(f(x))=-2$

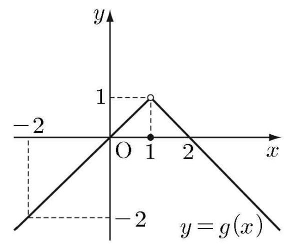
ㄷ. 함수 $y=f(f(x))$의 불연속점의 개수는 3개이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 8

74. 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?





<보 기>

ㄱ. $g(f(0))=0$

ㄴ. $y=g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $-1\le x\le 3$에서 $y=g(f(x))$가 불연속인 x의 값은 2개이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

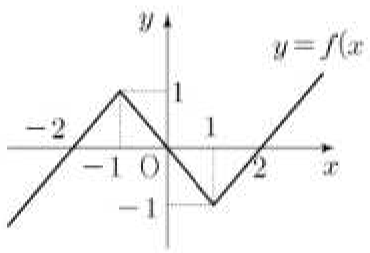
[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 15

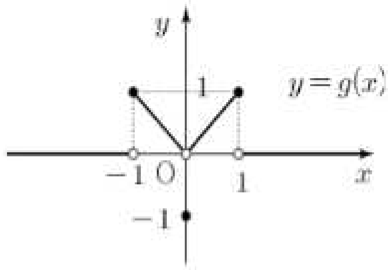
75. 그래프는 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & (x>1) \\ -x & (|x|\le 1), \\ x+2 & (x<-1) \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} |x| & (0<|x|\le 1) \\ -1 & (x=0) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$$

를 각각 나타낸 것이다.





합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 불연속점의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

[출처] 2018 모의_공공 경찰대 고3 07월 18

76. 함수 $f(x)=[4x]-[6x]+\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{x}{4}\right]$가 $x=a$에서 불연속이 되는 실수 $a\,(0<a<5)$의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

04 수2

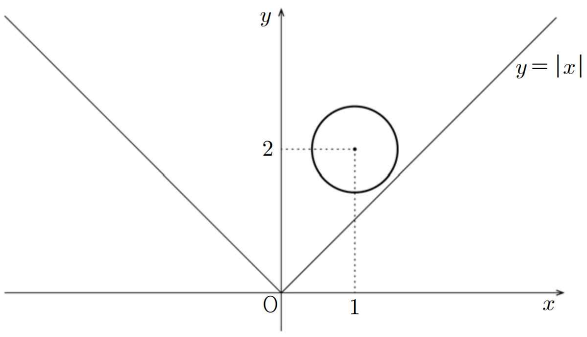
02 함수의 연속성

02 연속함수의 성질과 활용

06 활용1 (교점의 개수로 정의된 함수)

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 06월

77. 양수 r에 대하여 함수 $y=|x|$의 그래프와 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$이 만나는 점의 개수를 $f(r)$라 하자. 함수 $f(r)$가 불연속인 점의 개수는?

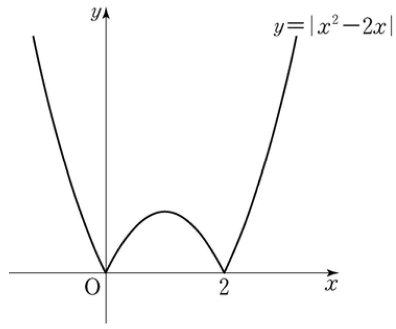


① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 29

78. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오.



[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 21

79. 실수 t에 대하여 두 함수

$$f(x)=(x-t)^2-1,$$

$$g(x)=\begin{cases} -x & (x \le 1) \\ x+2 & (x>1) \end{cases}$$

의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{t \to -1+} h(t)=3$

ㄴ. 함수 $h(t)$는 $t=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속이 되는 모든 a의 값의 합은 $\frac{15}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 06월 21

80. 함수

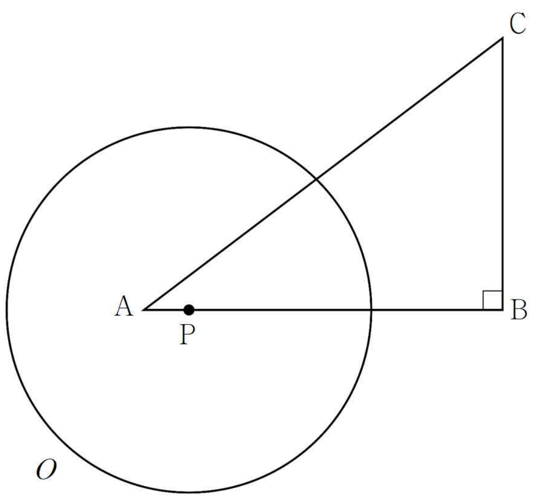
$$f(x)=\begin{cases} x^2+a-1 & (x<0) \\ -x^2+a+7 & (x \ge 0) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 점 $(0, 5)$를 지나고 기울기가 t인 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 29

81. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\angle \mathrm{B}=90^\circ$ 인 삼각형 ABC의 변 AB 위를 움직이는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 O가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}=x$ $(0<x<4)$라 할 때, 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이 되는 모든 실수 a의 값의 합은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 21

82. 실수 t에 대하여 좌표평면에서 집합

$$\{(x,\ y)\,|\,y=x \text{ 또는 } y=(x-a)^2-a\}\ (\text{단, } a\text{는 실수})$$

가 나타내는 도형이 직선 $x+y=t$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a=0$일 때, $f(0)=2$이다.

ㄴ. 함수 $f(t)$는 $t=-\dfrac{1}{4}$에서 불연속이다.

ㄷ. 함수 $f(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속이 되는 실수 α의 개수가 2인 모든 a의 값의 합은 $\dfrac{1}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 28

83. 실수 t에 대하여 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3kx+2 & (x<0) \\ x^2+\dfrac{4}{3k}x-2 & (x\geq 0) \end{cases},$$

$$g(x)=2x+t$$

의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속이 되는 실수 α의 개수가 2가 되도록 양수 k를 정할 때, $150k$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 20

84. 실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오.

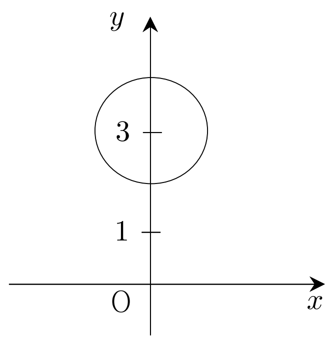
04 수2 02 함수의 연속성

02 연속함수의 성질과 활용

07 활용2 (기타 정의된 함수)

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 9

85. 좌표평면에서 중심이 $(0, 3)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 하자. 양수 r에 대하여 $f(r)$를 반지름의 길이가 r인 원 중에서, 원 C와 한 점에서 만나고 동시에 x축에 접하는 원의 개수라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $f(2)=3$

ㄴ. $\lim_{r\to 1+} f(r)=f(1)$

ㄷ. 구간 $(0, 4)$에서 함수 $f(r)$의 불연속점은 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 11월 8

86. 실수 a에 대하여 집합

$$\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x\text{는 실수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=f(0)$

ㄴ. $\lim_{a\to c+} f(a) \neq \lim_{a\to c-} f(a)$인 실수 c는 2개이다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 06월 21

87. 좌표평면에서 반지름의 길이가 t인 원 $x^2+y^2=t^2$의 내부에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 예를 들어, $f(1)=1$이고 $f(\sqrt{2})=5$이다.
$0<t<6$인 실수 t에 대하여 함수 $f(t)$가 불연속이 되는 t의 개수는?

① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 24

88. 좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C와 두 점 A(3, 3), B(0, -1)이 있다.
실수 t $(0<t\leq 4)$에 대하여 $f(t)$를 집합
$\{X \mid X$는 원 C 위의 점이고, 삼각형 ABX의 넓이는 $t\}$
의 원소의 개수라 하자. 함수 $f(t)$가 연속하지 않은 모든 t의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 15

89. 좌표평면에서 정삼각형 ABC에 내접하는 반지름의 길이가 1인 원 S가 있다. 실수 t $(0\leq t\leq 1)$에 대하여 삼각형 ABC 위의 점 P와 원 S의 거리가 t인 점 P의 개수를 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$가 $t=k$에서 불연속인 k의 개수를 a, $\lim_{t\to 1-} f(t)=b$라 할 때, $a+b$의 값은? (여기서, 점 P와 원 S 위의 점 X에 대하여 선분 PX의 길이의 최솟값이다.)

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

04 수2 02 함수의 연속성

03 사잇값 정리

03 사잇값 정리2 (활용)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 09월 20

90. 2가 아닌 양수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2 & (x \le a) \\ (x-2)(x-a) & (x > a)\end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3a)$의 값은?

(가) $f(c)=0$인 c가 0과 $1+\dfrac{a}{2}$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

(나) 세 점 $(2,\ f(2))$, $(a,\ f(a))$, $\left(1+\dfrac{a}{2},\ f\left(1+\dfrac{a}{2}\right)\right)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{8}$이다.

① 2 ② 4 ③ 8

④ 16 ⑤ 32

[준킬러][수학2] 1극한(빠른 정답)

준킬러수2 2023.01.06

1. [정답] ④
2. [정답] ①
3. [정답] ①
4. [정답] **10**
5. [정답] ③

6. [정답] **10**
7. [정답] **60**
8. [정답] ③
9. [정답] ⑤
10. [정답] ④

11. [정답] ④
12. [정답] ③
13. [정답] 226
14. [정답] ④
15. [정답] ⑤

16. [정답] ②
17. [정답] ③
18. [정답] **4**
19. [정답] ④
20. [정답] **15**

21. [정답] ④
22. [정답] ④
23. [정답] ⑤
24. [정답] ④
25. [정답] ④

26. [정답] ④
27. [정답] ⑤
28. [정답] ①
29. [정답] ①
30. [정답] ①

31. [정답] ②
32. [정답] **208**
33. [정답] ②
34. [정답] ②
35. [정답] **16**

36. [정답] ③
37. [정답] **4**
38. [정답] ①
39. [정답] ①
40. [정답] ③

41. [정답] ⑤
42. [정답] **12**
43. [정답] **15**
44. [정답] ①
45. [정답] ④

46. [정답] ②
47. [정답] **56**
48. [정답] ③
49. [정답] ①
50. [정답] ②

51. [정답] ⑤
52. [정답] 13
54. [정답] ①
55. [정답] 20

56. [정답] ③
57. [정답] ①
58. [정답] **32**
59. [정답] ①
60. [정답] ⑤

61. [정답] ③
62. [정답] ①
63. [정답] **7**
64. [정답] ①
65. [정답] ③

66. [정답] ③
67. [정답] ④
68. [정답] ①
69. [정답] ⑤
70. [정답] ⑤

71. [정답] **20**
72. [정답] ④
73. [정답] ⑤

74. [정답] ⑤
75. [정답] ②

76. [정답] ②
77. [정답] ③
78. [정답] 8
79. [정답] ③
80. [정답] ②

81. [정답] 19
82. [정답] ⑤
83. [정답] 100
84. [정답] 8
85. [정답] ④

86. [정답] ④
87. [정답] ②
88. [정답] 5
89. [정답] ③
90. [정답] ①

[준킬러][수학2] 1극한(해설)

준킬러수2 2023.01.06

1) [정답] ④

[해설]

ㄱ. $x\to0-$일 때, $f(x)\to0-$이므로

$\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{t\to0-}g(t)=0$

$x\to0+$일 때, $f(x)\to0+$이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{t\to0+}g(t)=-2$

$\lim_{x\to0-}g(f(x))\neq\lim_{x\to0+}g(f(x))$이므로

$\lim_{x\to0}g(f(x))$는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $x\to2-$일 때, $f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to2+}g(f(x))=g(1)=1$

$x\to2+$일 때, $f(x)=-1$이므로 $\lim_{x\to2+}g(f(x))=g(-1)=1$

$\therefore\ \lim_{x\to2+}g(f(x))=1$ (참)

ㄷ. $x\to\infty$일 때, $\frac{1}{x}\to+0$이므로

$\lim_{x\to\infty}g\left(f\left(2k+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{t\to2k+}g(f(x))$

또, $f(x+4)=f(x)$이므로 $\lim_{t\to6+}g(f(t))=\lim_{t\to2+}g(f(t))=1$

$\lim_{t\to8+}g(f(t))=\lim_{t\to4+}g(f(t))=\lim_{t\to0+}g(f(t))=-2$

$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{4}g\left(f\left(2k+\frac{1}{x}\right)\right)$

$=\lim_{t\to2+0}g(f(t))+\lim_{t\to4+0}g(f(t))+\lim_{t\to6+0}g(f(t))+\lim_{t\to8+0}g(f(t))$

$=1+(-2)+1+(-2)=-2$ (참)

2) [정답] ①

[해설]

(ⅰ) $\alpha=2$일 때,

$f(\alpha)=f(2)=5,\ \lim_{x\to\alpha+}f(x)=\lim_{x\to2+}(ax+b)=2a+b$

이므로 $5+(2a+b)=4$에서

$2a+b=-1$ …… ㉠

(ⅱ) $\alpha\neq2$일 때,

$f(\alpha)=\lim_{x\to\alpha+}f(x)$이므로 $f(\alpha)=2$

$\alpha<2$일 때, $f(\alpha)=\alpha^2+1=2$

$\therefore\alpha=-1$ 또는 $\alpha=1$

$\alpha>2$일 때, $f(\alpha)=a\alpha+b=2$ …… ㉡

이상에서 $f(\alpha)+\lim_{x\to\alpha+}f(x)=4$를 만족시키는 실수 α의 개수가 4이고, 이 네 수의 합이 8이어야 하므로 $\alpha>2$일 때의 α의 값은 6이어야 한다.

$\alpha=6$을 ㉡에 대입하면 $6a+b=2$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하면 $a=\frac{3}{4},\ b=-\frac{5}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{7}{4}$

3) [정답] ①

[해설]

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$의 극한값이 존재하고 $x\to1$ 일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 하고, $g(x)$는 다항함수이므로 연속이다. 그러므로

$\lim_{x\to1}\{g(x)-2x\}=g(1)-2=0$

$\therefore g(1)=2$ …… ㉠

$f(x)+x-1=(x-1)g(x)$에서

$f(x)=(x-1)\{g(x)-1\}$ …… ㉡

따라서 ㉠과 ㉡에 의해

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{g(x)-1\}g(x)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\{g(x)-1\}g(x)}{x+1}$$

$$=\frac{\{g(1)-1\}g(1)}{2}$$

$$=\frac{(2-1)\cdot2}{2}=1$$

4) [정답] 10

[해설]

$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}$ 에서 $\frac{1}{x}=t$라 하면

$x\to0+$일 때 $t\to\infty$ 이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{t^2+1}=5$$

따라서 $f(t)=t^3+5t^2+at+b$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$ 에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to1}f(x)=1+5+a+b=0$

$\therefore a+b=-6$ …… ㉠

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+5x^2+ax+b}{(x+2)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+6x+a+6)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x+a+6}{x+2}$

$=\frac{a+13}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore a=-12$

따라서 ㉠에서 $b=6$이므로

$f(x)=x^3+5x^2-12x+6$

$\therefore f(2)=10$

5) [정답] ③

[해설]

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{x^2}=1$이므로

$f(x)-2g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}=1$이므로

$f(x)+3g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$\{f(x)+3g(x)\}-\{f(x)-2g(x)\}=5g(x)$이므로

$g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{5}$인 삼차함수이다.

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^3}=\frac{1}{5}$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+g(x)}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}-\frac{2g(x)}{x^3}\right\}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+3g(x)}{x^3}-2\times\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^3}$

$=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

6) [정답] 10

[해설]

조건 (가)에서 부등식의 각 변을 x^2으로 나누면

$\frac{2x^2-5x}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{2x^2+2}{x^2}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2}{x^2}=2$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

조건 (나)에서 $f(1)=0$

$f(x)=2(x-1)(x+a)$라 하자.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(x+a)}{(x-1)(x+3)}$

$=\frac{2(1+a)}{4}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ a=-\frac{1}{2},\ f(x)=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

따라서 $f(3)=10$

7) [정답] 60

[해설]

(가)에서 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-5x}{x^2-4}$ 의 값이 존재하므로 (분모)$\to0$ 이면 (분자)$\to0$ 이다.

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-5x}{x^2-4}$ 에서 $\lim_{x\to2}(x^2-4)=0$이고

$\lim_{x\to-2}(x^2-4)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(f(x)-5x)=0$이고 $\lim_{x\to-2}(f(x)-5x)=0$이다.

즉, $f(2)-10=0$, $f(-2)+10=0$ 이다.

$f(x)$가 다항함수이므로 $f(x)-5x=(x+2)(x-2)g(x)$라 하자. (단, $g(x)$는 다항식)

(나)에서 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-3x+1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{f(x)}-(3x-1)\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(3x-1)^2}{\sqrt{f(x)}+3x-1}$

의 값이 존재하기 위해서는 분모의 차수가 분자의 차수보다 크거나 같아야 하므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 9인 이차함수가 되어야 한다.

따라서 $f(x)-5x=9(x+2)(x-2)$이므로 $f(3)=60$ 이다.

8) [정답] ③

[해설]

(i) $n=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$$

를 만족시키려면

$f(x)=4x^3+3x^2+ax$ (a는 상수)

의 꼴이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(4x^2+3x+a)=a$$

이므로 $a=4$

즉, $f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로

$f(1)=4+3+4=11$

(ii) $n=2$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=4$$

를 만족시키려면

$f(x)=10x^3+bx^2$ (b는 상수)

의 꼴이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}(10x+b)=b$$

이므로 $b=4$

즉, $f(x)=10x^3+4x^2$이므로

$f(1)=10+4=14$

(iii) $n\geq 3$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$$

를 만족시키려면

$f(x)=6x^{n+1}+cx^n$ (c는 상수)

의 꼴이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}(6x+c)=c$$

이므로 $c=4$

즉, $f(x)=6x^{n+1}+4x^n$이므로

$f(1)=6+4=10$

(i)~(iii)에 의하여 구하는 $f(1)$의 최댓값은 14

9) [정답] ⑤

[해설]

$n=1$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ……㉠

$n=2$일 때, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ……㉡

$n=3$일 때, $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=2$ ……㉢

$n=4$일 때, $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{g(x)}=6$ ……㉣

조건 ㈎에서 $g(1)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는 $g(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$로 놓을 수있다.

따라서 ㉠, ㉡에서 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$이고

㉢에서 $\frac{f(3)}{g(3)}=\frac{2}{9+3a+b}=2$이므로 $3a+b+8=0$⋯ ㉤

㉣에서 $\frac{f(4)}{g(4)}=\frac{6}{16+4a+b}=6$이므로

$4a+b+15=0$⋯ ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=-7,\ b=13$

$\therefore\ g(x)=(x-1)(x^2-7x+13)$

따라서 구하는 $g(5)$의 값은 $4\times 3=12$

10) [정답] ④

[해설]

$\lim_{x\to a}f(x)\neq 0$ 이면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=1\neq\frac{3}{5}$$ 이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)=0$

따라서 $a=\alpha$ 라 하면

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ 이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)}$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\beta)-1}{(x-\beta)+1}$$

$$=\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta+1}=\frac{3}{5}$$

즉, $5(\alpha-\beta)-5=3(\alpha-\beta)+3$

$2(\alpha-\beta)=8$ 이므로 $|\alpha-\beta|=4$

11) [정답] ④

[해설]

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+cx+d$(단, c와 d는 상수이다.)

$\lim_{x\to0}|x|\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}=a$이므로

$\lim_{x\to0+}x\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}=\lim_{x\to0-}(-x)\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}$

$\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{t}=2c$,

$\lim_{t\to-\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{-t}=-2c$

이므로 $c=0$, $a=0$이고 $f(x)=x^2+d$

$\lim_{x\to\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+d\right)=d=3$이므로 $f(x)=x^2+3$

따라서 $f(2)=2^2+3=7$

12) [정답] ③

[해설]

$f(x)$, $g(x)$가 다항함수이면 $f(x)g(x)$도 다항함수이므로 조건 (가)에 의하여

$f(x)g(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to0}f(x)g(x)=\lim_{x\to0}(2x^3+ax^2+bx+c)=c=0$

즉, $f(x)g(x)=2x^3+ax^2+bx$이고

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3+ax^2+bx}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(2x+a+\frac{b}{x}\right)$의 값이 존재하므로 $b=0$이다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3+ax^2}{x^2}=\lim_{x\to0}(2x+a)=a=-4$이므로

$f(x)g(x)=2x^3-4x^2=2x^2(x-2)$

상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(2)$의 값은

$f(x)=2x^2$, $g(x)=x-2$

일 때 최대가 된다.

따라서 구하는 $f(2)$의 최댓값은 $f(x)=2\times2^2=8$

13) [정답] 226

[해설]

조건 (가)에 의하여

$\lim_{x\to0}|f(x)-1|=0$

이므로 삼차식 $f(x)-1$은 x를 인수로 갖는다.

이차식 $g(x)$에 대하여 $f(x)-1=xg(x)$라 하자.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{|f(x)-1|}{x}&=\lim_{x\to0+}\frac{|xg(x)|}{x}\\&=\lim_{x\to0+}\frac{|x||g(x)|}{x}\\&=\lim_{x\to0+}|g(x)|=|g(0)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0-}\frac{|f(x)-1|}{x}&=\lim_{x\to0-}\frac{|xg(x)|}{x}\\&=\lim_{x\to0-}\frac{|x||g(x)|}{x}\\&=-\lim_{x\to0-}|g(x)|=-|g(0)|\end{aligned}$$

$|g(0)|=-|g(0)|$에서 $g(0)=0$

이차식 $g(x)$도 x를 인수로 가지므로

$f(x)-1=x^2(x+a)$ (a는 실수)라 하면

$f(x)=x^3+ax^2+1$

$xf(x)\ge-4x^2+x$에서

$x(x^3+ax^2+1)\ge-4x^2+x$

$x^4+ax^3+4x^2\ge0$

$x^2(x^2+ax+4)\ge0$

$x^2\ge0$이므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2+ax+4\ge0$이 성립한다.

이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-16\le0$

$-4\le a\le4$

$f(5)=25a+126$이므로 구하는 $f(5)$의 최댓값은

$a=4$일 때 226이다.

14) [정답] ④

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 함수가 $g(x)$이므로

$g(x)=f(-x)$ …… ㉠

조건 (가)에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}$의 극한값이 존재하고

(분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)=0$

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(1)=0$ …… ㉡

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{(x-3)g(x)}=k$에서 $k\neq0$이므로 $f(3)=0$ …… ㉢

$\lim_{x\to-3+}\frac{1}{g'(x)}=\infty$에서 $\lim_{x\to-3+}g'(x)=0$이므로

$\lim_{x\to3-}f'(x)=0$ 즉, $f'(3)=0$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에서 $f(x)=(x-1)(x-3)^2Q(x)$라 할 수 있다.

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{(x-3)g(x)}=k$에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-3)^2Q(x)}{(x-3)(-x-1)(-x-3)^2Q(-x)}=k$$

$$\lim_{x\to3}\frac{(x-1)(x-3)Q(x)}{(x+1)(x+3)^2Q(-x)}=k \quad \cdots\cdots ㉤$$

그런데 $k\neq0$이므로 분모가 $(x-3)$이라는 인수를 가지고 있어야 한다. 따라서 $Q(-x)=(x-3)q_1(x)$

즉, $Q(x)=(x+3)q_2(x)$이어야 한다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x-3)^2(x+3)q(x)$라 할 수 있다.

따라서 $f(x)$의 차수의 최솟값 m은 $q(x)$가 상수일 때이므로 $m=4$

㉤에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{a(x-1)(x-3)(x+3)}{a(x+1)(x+3)^2(x-3)}=k$$

$$\lim_{x\to3}\frac{(x-1)}{(x+1)(x+3)}=k$$

$$\therefore k=\frac{1}{12}$$

$$\therefore m+k=4+\frac{1}{12}=\frac{49}{12}$$

15) [정답] ⑤

[해설]

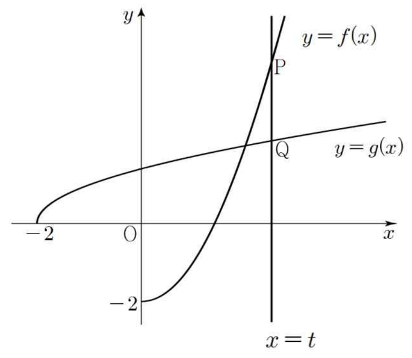
$x=t$ 와 $y=f(x)$가 만나는 점 P 의 좌표는

$(t,\ t^2-2)$ 이고

$x=t$ 와 $y=g(x)$가 만나는 점 Q 의 좌표는

$(t,\ \sqrt{t+2}\ )$ 이므로

선분 PQ의 길이는 $h(t)=t^2-2-\sqrt{t+2}$ 이다.



$$\lim_{t\to2+}\frac{h(t)}{t-2}=\lim_{t\to2+}\frac{t^2-2-\sqrt{t+2}}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to2+}\frac{(t^2-4)+(2-\sqrt{t+2})}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to2+}\left\{(t+2)+\frac{2-\sqrt{t+2}}{t-2}\right\}$$

$$=\lim_{t\to2+}\left\{(t+2)+\frac{2-t}{(t-2)(2+\sqrt{t+2})}\right\}=\frac{15}{4}$$

[다른 풀이]

$$\lim_{t\to2+}\frac{h(t)}{t-2}=\lim_{t\to2+}\frac{t^2-2-\sqrt{t+2}}{t-2}$$

$$=\lim_{t\to2+}\frac{(t^2-2-\sqrt{t+2})(t^2-2+\sqrt{t+2})}{(t-2)(t^2-2+\sqrt{t+2})}$$

$$=\lim_{t\to2+}\frac{(t-2)(t^3+2t^2-1)}{(t-2)(t^2-2+\sqrt{t+2})}$$

$$=\lim_{t\to2+}\frac{t^3+2t^2-1}{t^2-2+\sqrt{t+2}}=\frac{15}{4}$$

16) [정답] ②

[해설]

점 P$(a,\ a)$를 지나고 x축에 평행한 직선 $y=a$와

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점은 각각 A$(a^2-2,\ a)$, B$(a^2-4a+6,\ a)$이다.

$\therefore \overline{AB}=(a^2-4a+6)-(a^2-2)=-4a+8$

점 B를 지나고 y축에 평행한 직선 $x=a^2-4a+6$과

함수 $y=h(x)$의 그래프가 만나는 점은 C$(a^2-4a+6,\ a^2-4a+6)$이다.

$\therefore \overline{BC}=(a^2-4a+6)-a=a^2-5a+6$

따라서

$$\lim_{a\to 2-}\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\lim_{a\to 2-}\frac{a^2-5a+6}{-4a+8}$$

$$=\lim_{a\to 2-}\frac{(a-2)(a-3)}{-4(a-2)}$$

$$=\lim_{a\to 2-}\frac{a-3}{-4}=\frac{1}{4}$$

17) [정답] ③

[해설]

$G\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$이므로 $A\left(t,\ \frac{3}{t}\right)$

$3t=\frac{1}{2}\times f(t)\times\frac{3}{t}$ 이므로 $f(t)=2t^2$

$$\lim_{t\to 1}\frac{f(t)-2t}{t-1}=\lim_{t\to 1}\frac{2t^2-2t}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{2t(t-1)}{t-1}=\lim_{t\to 1}2t=2$$

18) [정답] 4

[해설]

$A(1,1)$를 지나고 직선 $y=x$와 수직인 직선은 $y=-x+2$ 이므로 점 B의 x좌표는 2이다.

$P(t,\ t)$이므로 $Q(t,\ \sqrt{t})$이고, R는 직선 $y=-x+2$ 위의 점이므로 $R(-t+2,\ t)$

$\overline{QP}=\sqrt{t}-t$, $\overline{PR}=-2t+2$이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\{t+(1-t)\}\times(\sqrt{t}-t)=\frac{1}{2}(\sqrt{t}-t)$$

$$T(t)=\frac{1}{2}\times t\times(-2t+2)=t-t^2$$

$$\lim_{t\to 1-}\frac{t-t^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{t}-t)}=\lim_{t\to 1-}\frac{2(t-t^2)(\sqrt{t}+t)}{(t-t^2)}=4$$

19) [정답] ④

[해설]

$R(t,\ 0)$이고, 점 $P(t,\ t^2)$에서의 접선 l의 방정식은

$$y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2$$

x 절편은 $\frac{t}{2}$ 이므로 $Q\left(\frac{t}{2},\ 0\right)$

$$\overline{QR}=\frac{t}{2},\ \overline{PR}=t^2$$

따라서 삼각형 PQR의 넓이

$$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{PR}=\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times t^2=\frac{1}{4}t^3$$

$x>0$일 때, 두 곡선 $y=x^3, y=\sqrt{x}$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

두 점 P와 A는 각각 두 곡선 위의 점이고, 기울기가 -1인 직선 위에 있으므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 $A(t^2,\ t)$

한 변의 길이가 $t-t^2$인 정사각형 PCAB의 넓이

$$g(t)=(t-t^2)^2=t^4-2t^3+t^2$$

따라서 $\lim_{t\to 0+}\frac{t\times g(t)}{f(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{t(t^4-2t^3+t^2)}{\frac{1}{4}t^3}=4$

20) [정답] 15

[해설]

$y=x^2$과 $y=tx$를 연립하여 정리하면 $x(x-t)=0$이고 $x>0$이므로 $x=t$

그러므로 점 Q의 좌표는 $Q(t,\ t^2)$

원점을 O라 하면 $\overline{OP}=\sqrt{2}$, $\overline{OQ}=t\sqrt{1+t^2}$이므로

$$\overline{PQ}=\overline{OP}-\overline{OQ}=\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}$$

$x^2+y^2=2$와 $y=x^2$을 연립하여 정리하면 $(y+2)(y-1)=0$이고 $y>0$이므로 $y=1$

$x^2=1$에서 $x>0$이므로 $x=1$

그러므로 점 A의 좌표는 $A(1,\ 1)$

점 A에서 직선 $y=tx$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $0<t<1$이므로

$$\overline{AH}=\frac{|t-1|}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{1-t}{\sqrt{t^2+1}}$$

삼각형 PAQ의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{AH}$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}\right)\times\frac{1-t}{\sqrt{1+t^2}}$$

이므로

$$k=\lim_{t\to1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{\sqrt{2}-t\sqrt{1+t^2}}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}}$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{2-t^2(1+t^2)}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{(t^2+2)(1-t^2)}{2(1-t)\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{(t^2+2)(1+t)}{2\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{2}+t\sqrt{1+t^2}\right)}$$

$$=\frac{3\times2}{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}=\frac{3}{4}$$

따라서 $20k=20\times\frac{3}{4}=15$

21) [정답] ④

[해설]

네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각

$A(\sqrt{2t},\ 2t)$, $B(\sqrt{2},\ 2t)$, $C(\sqrt{t+1},\ t+1)$,

$D\left(\sqrt{\frac{t+1}{t}},\ t+1\right)$

이므로

$\overline{AB}=\sqrt{2}-\sqrt{2t}=\sqrt{2}(1-\sqrt{t})$

$\overline{CD}=\sqrt{\frac{t+1}{t}}-\sqrt{t+1}=\sqrt{\frac{t+1}{t}}(1-\sqrt{t})$

점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=(t+1)-2t=1-t$이므로

$$S(t)=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{CH}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}(1-\sqrt{t})+\sqrt{\frac{t+1}{t}}(1-\sqrt{t})\right\}(1-t)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{t+1}{t}}\right)(1-\sqrt{t})(1-t)$$

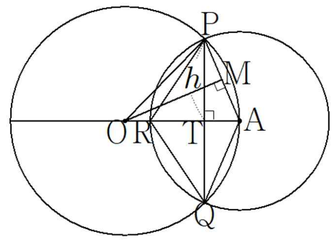
따라서

$$\lim_{t\to1-}\frac{S(t)}{(1-t)^2}=\lim_{t\to1-}\frac{1}{2(1+\sqrt{t})}\left(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{t+1}{t}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

22) [정답] ④

[해설]



$\overline{OA}$와 $\overline{PQ}$의 교점을 T, $\overline{PT}=h$, $\overline{AP}$의 중점을 M이라고 하면, $S(r)=hr$

$$\triangle OAP=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{PT}$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{OM}$$

이므로

$$\frac{1}{2}\times1\times h=\frac{1}{2}\times r\times\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2},$$

$$h=r\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

$$\therefore\ \lim_{r\to2-}\frac{S(r)}{\sqrt{2-r}}=\lim_{r\to2-}\frac{r^2\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}}{\sqrt{2-r}}$$

$$=\lim_{r\to2-}\frac{r^2\sqrt{(2-r)(2+r)}}{2\sqrt{2-r}}=4$$

23) [정답] ⑤

[해설]

삼각형 OAB에서 내접원의 반지름의 길이를 r이라할 때 삼각형의 넓이

$$\frac{1+x+\sqrt{1+x^2}}{2}r=\frac{1}{2}x$$

$$\lim_{x\to0}\frac{r}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}$$

24) [정답] ④

[해설]

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+2t}$ 이므로

$S(t)=(t^2+2t)\pi$

원 C 위의 점 P에서의 접선의 방정식이

$tx+\sqrt{2t}\,y=t^2+2t$ 이므로

$Q(t+2,\ 0)$

$\overline{OQ}=t+2,\ \overline{PQ}=\sqrt{2t+4}$ 이므로

$$\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{\overline{OQ}-\overline{PQ}}=\lim_{t\to0+}\frac{(t^2+2t)\pi}{(t+2)-\sqrt{2t+4}}=4\pi$$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{\overline{OQ}-\overline{PQ}}=4\pi$$

25) [정답] ④

[해설]

중심이 $P(x,\ y)$이므로 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 y이다. 두 원이 외접하므로 $\overline{PA}=y+1$

즉, $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=y+1$이다.

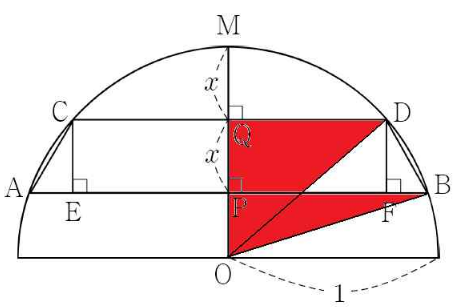
$x^2+(y-3)^2=(y+1)^2$에서 $x^2=8y-8$

이때, $x\to\infty$이면 $y\to\infty$이므로

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{PH}^2}{\overline{PA}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{y+1}=\lim_{y\to\infty}\frac{8y-8}{y+1}=8$$

26) [정답] ④

[해설]



$OP=1-2x,\ OB=OD=1$ 이므로 직각삼각형 OBP 와 ODQ 에서

$(1-2x)^2+\overline{PB}^2=1^2$

$\therefore\ \overline{BP}=\sqrt{4x-4x^2}$

$(1-x)^2+\overline{QD}^2=1^2$

$\therefore\ \overline{QD}=\sqrt{2x-x^2}$

$$\therefore\ S(x)=\frac{1}{2}(2\overline{PB}+2\overline{QD})\cdot x=(\overline{PB}+\overline{QD})\cdot x$$

$=(\sqrt{4x-4x^2}+\sqrt{2x-x^2})x$

$T(x)=2\overline{QD}\cdot x=2x\sqrt{2x-x^2}$

$$\therefore\ \lim_{x\to+0}\frac{T(x)}{S(x)}=\lim_{x\to+0}\frac{2\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{4x-4x^2}+\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{2\sqrt{2-x}}{\sqrt{4-4x}+\sqrt{2-x}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}+1}$$

$=2(\sqrt{2}-1)$

27) [정답] ⑤

[해설]

직선 l의 y절편을 b라 하면 직선 l의 기울기가 -2이므로 직선 l의 방정식은

$2x+y-b=0$

이때 점 $C(2,\ 0)$과 직선 l 사이의 거리는 원 C의 반지름의 길이 r와 같으므로

$$\frac{|2\times2+0-b|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|4-b|}{\sqrt{5}}=r$$

$\therefore\ b=4\pm\sqrt{5}r$

또한, 점 $C'(3,3)$과 직선 l 사이의 거리는 원 C'의 반지름의 길이 $f(r)$와 같으므로

$$\frac{|2\times3+3-b|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|9-b|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{|5\pm\sqrt{5}r|}{\sqrt{5}}$$

$=f(r)$

$$\therefore\ \lim_{r\to0+}f(r)=\lim_{r\to0+}\frac{|5\pm\sqrt{5}r|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

28) [정답] ①

[해설]

$x^2+y^2=1$ ……㉠

$(x-1)^2+y^2=r^2$……㉡

㉠, ㉡에서 $x=\frac{1}{2}(2-r^2)$이므로

$f(r)=\frac{1}{2}(2-r^2)$

따라서 $\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{f(r)}{4-r^4}=\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{2-r^2}{2(4-r^4)}$

$=\lim_{r\to\sqrt{2}-}\frac{1}{2(2+r^2)}=\frac{1}{8}$

29) [정답] ①

[해설]

$\angle QOP=\theta$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{OQ}\times\overline{OR}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2t}\right)^2\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\frac{1}{4t^2}\cos\theta$

직각삼각형 PQO에서

$\cos\theta=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2t}}{t+\frac{1}{t}}=\frac{\sqrt{2}}{2(t^2+1)}$이므로

$S(t)=\frac{\sqrt{2}}{8(t^4+t^2)}$

따라서 $\lim_{t\to\infty}\{t^4\times S(t)\}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{2}t^4}{8(t^4+t^2)}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{8\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}$

$=\frac{\sqrt{2}}{8}$

30) [정답] ①

[해설]

$\overline{OP}=t$, $\overline{PQ}=\sqrt{t^2+4}-2$, $\overline{PR}=\sqrt{t^2+4}+2$이므로

$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{PQ}\times\overline{PR}}{\overline{OP}^2-\overline{PQ}^2}=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{t^2+4}-2)(\sqrt{t^2+4}+2)}{t^2-(\sqrt{t^2+4}-2)^2}$

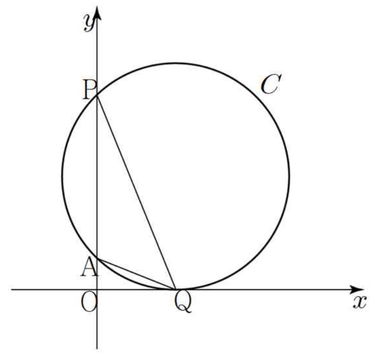
$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{t^2+4}-2)(\sqrt{t^2+4}+2)}{4(\sqrt{t^2+4}-2)}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{t^2+4}+2}{4}$

$=1$

31) [정답] ②

[해설]



원의 접선에 대한 성질에 의하여 $\overline{OQ}^2=\overline{OA}\times\overline{OP}$이다.

즉, $\overline{OP}=t^2$이다.

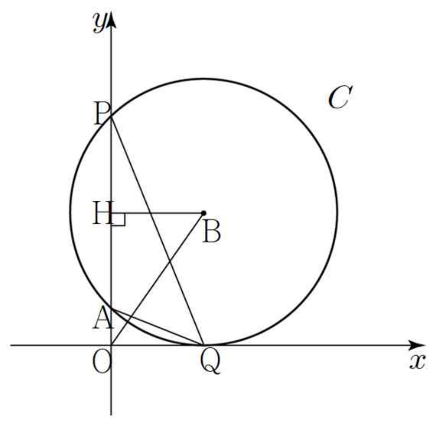
$\therefore r(t)=\frac{\overline{OA}+\overline{OP}}{2}=\frac{1}{2}(t^2+1)$

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{OQ}$

$=\frac{1}{2}\times(t^2-1)\times t$

$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t\times r(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{2}t(t^2-1)}{\frac{1}{2}t(t^2+1)}=1$

[다른 풀이]



원 C의 중심을 B라 하면, 원 C가 x축과 접하므로 $B(t,\, r(t))$이다.

$\overline{AB}=r(t)=\sqrt{t^2+\{r(t)-1\}^2}$

양변을 제곱하면

$\{r(t)\}^2=t^2+\{r(t)\}^2-2r(t)+1$

이다.

따라서 $r(t)=\dfrac{t^2+1}{2}$ 이다.

원의 중심 B에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면,

$$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OH}}-\overline{\mathrm{OA}}=\frac{t^2+1}{2}-1=\frac{t^2-1}{2}$$

이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{AH}}=t^2-1$ 이고

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{BH}}$$

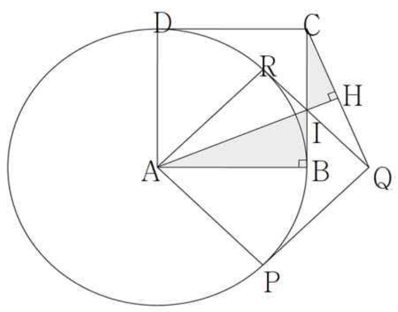
$$=\frac{1}{2}\times(t^2-1)\times t$$

이다.

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t\times r(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{2}t(t^2-1)}{\frac{1}{2}t(t^2+1)}=1$$

32) [정답] **208**

[해설]



$\overline{\mathrm{CI}}=t$라 하자.

점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $t\to 0$이다.

점 I에서 선분 QC에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 ABI와 CHI는 닮음이다.

$\overline{\mathrm{BI}}=1-t$, $\overline{\mathrm{AI}}=\sqrt{t^2-2t+2}$

이고 $\overline{\mathrm{AI}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CI}}:\overline{\mathrm{CH}}$이므로 $\sqrt{t^2-2t+2}:1=t:\overline{\mathrm{CH}}$

$$\therefore \overline{\mathrm{CH}}=\frac{t}{\sqrt{t^2-2t+2}}$$

이다. $\overline{\mathrm{AI}}:\overline{\mathrm{BI}}=\overline{\mathrm{CI}}:\overline{\mathrm{HI}}$이므로 $\sqrt{t^2-2t+2}:1-t=t:\overline{\mathrm{HI}}$

$$\therefore \overline{\mathrm{HI}}=\frac{t(1-t)}{\sqrt{t^2-2t+2}}$$

이다. 삼각형 IQC에 대하여 S, L을 구해보면

$$S=\frac{t^2(1-t)}{t^2-2t+2},\quad L=2t\frac{\sqrt{t^2-2t+2}+1}{\sqrt{t^2-2t+2}}$$

이다. 따라서

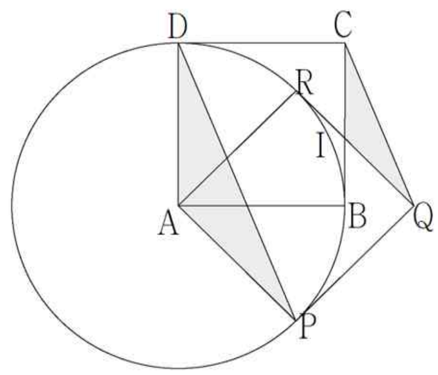
$$\lim_{t\to0}\frac{L^2}{S}=\lim_{t\to0}\frac{4t^2\times\dfrac{t^2-2t+3+2\sqrt{t^2-2t+2}}{t^2-2t+2}}{\dfrac{t^2(1-t)}{t^2-2t+2}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{4\left(t^2-2t+3+2\sqrt{t^2-2t+2}\right)}{1-t}$$

$$=12+8\sqrt{2}$$

따라서 $a=12$, $b=8$이므로 $a^2+b^2=144+64=208$이다.

[다른풀이]

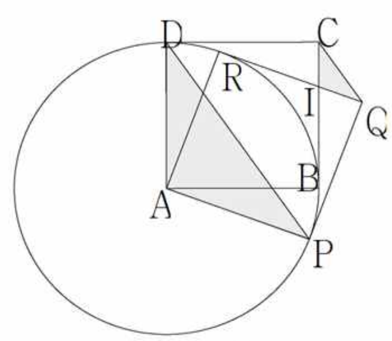


[그림 1]

[그림 1]에서 $\angle\mathrm{CIQ}=\angle\mathrm{DAP}$, $\overline{\mathrm{IC}}=\overline{\mathrm{IQ}}$, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AP}}$이므로 두 삼각형 IQC, APD는 서로 닮음인 도형이다. 따라서

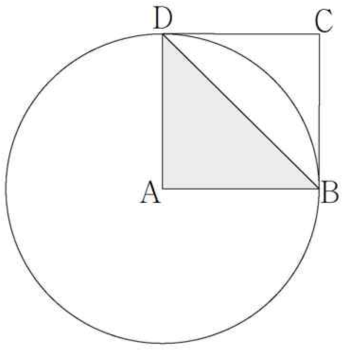
$$\frac{(\triangle\mathrm{IQC}\text{의 둘레의 길이})^2}{(\triangle\mathrm{IQC}\text{의 넓이})}=\frac{(\triangle\mathrm{APD}\text{의 둘레의 길이})^2}{(\triangle\mathrm{APD}\text{의 넓이})}$$

이다.



[그림 2]

[그림 2]에서 볼 수 있듯이 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 삼각형 APD는 삼각형 ABD에 한없이 가까워진다.



[그림 3]

[그림 3]에서 삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이므로

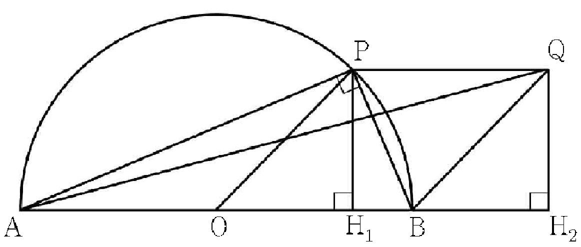
$$\frac{(\triangle \mathrm{ABD}\text{의 둘레의 길이})^2}{(\triangle \mathrm{ABD}\text{의 넓이})}=\frac{(1+1+\sqrt{2})^2}{\frac{1}{2}\times 1\times 1}=12+8\sqrt{2}$$

이다. 그러므로 점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $\frac{L^2}{S}$의 값은 $12+8\sqrt{2}$에 한없이 가까워진다.

따라서 $a=12$, $b=8$이므로 $a^2+b^2=144+64=208$이다.

33) [정답] ②

[해설]



그림과 같이 두 점 P, Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하자.

직각삼각형 APB에서 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{4-t^2}$이고

직각삼각형 $\mathrm{OH_1P}$에서 $\overline{\mathrm{OH_1}}^2+\overline{\mathrm{PH_1}}^2=1$이므로

직각삼각형 $\mathrm{AH_1P}$에서

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\left(1+\overline{\mathrm{OH_1}}\right)^2+\overline{\mathrm{PH_1}}^2$, $4-t^2=2+2\overline{\mathrm{OH_1}}$

따라서 $\overline{\mathrm{OH_1}}=1-\frac{t^2}{2}$

$\overline{\mathrm{PH_1}}=\sqrt{1-\overline{\mathrm{OH_1}}^2}=\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2}$

$\overline{\mathrm{BH_2}}=\overline{\mathrm{OH_1}}$, $\overline{\mathrm{QH_2}}=\overline{\mathrm{PH_1}}$이므로

직각삼각형 $\mathrm{AH_2Q}$에서

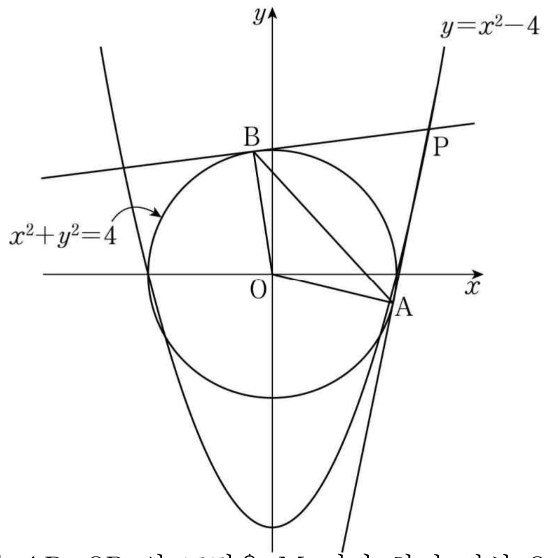
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AQ}}&=\sqrt{\left(2+\overline{\mathrm{BH_2}}\right)^2+\overline{\mathrm{QH_2}}^2}\\&=\sqrt{\left(2+\overline{\mathrm{OH_1}}\right)^2+\overline{\mathrm{PH_1}}^2}\\&=\sqrt{\left\{2+\left(1-\frac{t^2}{2}\right)\right\}^2+\frac{t^2}{4}\left(4-t^2\right)}\\&=\sqrt{9-2t^2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+}\frac{3-\overline{\mathrm{AQ}}}{t^2}&=\lim_{t\to 0+}\frac{3-\sqrt{9-2t^2}}{t^2}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{9-\left(9-2t^2\right)}{t^2\left(3+\sqrt{9-2t^2}\right)}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{2}{3+\sqrt{9-2t^2}}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

34) [정답] ②

[해설]



두 선분 AB, OP 의 교점을 M 이라 하면 직선 OP는 선분 AB를 수직이등분하므로 직각삼각형 OAP와 직각삼각형 OMA는 서로 닮음이다.

삼각형 OAP와 삼각형 OMA의 닮음비는 $\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{OA}}$이므로

넓이의 비는 $\overline{\mathrm{OP}}^2:\overline{\mathrm{OA}}^2$이다.

삼각형 OAP의 넓이는 $\frac{S(t)+T(t)}{2}$,

삼각형 OMA의 넓이는 $\frac{S(t)}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}^2:\overline{\mathrm{OA}}^2=\frac{S(t)+T(t)}{2}:\frac{S(t)}{2}$

$\overline{\mathrm{OA}}^2\times\frac{S(t)+T(t)}{2}=\overline{\mathrm{OP}}^2\times\frac{S(t)}{2}$,

$\frac{T(t)}{S(t)}=\frac{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}{\overline{\mathrm{OA}}^2}$

$\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+\left(t^2-4\right)^2}$이므로

$\frac{T(t)}{S(t)}=\frac{t^2+\left(t^2-4\right)^2-2^2}{2^2}=\frac{1}{4}(t+2)(t-2)\left(t^2-3\right)$

따라서

$\lim_{t\to 2+}\frac{T(t)}{(t-2)S(t)}+\lim_{t\to\infty}\frac{T(t)}{\left(t^4-2\right)S(t)}$

$=\lim_{t\to2+}\dfrac{(t+2)(t^2-3)}{4}+\lim_{t\to\infty}\dfrac{(t+2)(t-2)(t^2-3)}{4(t^4-2)}$

$=1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}$

35) [정답] 16

[해설]

(i) $8<x<9$일 때,

x보다 작은 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이므로
$f(x)=4$
이 때, $2f(x)=8<x$이므로
$g(x)=f(x)=4$
$\therefore \lim_{x\to8+}g(x)=\lim_{x\to8+}4=4$
$\therefore \alpha=4$

(ii) $7<x<8$일 때,
x보다 작은 자연수 중에서 소수는2, 3, 5, 7의 4개이므로
$f(x)=4$

이 때, $2f(x)=8>x$이므로 $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \lim_{x\to8-}g(x)=\lim_{x\to8-}\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \beta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{4}{\dfrac{1}{4}}=16$

36) [정답] ③

[해설]

주어진 조건의 의하여

직선 AB와 점 C사이의 거리와 직선 AB와 점 P사이의 거리가 같아야 한다.

따라서 $f(t)=\begin{cases}0 & (t<-2)\\1 & (t=-2)\\2 & (-2<t<-1)\\3 & (t=-1)\\4 & (-1<t<0)\\3 & (t=0)\\2 & (0<t<1)\\1 & (t=1)\\0 & (1<t)\end{cases}$ 이다.

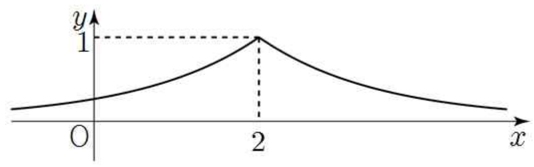
이에 a, b를 구하면 $a=-1, b=4$이다.

그러므로 $a+b=3$이다.

37) [정답] 4

[해설]

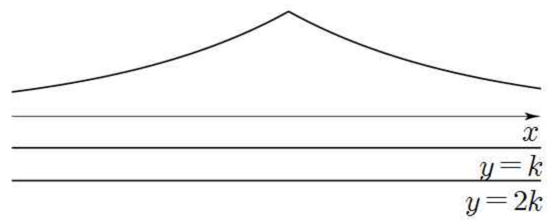
함수 $f(x)=\begin{cases}2^{x-2} & (x<2)\\2^{-x+2} & (x\ge2)\end{cases}$의 그래프는 아래와 같다.



$g(x)=|f(x)-k|+k$

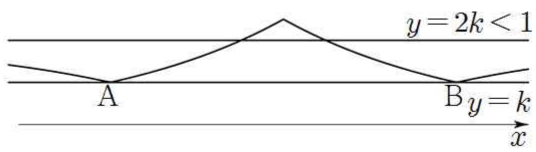
$=\begin{cases}f(x) & (f(x)\ge k)\\-f(x)+2k & (f(x)<k)\end{cases}$

(i) $k\le0$일 때,
$f(x)>k$이므로 $g(x)=f(x)>0\ge2k$
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=2k$의 그래프가 만나는 점이 없다.
$h(k)=0$



(ii) $0<k<\dfrac{1}{2}$일 때,

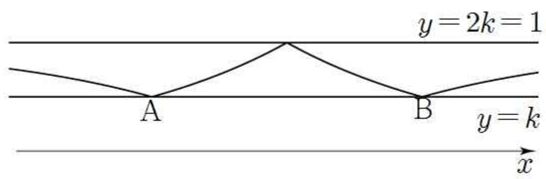
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 아래와 같다.
$h(k)=2$



(iii) $k=\dfrac{1}{2}$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 아래와 같다.

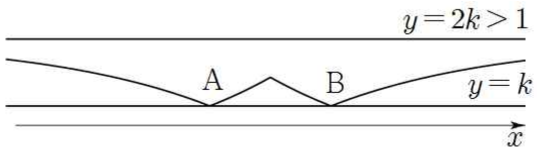
$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$



(iv) $\frac{1}{2}<k<1$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 아래와 같다.

$h(k)=0$

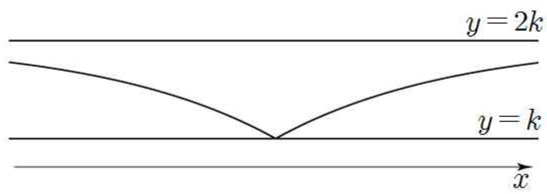


(v) $k\geq1$ 일 때,

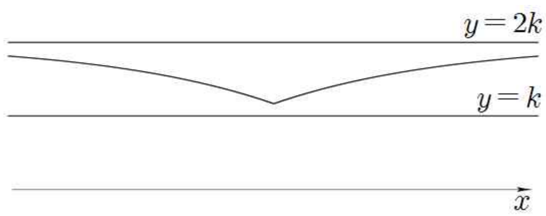
$g(x)=-f(x)+2k<2k$ 이므로

$h(k)=0$

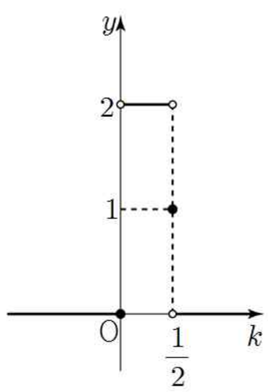
① $k=1$ 인 경우



② $k>1$ 인 경우



따라서 $y=h(k)$ 의 그래프는 아래와 같다.



$\lim\limits_{k\to\frac{1}{4}-}h(k)=2$ 이고 $\lim\limits_{k\to\frac{1}{4}-}h\left(k+\frac{1}{4}\right)=2$

따라서 $\lim\limits_{k\to\frac{1}{4}-}h(k)h\left(k+\frac{1}{4}\right)=4$

38) [정답] ①

[해설]

함수 $|f(x)|$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0-}|f(x)|=\lim_{x\to0-}|2x+a|=|a|,$$

$$|f(0)|=\lim_{x\to0+}|f(x)|=\lim_{x\to0+}|x^2+bx+c|=|c|$$

에서 $a=c$ 또는 $a=-c$

조건 (가)에서 4가 함수 $g(t)$의 치역의 원소 중 하나이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 t가 존재해야 한다.

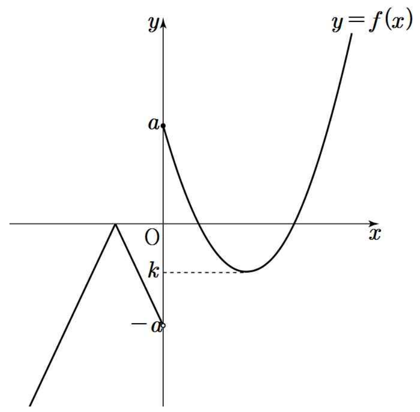
그러므로 직선 $y=t$가 $x<0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하고, $x\geq0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 t가 존재해야 한다.

따라서 $a>0$, $b<0$, $c=a$이고 함수 $y=x^2+bx+c(x\geq0)$의 최솟값이 0보다 작아야 한다.

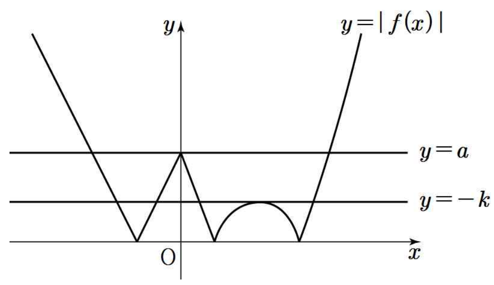
함수 $y=x^2+bx+c(x\geq0)$의 최솟값을 k라 하자.

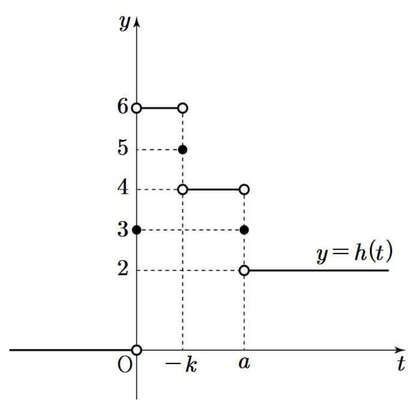
(i) $-a<k<0$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 함수 $g(t)$의 치역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.



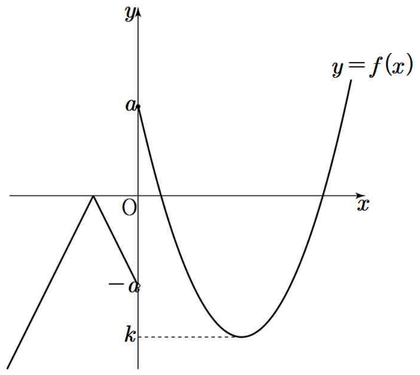
함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형과 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.



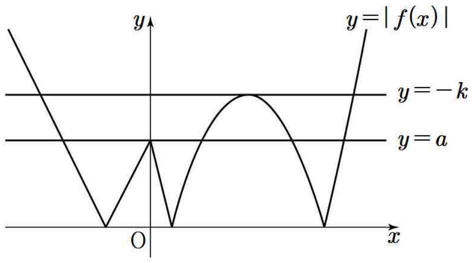


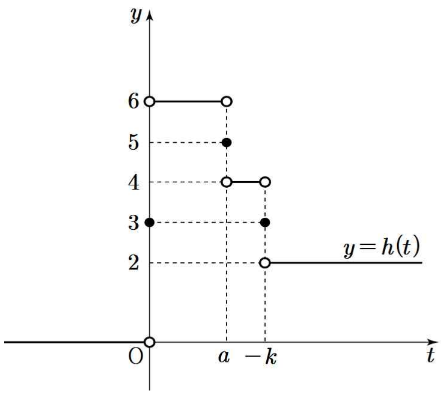
(ii) $k<-a$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 함수 $g(t)$의 치역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.



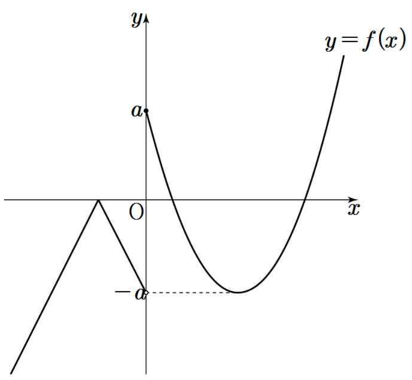
함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형과 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.



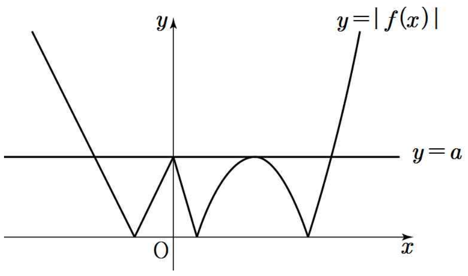


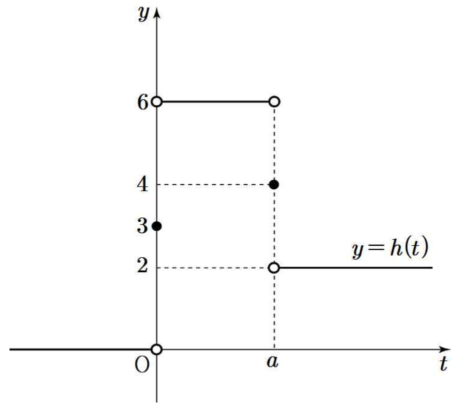
(iii) $k=-a$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 함수 $g(t)$의 치역은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이다.



함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형과 함수 $y=h(t)$의 그래프는 그림과 같다.





(i)~(iii)에 의하여 $k=-a$일 때, 함수 $h(t)$가 조건 (나)를 만족시키므로 $a=2$이고 $c=2,\ k=-2$

$x^2+bx+2=\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+2-\dfrac{b^2}{4}$이므로

$$2-\frac{b^2}{4}=-2,\ b=-4\,(b<0)$$

함수 $f(x)$는

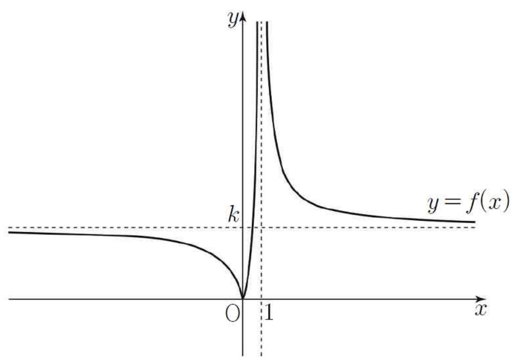
$$f(x)=\begin{cases} -|2x+2| & (x<0) \\ x^2-4x+2 & (x\geq 0)\end{cases}$$

따라서 $f(-2)+f(6)=-2+14=12$

39) [정답] ①

[해설]

$f(x)=\left|\dfrac{kx}{x-1}\right|=\left|\dfrac{k}{x-1}+k\right|$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $t<0$일 때

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 만나지 않으므로

$g(t)=0$

(ii) $t=0$ 또는 $t=k$일 때

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 한 점에서 만나므로

$g(t)=1$

(iii) $0<t<k$ 또는 $t>k$일 때

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 두 점에서 만나므로

$g(t)=2$

(i), (ii), (iii)에 의해 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}0 \ (t<0) \\ 1 \ (t=0 \text{ 또는 } t=k) \\ 2 \ (0<t<k \text{ 또는 } t>k)\end{cases}$$

$\lim\limits_{t\to 0+} g(t)=2$이고, 모든 양수 a에 대하여 $\lim\limits_{t\to a-} g(t)=2$이므로

$$\lim_{t\to 2-} g(t)=2$$

$\lim\limits_{t\to 0+} g(t)+\lim\limits_{t\to 2-} g(t)+g(4)=5$에서 $g(4)=1$이므로

$$k=4$$

따라서 $f(3)=\left|\dfrac{4\times 3}{3-1}\right|=6$

40) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $f(0)g(0)=0\times 0=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0-} f(x)g(x)=(-1)\times 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(x)g(x)=0\times 0=0\end{cases}$$

$\therefore$ $x=0$에서 연속

ㄴ. $\begin{cases}f(g(0))=f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(g(x))=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0-} f(g(x))=f(-0)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0+} f(g(x))=f(+0)=0\end{cases}\end{cases}$

$\therefore$ $x=0$에서 불연속

ㄷ. $g(f(0))=g(0)=0$

$$\lim_{x\to 0} g(f(x))=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0-} g(f(x))=g(-1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0+} g(f(x))=g(0)=0\end{cases}$$

$\therefore$ $x=0$에서 연속

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

41) [정답] ⑤

[해설]

$x<0$일 때, $g(x)=-f(x)+x^2+4$

$x>0$일 때, $g(x)=f(x)-x^2-2x-8$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)$$

이때

$$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}\{-f(x)+x^2+4\}=-f(0)+4$$

$$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}\{f(x)-x^2-2x-8\}=f(0)-8$$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)-\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=6$에서

$$\{-f(0)+4\}-\{f(0)-8\}=6$$

따라서 $f(0)=3$

42) [정답] **12**

[해설]

역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일 대응이어야 하므로

(i) $x\ge 1$일 때, 함수 $f(x)$가 증가하여야 하므로

$$y=x^2-ax+3=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+3$$

$$\frac{a}{2}\le 1,\ a\le 2$$

(ii) $x<1$일 때, 함수 $f(x)$가 증가하여야 하므로

$$y=-x^2+2bx-3=-(x-b)^2+b^2-3$$

$$b\ge 1$$

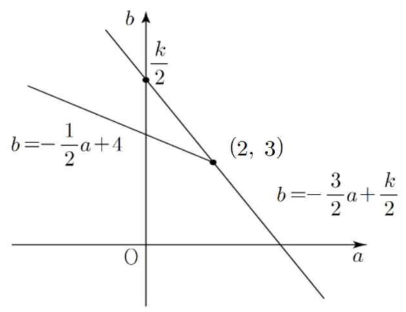
(iii) $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)\ 1-a+3=-1+2b-3$$

$$a+2b=8$$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$a\le 2$, $b\ge 1$, $a+2b=8$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$를 좌표평면 위에 나타내면 $3a+2b=k$의 그래프가 $(2,\ 3)$을 지날 때 k의 값이 최대가 된다.



따라서 $3a+2b$의 최댓값은

$a=2$, $b=3$일 때 12

43) [정답] **15**

[해설]

$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-x^2}{x-1} = 2$이므로

다항함수 $f(x) = x^2 + 2x + a$꼴이다.

함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1} \frac{2x+a}{x-1} = k$이어야 한다.

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값은 일정한 값이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. $2\times1+a=0$

$\therefore a = -2$

$f(x) = x^2 + 2x - 2$ 이고

$\lim_{x\to1} g(x) = \lim_{x\to1} \frac{2x-2}{x-1} = 2$

$\therefore k = 2$

$\therefore k + f(3) = 2 + 13 = 15$

44) [정답] ①

[해설]

$x = c$에서 연속이므로

$\lim_{x\to c} \frac{x^2-a}{\sqrt{x^2+b}-\sqrt{c^2+b}} = 4c$이다.

이 때 (분모)$\to0$이므로 분자 역시 0으로 가므로

$a = c^2$이며, 부정형을 정리하면, $2\sqrt{c^2+b} = 4c$이므로 $b = 3c^2$이다.

(이 때, $\sqrt{c^2+b} \geq 0$이므로 $c \geq 0$이다.)

따라서 $a+b+c = 4c^2+c$이며,

이는 아래로 볼록이고 축이 $c = -\frac{1}{8}$인 이차 함수이므로

$c = 0$일 때, 최솟값 0을 가진다.

따라서 $a+b+c$의 최솟값은 0이다.

45) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

조건 (가)와 (나)에서

$f(4) = \lim_{x\to4-} f(x) = 16a + 4b - 24$이고

$f(0) = f(4)$이므로 $-24 = 16a + 4b - 24$에서

$b = -4a$ …… ㉠

$0 \leq x < 4$에서 $f(x) = a(x-2)^2 - 4a - 24$이므로

함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x = 2$에 대하여 대칭이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(x+4) = f(x)$이므로

$1 < x < 2$일 때 방정식 $f(x) = 0$이 실근을 갖지 않으면

$1 < x < 10$일 때 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 4 이하이다.

$1 < x < 2$일 때 방정식 $f(x) = 0$이 실근을 1개 가지면

$1 < x < 10$일 때 방정식 $f(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수가 5이다.

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이므로

$f(1)f(2) = (-3a-24)(-4a-24)$

$= 12(a+8)(a+6) < 0$

$-8 < a < -6$이고 a는 정수이므로 $a = -7$

㉠에 의하여 $b = 28$

따라서 $a + b = -7 + 28 = 21$

46) [정답] ②

[해설]

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인

이차함수 $\lim_{x\to1} \frac{f(x)}{x-1} = k$이므로 $f(x) = (x-1)(x-a)$

$\lim_{x\to1} \frac{f(x)}{x-1} = 1 - a = k$

$h(x) = f(x)g(x)$가 $x = 2$에서 연속이므로

$h(2) = \lim_{x\to2+0} h(x) = \lim_{x\to2-0} h(x)$

$h(2) = f(2)g(2) = 3(2-a)$

$\lim_{x\to2+} h(x) = \lim_{x\to2+} (x-1)(x-a)(2-x) = 0$

$\lim_{x\to2-} h(x) = \lim_{x\to2-} (x-1)(x-a)(x+1) = 3(2-a)$

따라서 $a = 2$이므로 $k = -1$

47) [정답] **56**

[해설]

주어진 이차함수 $f(x)$는 축의 방정식이 $x = 4$이고

(가)에서 방정식 $f(x) = 0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서

적어도 하나의 실근을 가지므로

$f(0)=a>0$, $f(2)=a-12<0$

$\therefore 0<a<12$

(나)에서

$f(a)g(a)=7a^2(a-7)$,

$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}(x^2-8x+a)(2x+5a)$

$=7a^2(a-7)$,

$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-8x+a)f(x+4)$

$=(a^2-8a+a)\{(a+4)^2-8(a+4)+a\}$

$=a(a-7)(a^2+a-16)$

이고 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$7a^2(a-7)=a(a-7)(a^2+a-16)$

$a(a-7)(a-8)(a+2)=0$

$\therefore a=7$ 또는 $a=8$ ($\because 0<a<12$)

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은 56다.

48) [정답] ③

[해설]

(i) $k=1$인 경우

$\lim_{x\to 2-} f(x)f(x)=(-2)\times(-2)=4$

$\lim_{x\to 2+} f(x)f(x)=(-6)\times(-6)=36$

$\lim_{x\to 2} f(x)f(x)$가 존재하지 않으므로

함수 $f(x)f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(ii) $k=-1$인 경우

위의 (i)과 같은 방법에 의하여

함수 $f(x)f(-x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iii) $k\neq -1$, $k\neq 1$인 경우

함수 $f(kx)$는 $x=2$에서 연속이다.

함수 $f(x)f(kx)$가 $x=2$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to 2-} f(x)f(kx)=\lim_{x\to 2+} f(x)f(kx)=f(2)f(2k)$

$-2f(2k)=-6f(2k)=-2f(2k)$

따라서 $f(2k)=0$

$x=-4,\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 4$에서 $f(x)=0$이므로

$2k$는 $-4,\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 4$이다.

그러므로 $k=-2,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 2$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 k의 값의 곱은 2

49) [정답] ①

[해설]

$f(x)=\begin{cases} x^2-5a & (x<a) \\ -2x+4 & (x\geq a) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to a+} f(-x)f(x)=\{(-a)^2-5a\}\times(-2a+4)$

$\lim_{x\to a-} f(-x)f(x)=\{(-a)^2-5a\}\times(a^2-5a)$

따라서 $a^2-5a=0$이거나 $-2a+4=a^2-5a$이므로

$a=4$ 또는 $a=5$ ($\because a>0$)

따라서 모든 a의 값의 합은 9

50) [정답] ②

[해설]

$(f\circ g)(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 1-}(f\circ g)(x)=(f\circ g)(1)$

(i) $x\to 1+$ 일 때, $x\neq 1$이고 $f(x)=f(x+2)$이므로

$\lim_{x\to 1+}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 1+} f(g(x))$

$=\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} f(x)=0$

(ii) $x\to 1-$ 일 때, $x\neq 1$이고 $f(x)=f(x+2)$이므로

$\lim_{x\to 1-}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to 1-} f(g(x))=\lim_{x\to 1-} f(x)=0$

(iii) $x=1$일 때,

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(a)$

(i), (ii), (iii)에서 $f(a)=0$

그런데 $a>1$이고 $f(x)=f(x+2)$이므로 a의 최소값은

$a=\frac{5}{2}$

51) [정답] ⑤

[해설]

ㄴ. $\lim_{x\to 0+} f(f(x))=\lim_{t\to -1+} f(t)=0$이고

$\lim_{x\to 0-} f(f(x))=\lim_{t\to 1-} f(t)=0$이므로 $\lim_{x\to 0} f(f(x))=0$

$f(f(0))=0$이므로 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $a \neq 0$일 때, $\lim_{x \to a} f(x)f(-x) = -\lim_{x \to a}\{f(x)\}^2$

$a=0$일 때, $-\lim_{x \to 0+}\{f(x)\}^2 = -\lim_{x \to 0-}\{f(x)\}^2 = -1$

따라서 $-2<a<2$인 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{x \to a} f(x)f(-x)$의 값이 존재한다. (참)

52) [정답] 13

[해설]

$g(x)=(x-2)^2+k-4$이므로 $x \to 2$일 때, $g(x) \to (k-4)+$이다.

따라서 $\lim_{x \to 2} f(g(x)) = \lim_{t \to (k-4)+} f(t)$ 이다.

이때 주어진 함수 $f(x)$의 그래프에서 $\lim_{t \to (k-4)+} f(t)$의 값은 항상 존재하므로 함수 $(f \circ g)(x)$가 $x=2$에서 불연속이려면

$\lim_{t \to (k-4)+} f(t) \neq f(g(2))$이어야 한다.

이때 $f(g(2))=f(k-4)$이므로 함수 $(f \circ g)(x)$가 $x=2$에서 불연속이려면 $\lim_{t \to (k-4)+} f(t) \neq f(k-4)$이어야 한다.

즉, 함수 $f(x)$의 $x=k-4$에서의 함숫값과 $x=k-4$에서의 우극한이 서로 달라야 한다.

따라서 $k-4=2$ 또는 $k-4=3$이므로

$k=6$ 또는 $k=7$

구하는 모든 k의 값의 합은

$6+7=13$

53)

54) [정답] ①

[해설]

조건 (가)의 식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)g(0)=0$이고,

조건 (나)에서 $g(0)=1$이므로 $f(0)=0$

이때 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x)=x(x^2+ax+b) \quad (a,\ b\text{는 실수})$$

로 놓을 수 있다.

$f(x) \neq 0$일 때 $x \neq 0$이므로 조건 (가)의 식에서

$$g(x)=\frac{x(x+3)}{f(x)}$$
$$=\frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}$$
$$=\frac{x+3}{x^2+ax+b} \quad (\text{단, } f(x) \neq 0)$$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이다. 즉, $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$이 성립한다.

이때 $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x^2+ax+b} = \frac{3}{b}$이고 $g(0)=1$이므로

$\frac{3}{b}=1$에서 $\quad b=3$

한편 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 함수 $y=\frac{x+3}{x^2+ax+b}$이 실수 전체의 집합에서 연속이어야 하므로

모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+3 \neq 0$이어야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+ax+3=0$의 판별식을 D라 하면 $D<0$이어야 하므로

$D=a^2-12<0$,

$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0$

$$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

그런데 $f(1)=1\times(1+a+3)=a+4$이고 $f(1)$이 자연수이므로 a의 값은 $a>-4$인 정수이어야 한다.

그러므로 ㉠을 만족시키는 정수 a의 값은

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$이다.

따라서 $g(2)=\frac{5}{2a+7}$는 $a=3$일 때 최솟값 $\frac{5}{13}$를 갖는다.

55) [정답] 20

[해설]

함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하므로 $f(x)$는 증가함수이거나 감소함수이다.

(ⅰ) $f(x)$가 증가함수일 때

$f(x)$가 증가함수이므로 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 교점은 $y=x$ 위에만 존재한다.

따라서 $f(-1)=-1,\ f(1)=1,\ f(2)=2$이 성립한다.

주어진 조건에 대입하면

$f(1)=c+\frac{5}{2}=1$에서 $c=-\frac{3}{2}$이고 $f(2)=4c+5=2$에서

$c=-\dfrac{3}{4}$이므로 모순이다.

(ii) $f(x)$가 감소함수일 때

$f(x)$가 감소함수이므로 곡선 $y=f(x)$는 $y=x$와 한 점에서 만나고, $y=f^{-1}(x)$와 두 점에서 만난다.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f^{-1}(x)$의 두 교점은 $y=x$에 대하여

대칭이므로

$y=f(x)$는 $y=x$와 $x=1$에서 만나고, $y=f^{-1}(x)$와 $x=-1,\ 2$에서 만난다.

따라서 세 교점의 좌표는 $(-1,\ 2),\ (1,\ 1),\ (2,\ -1)$가 된다.

이를 주어진 조건에 대입하면

$$f(-1)=-a+b=2,\ f(1)=a+b=c+\frac{5}{2}=1,\ f(2)=4c+5=-1$$

이다.

위의 연립방정식을 풀면

$a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{3}{2},\ c=-\dfrac{3}{2}$을 얻을 수 있다.

$\therefore\ 2a+4b-10c=-1+6+15=20$

56) [정답] ③

[해설]

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$에서

$\{f(x)-1\}\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}=0$

이므로

$f(x)=1,\ f(x)=-x,\ f(x)=x$

이때, $f(0)=1$ 또는 $f(0)=0$이다.

(i) $f(0)=1$일 때,

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$f(x)=1$

이다. 이때, 함수 $f(x)$의 최솟값이 0이 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $f(0)=0$일 때,

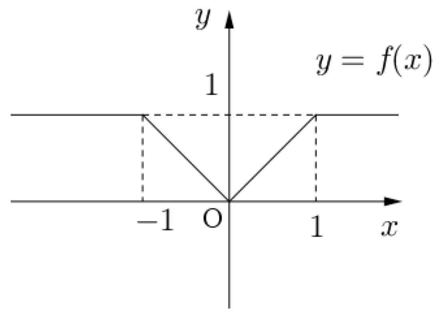
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 최댓값이 1이므로

$$f(x)=\begin{cases} |x| & (|x|\le 1) \\ 1 & (|x|>1) \end{cases}$$

이다.

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} |x| & (|x|\le 1) \\ 1 & (|x|>1) \end{cases}$$



따라서

$f\left(-\dfrac{4}{3}\right)=1,\ f(0)=0,\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

이므로

$f\left(-\dfrac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1+0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

57) [정답] ①

[해설]

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $f(x)$는 $x-1$을 인수로 가지고 나머지는 허근이 존재해야 한다.

따라서 $f(x)=(x-1)(x^2+3x+a)$에서 $x^2+3x+a=0$의 판별식 $D<0$이어야 한다.

즉, $D=9-4a<0$이므로 $a>\dfrac{9}{4}$ ······ ㉠

$f(x)=0$일 때 연속이어야 하므로 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}&=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+3x+a)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+3x+a}\\&=\frac{1}{4+a}\end{aligned}$$

즉, $\dfrac{1}{4+a}=\dfrac{1}{n}$이므로 $4+a=n$

$\therefore a=n-4$

㉠에 대입하면 $n-4>\dfrac{9}{4}$이므로 $n>\dfrac{25}{4}$

따라서 자연수 n의 최솟값은 7

58) [정답] **32**

[해설]

함수 $f(x)g(x)$가 모든 실수에서 연속이 되기 위해서는 $x=2$에서 연속이 되어야 하므로 $\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)g(x)=f(2)g(2)$를

만족하여야 한다. $\lim_{x\to2}f(x)g(x)=\lim_{x\to2}\frac{2g(x)}{x-2}=f(2)g(2)$이므로

$g(2)=0$, $g(x)=a(x-2)(x-\alpha)$라고 하면,

$\lim_{x\to2}f(x)g(x)=\lim_{x\to2}2a(x-\alpha)=f(2)g(2)=0$

$\therefore \alpha=2$

$g(x)=a(x-2)^2$ 이고 $g(0)=8$

$\therefore a=2$

$g(x)=2(x-2)^2$

$\therefore\ g(6)=2(6-2)^2=32$

59) [정답] ①

[해설]

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$, $x=3$에서 연속이어야 한다.

(ⅰ) $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=1\times g(1)$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=2\times g(1)$

$f(1)g(1)=2\times g(1)$이므로

$g(1)=0$

(ⅱ) $\lim_{x\to3+}f(x)g(x)=2\times g(3)$

$\lim_{x\to3-}f(x)g(x)=1\times g(3)$

$f(3)g(3)=2\times g(3)$이므로

$g(3)=0$

$\therefore g(x)=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

따라서

$g(2)=-1$

60) [정답] ⑤

[해설]

$g(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하자.

조건 (가)에서 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=-1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

$a+b+c=-1$

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)g(x)=f(-1)g(-1)$

$a-b+c=1$

$\therefore\ b=-1,\ c=-a$

$g(x)=x^3+ax^2-x-a=(x-1)(x+1)(x+a)$

조건 (나)에서 $f(x)g(x+k)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 상수 k가 존재하므로

$x=1$, $x=-1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x+k)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x+k)=f(1)g(1+k)$

$k(k+2)(k+a+1)=0$

$k=-2$ 또는 $k=-a-1\,(k\neq0)$ …… ㉠

$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x+k)=\lim_{x\to-1-}f(x)g(x+k)$
$=f(-1)g(-1+k)$

$k(k-2)(k+a-1)=0$

$k=2$ 또는 $k=-a+1\,(k\neq0)$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$k=-2$일 때, $a=3$

$k=2$일 때, $a=-3$

$g(0)=-a<0$이므로 $a=3$

따라서 $g(x)=x^3+3x^2-x-3$이고 $g(2)=15$

61) [정답] ③

[해설]

이차함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$이고,
$x=2$에서만 불연속이다.

따라서 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=2$에서만 연속이면 된다.

$\frac{g(2)}{f(2)}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{f(x)}$

$\frac{g(2)}{f(2)}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{x^2-4x+5}$

$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{x-2}$가 존재하고 (분모)→0이므로 (분자)→0이다.

따라서 $g(2)=0$이다. 따라서 이차함수 $g(x)$를

$g(x)=(x-2)(x+a)$

라고 하자.

$\frac{g(2)}{f(2)}=\frac{g(2)}{1}=0$,

$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)}{x^2-4x+5}=\frac{g(2)}{1}=0$

이므로 $\lim_{x\to2+}\frac{g(x)}{x-2}=0$이고

$\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x+a)}{x-2}=\lim_{x\to2+}(x+a)=2+a=0$이다.

$\therefore\ a=-2$

따라서 $g(x)=(x-2)^2$이므로 $g(5)=3^2=9$이다.

62) [정답] ①

[해설]

$\lim_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim_{x\to2+}f(x)\times\lim_{x\to2+}g(x)$

$=\lim_{x\to2+}f(x)$

$\lim_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim_{x\to2-}f(x)\times\lim_{x\to2-}g(x)=0$이고, 함수

$f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim_{x\to2+}f(x)=0$

같은 방법으로 $f(-2)=\lim_{x\to-2-}f(x)=0$

그러므로 $f(x)=(x+2)(x-2)$

함수 $f(x-a)g(x)=(x-a+2)(x-a-2)g(x)$의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되기 위해서는

$a-2=2$ 또는 $a+2=-2$

$\therefore a=4$ 또는 $a=-4$

따라서 구하는 값은 $4\times(-4)=-16$

63) [정답] 7

[해설]

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $x=1$과 $x=3$에서 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속일 때

$f(1)g(1)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)$

$=(a^2-3a+2)(7-b)$

$=(a-1)(a-2)(7-b)$

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=(a^2-3a+2)(1+b)$

$=(a-1)(a-2)(1+b)$

$f(1)g(1)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)g(x)$

이므로 $(a-1)(a-2)(7-b)=(a-1)(a-2)(1+b)$에서

$a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $b=3$

(ii) 함수 $f(x)g(x)$가 $x=3$에서 연속일 때

$f(3)g(3)=\lim_{x\to3+}f(x)g(x)$

$=(a^2-7a+10)(7-b)$

$=(a-2)(a-5)(7-b)$

$\lim_{x\to3-}f(x)g(x)=(a^2-7a+10)(3+b)$

$=(a-2)(a-5)(3+b)$

$f(3)g(3)=\lim_{x\to3-}f(x)g(x)=\lim_{x\to3+}f(x)g(x)$

이므로 $(a-2)(a-5)(7-b)=(a-2)(a-5)(3+b)$에서

$a=2$ 또는 $a=5$ 또는 $b=2$

(i), (ii)에서 $a=1$인 경우

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이고, $x=3$에서도 연속이기 위해서는 $b=2$

$a=2$인 경우

함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$과 $x=3$에서 모두 연속이므로

$b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$a=3$ 또는 $a=4$인 경우

함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$과 $x=3$에서 모두 연속이 되도록 하는 b의 값은 존재하지 않는다.

$a=5$인 경우

함수 $f(x)g(x)$는 $x=3$에서 연속이고, $x=1$에서도 연속이기 위해서는 $b=3$

따라서 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),$

$(2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (5,\ 3)$

이고 그 개수는 7이다.

64) [정답] ①

[해설]

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2-3x-5}=2$이므로

$f(x)=2x^2+ax+b$

함수 $f(x)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to3}f(x)g(x)=f(3)g(3)$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2+ax+b}{x-3}=18+3a+b$에서 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$

$\lim\limits_{x\to3}(2x^2+ax+b)=0$이므로 $18+3a+b=0$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2+ax+b}{x-3}=0$

$b=-3a-18$이므로 $f(x)=(x-3)(2x+a+6)$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2+ax+b}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}(2x+a+6)=0$

이므로 $a=-12,\ b=18$

$f(x)=2x^2-12x+18$

따라서 $f(1)=8$

65) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)$는 $f(1)=0,\ f(a)=0$이고, $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=-1$,

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=-4+2a$에서 $\lim\limits_{x\to2-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to2+}f(x)$이므로

$x=2$에서 불연속이다.

함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x)$는 $x=1,\ x=a,\ x=2$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=h(1),\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=h(a)$에서

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0,\ \lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}g(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 즉, $g(1)=0,\ g(a)=0$

또, $\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{g(x)}{f(x)}$, $\dfrac{g(2)}{-1}=\dfrac{g(2)}{-4+2a}$이므로

$g(2)=0$이고 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$이다.

$\lim\limits_{x\to1}h(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-2)(x-a)}{x-3}$

$=\dfrac{1-a}{2}$

$\lim\limits_{x\to a}h(x)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-1)(x-2)}{-x}$

$=-\dfrac{(a-1)(a-2)}{a}$

$h(1)=h(a)$이므로

$\dfrac{1-a}{2}=-\dfrac{(a-1)(a-2)}{a}$

$a>2$이므로 $a=4$

따라서

$$h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x-4)}{x-3} & (x\le2)\\ -\dfrac{(x-1)(x-2)}{x} & (x>2)\end{cases}$$

이므로

$h(1)+h(3)=-\dfrac{3}{2}+\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{13}{6}$

66) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $|x|<1$일 때 $f(x)=x^2$은 연속이고, $|x|>1$일 때 $f(x)=x^2-4|x|+3$은 연속이다.

i) $x=-1$일 때

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to-1+}f(x)=1$

ii) $x=1$일 때

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to1+}f(x)=0$

∴ $x=-1$과 $x=1$에서 불연속이므로 $f(x)$가 불연속인 점은 2개이다. (참)

ㄴ. i) $x=-1$일 때

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x=\lim\limits_{x\to-1+}f(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x=0$

$f(-1)\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

ii) $x=1$일 때

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x=\lim\limits_{x\to1+}f(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x=0$

$f(1)\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

∴ 함수 $y=f(x)\cos\dfrac{\pi}{2}x$는 $x=-1$과 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. [반례] $a=2$일 때

$f(x)$는 $x=-1,\ 1$에서 불연속이고,

$f(x-2)$는 $x=1,\ 3$에서 불연속이므로

$x=-1,\ 1,\ 3$에서의 연속성을 조사해 보면

$\lim_{x\to -1-} f(x)f(x-2)=\lim_{x\to -1+} f(x)f(x-2)$

$=f(-1)f(-3)=0$

$\lim_{x\to 1-} f(x)f(x-2)=\lim_{x\to 1+} f(x)f(x-2)$

$=f(1)f(-1)=0$

$\lim_{x\to 3-} f(x)f(x-2)=\lim_{x\to 3+} f(x)f(x-2)$

$=f(3)f(1)=0$

$\therefore$ 함수 $y=f(x)f(x-2)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

67) [정답] ④

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이고, 함수 $g(x)$는 $x=a$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0,\ x=a$에서 연속이어야 한다.

(i) $a<0$일 때,

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=3\times(-1)=-3,$

$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=2\times(-1)=-2$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(ii) $a=0$일 때,

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=3\times 0=0,$

$\lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=2\times(-1)=-2$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $a>0$일 때,

$\lim_{x\to 0-} f(x)g(x)=3\times 0=0,\ \lim_{x\to 0+} f(x)g(x)=2\times 0=0,$

$f(0)g(0)=2\times 0=0$

에서 $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 $a>0$이므로

$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=(-2a+2)\times 2a$

$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=(-2a+2)\times(2a-1)$

$f(a)g(a)=(-2a+2)\times(2a-1)$

이때 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=f(a)g(a)$이어야 하므로

$(-2a+2)\times 2a=(-2a+2)\times(2a-1),\ 2a-2=0$

따라서 $a=1$

68) [정답] ①

[해설]

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geqq 0) \\ 0 & (f(x)<0) \end{cases}=\begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x\neq 0) \end{cases}$

$h(x)=\begin{cases} 0 & (f(x)\geqq 0) \\ f(x) & (f(x)<0) \end{cases}=\begin{cases} 0 & (x=0) \\ f(x) & (x\neq 0) \end{cases}$

ㄱ. $\lim_{x\to 1+} h(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=0$

$\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=-1$

이므로 극한값 $\lim_{x\to 0} h(x)$는 존재하지 않는다. <거짓>

ㄴ. $x=0$일 때, $(h\circ g)(0)=h(g(0))=h(1)=0$

$x\neq 0$일 때, $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(0)=0$

즉, 구간 $[-1,\ 2]$에서 $(h\circ g)(x)=0$이므로 함수 $y=(h\circ g)(x)$는 연속이다.<참>

ㄷ. $x\to 0$일 때, $h(x)\to 0$이므로 $h(x)=t$로 놓으면

$\lim_{x\to 0}(g\circ h)(x)=\lim_{x\to 0}(g(h(x)))=\lim_{t\to 0} g(t)=0$

한편, $(g\circ h)(0)=g(h(0))=g(0)=1$

그러므로 $\lim_{x\to 0}(g\circ h)(x)\neq(g\circ h)(0)$ <거짓>

69) [정답] ⑤

[해설]

$g(x)=x^3+ax^2+bx+3$ ($a,\ b$는 상수)이라 하면 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $f(x)$가 불연속인 점 $x=0,\ x=-2$에서 연속이면 된다.

(i) $x=0$일 때

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=3$

$\lim_{x\to 0+} g(f(x))=\lim_{x\to 1-} g(x)=g(1)$

($\because$ $g(x)$는 삼차함수이므로 연속함수이다.)

$\lim_{x\to 0+} g(f(x))=(g\circ f)(0)$이므로 $g(1)=3$

$1+a+b+3=3$에서 $a+b=-1$ ⋯⋯ ㉠

(ii) $x=2$일 때

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(0)=3$

$\lim_{x\to 2+} g(f(x)) = \lim_{x\to -1+} g(x) = g(-1)$

$\lim_{x\to 2+} g(f(x)) = (g\circ f)(2)$이므로 $g(-1)=3$

$-1+a-b+3=3$에서 $a-b=1$……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=-1$

$\therefore\ g(x)=x^3-x+3$

$\therefore\ g(3)=27-3+3=27$

70) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=\begin{cases} x-3 & (x\neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$ 이고,

$f(x)=2$일 때, $x=5$이므로

$(f\circ f)(x)=\begin{cases} x-6 & (x\neq 2,\ x\neq 5) \\ -2 & (x=2) \\ 1 & (x=5) \end{cases}$

$\lim_{x\to 2}(x-6)=-4$이고 $f(f(2))=-2$이므로

$\lim_{x\to 2}(x-6)\neq f(f(2))$ 따라서 $x=2$에서 불연속

$\lim_{x\to 5}(x-6)=-1$이고 $f(f(5))=1$이므로

$\lim_{x\to 5}(x-6)\neq f(f(5))$ 따라서 $x=5$에서 불연속

즉, 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x=2$ 또는 $x=5$에서 불연속이므로 $0\leq x\leq 6$에서 불연속이 되는 모든 a값의 합은 $2+5=7$이다.

71) [정답] 20

[해설]

합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이어야 한다. 함수 $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다. 그러므로 $f(x)=t$라 놓으면

$\lim_{x\to 2-0} g(f(x)) = \lim_{t\to -0} g(t) = g(0)$

$\lim_{x\to 2+0} g(f(x)) = \lim_{t\to 2-0} g(t) = g(2)$

$g(f(2))=g(1)$

따라서 $\lim_{x\to 2-0} g(f(x)) = \lim_{x\to 2+0} g(f(x)) = g(f(2))$에서

$g(0)=g(2)=g(1)$이고 $g(0)=10$이므로

$g(1)+g(2)=10+10=20$

72) [정답] ④

[해설]

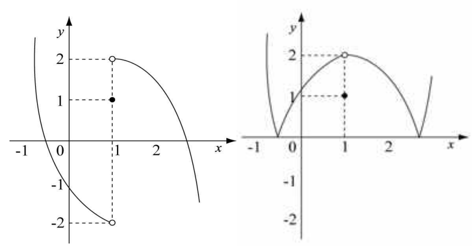
$g(f(x))=\begin{cases} 2 & \left(0<x<\frac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\leqq x<\frac{7}{2}\right) \\ 2 & \left(\frac{7}{2}\leqq x<\frac{15}{2}\right) \\ 6 & \left(\frac{15}{2}\leqq x<\frac{31}{2}\right) \\ 12 & \left(\frac{31}{2}\leqq x<20\right) \end{cases}$

따라서 불연속 점의 개수는 4개이다.

73) [정답] ⑤

[해설]

$y=f(x)$ $y=|f(x)|$



ㄱ. 그래프에 의하여 $\lim_{x\to 1}|f(x)|=2$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 2+} f(f(x)) = \lim_{t\to 1-} f(t) = -2$ (참)

ㄷ. 함수 $y=f(f(x))$는 $f(x)=1$일 때 불연속점을 가지므로 $x=2, 1, 1-\sqrt{3}$ 에서 불연속이다. 따라서 3개 존재한다. (참)

74) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $g(f(0))=g(0)=0$(참)

ㄴ. $\lim_{x\to 0} g(f(x))=0$, $g(f(0))=0$이므로 $x=0$에서 연속 (참)

ㄷ. $y=g(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로 주어진 구간에서 $y=g(f(x))$는 $f(x)=1$인 $x=\frac{1}{2}$에서 불연속,

$\lim\limits_{x\to 2+} g(f(x))=-1,\ \lim\limits_{x\to 2-} g(f(x))=-2$

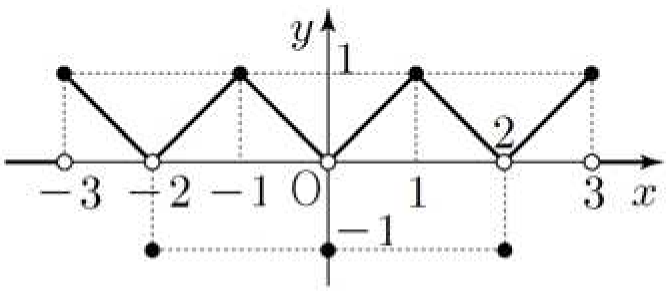
이므로 $x=2$에서 불연속,

구간내의 이외의 점에서는 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 모두 연속이므로 $y=g(f(x))$는 연속 (참)

75) [정답] ②

[해설]

함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$y=(g\circ f)(x)$는 $x=-3,\ -2,\ 0,\ 2,\ 3$에서 불연속이다.

따라서 불연속점은 5개이다.

76) [정답] ②

[해설]

각각의 항의 함수가 불연속이 되는 x의 값은

$y=[4x]:\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{21}{4}$ …… 21개

$y=[6x]:\frac{1}{6},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{6},\ \frac{7}{6},\ \cdots,\ \frac{29}{6}$ …… 29개

$y=\left[\frac{x}{2}\right]:2,\ 4$ …… 2개

$y=\left[\frac{x}{4}\right]:4$ …… 1개

서로 다른 점은 39곳인데, 한 함수만 불연속인 점에서 $f(x)$는 불연속이다. 이제 두 개 이상의 함수가 공통으로 불연속인 점

$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4,\ \frac{9}{2}$

에 대하여 연속성을 조사한다.

(i) $x=\frac{1}{2}$: $f\left(\frac{1}{2}\right)=2-3+0-0=-1$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}-} f(x)=1-2+0-0=-1,$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}+} f(x)=2-3+0-0=-1$이므로 연속이다.

$x=\frac{3}{2},\ x=\frac{5}{2},\ x=\frac{7}{2},\ x=\frac{9}{2}$에서도 마찬가지로 연속이다.

(ii) $x=1:f(1)=4-6+0-0=-2$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=3-5+0-0=-2,$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=4-6+0-0=-2$이므로 연속이다.

$x=3$에서 마찬가지 방법으로 연속이다.

(iii) $x=2:f(x)=8-12+1-0=-3$

$\lim\limits_{x\to 2-} f(x)=7-11+0-0=-4,\ \lim\limits_{x\to 2+} f(x)=-3$이므로 불연속이다.

(iv) $x=4:f(4)=16-24+2-1=-7$

$\lim\limits_{x\to 4-} f(x)=15-23+1-0=-7,\ \lim\limits_{x\to 4+} f(x)=-7$이므로 연속이다.

$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4,\ \frac{9}{2}$ 중에서 연속인 점은 8곳이므로 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 $39-8=31$개이다.

77) [정답] ③

[해설]

원의 중심$(1,\ 2)$와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리는

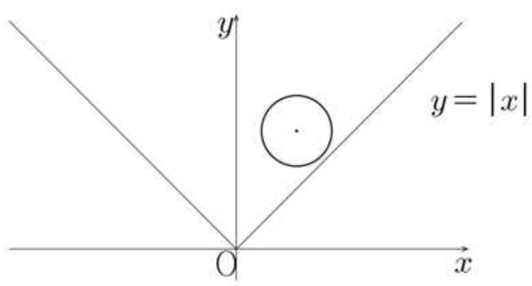
$$\frac{|1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이고 원의 중심$(1,\ 2)$와 직선 $x+y=0$ 사이의 거리는

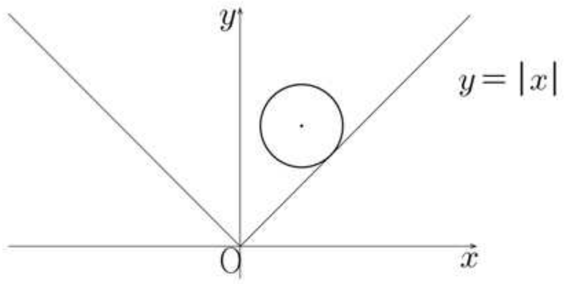
$$\frac{|1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이다. 원의 중심$(1,\ 2)$와 원점 사이의 거리는 $\sqrt{5}$ 이다.

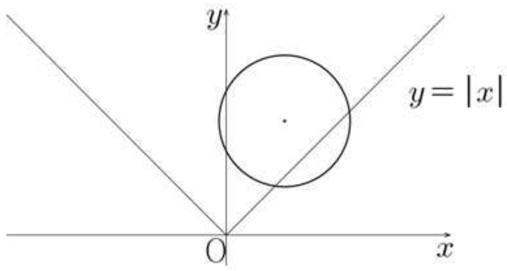
(i) $0<r<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $f(r)=0$(그림 참고)



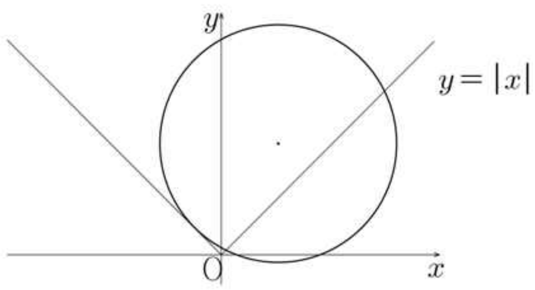
(ii) $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $f(r)=1$(그림 참고)



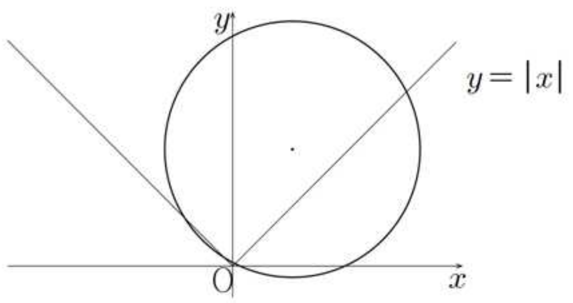
(iii) $\frac{\sqrt{2}}{2}<r<\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $f(r)=2$ (그림 참고)



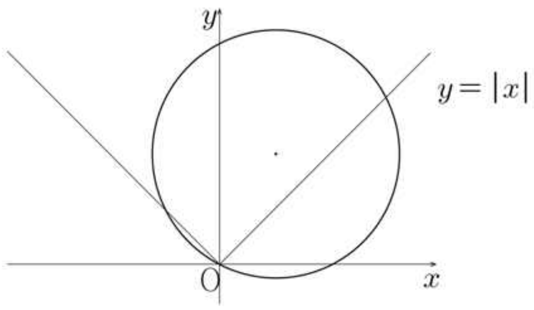
(iv) $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $f(r)=3$ (그림 참고)



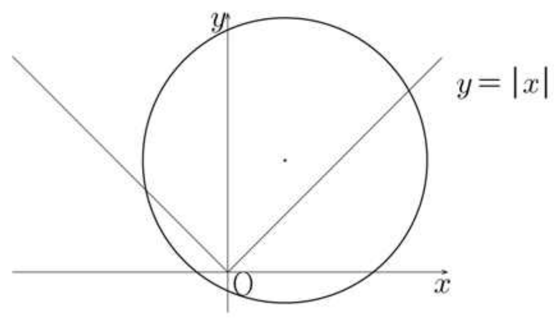
(v) $\frac{3\sqrt{2}}{2}<r<\sqrt{5}$ 일 때, $f(r)=4$ (그림 참고)



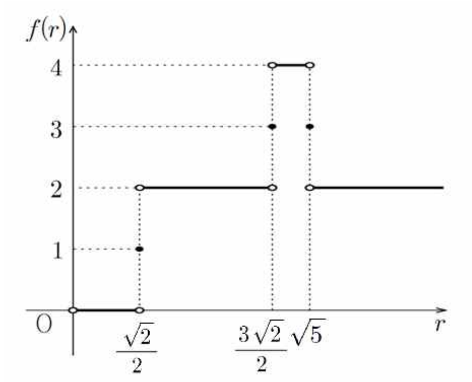
(vi) $r=\sqrt{5}$ 일 때, $f(r)=3$ (그림 참고)



(vii) $r>\sqrt{5}$ 일 때, $f(r)=2$ (그림 참고)



(i)~(vii)에 의해 함수 $f(r)$의 그래프는



이다. 따라서 함수 $f(r)$가 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{5}$ 에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 3이다.

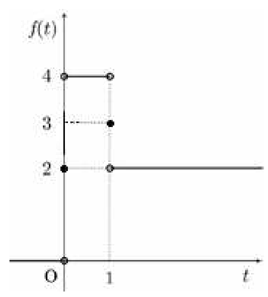
78) [정답] 8

[해설]

함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2 & (t=0) \\ 4 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \\ 2 & (t>1) \end{cases}$$

이고 $t=0$과 $t=1$에서 불연속이다.



함수 $f(t)g(t)$가 $t=0$과 $t=1$에서 연속이므로

$$\begin{cases} \lim_{t\to 0+} f(t)g(t)=4g(0) \\ \lim_{t\to 0-} f(t)g(t)=0 \\ f(0)g(0)=2g(0) \end{cases}$$

$4g(0)=0=2g(0)$

$\therefore\ g(0)=0$

$$\begin{cases} \lim_{t\to1+} f(t)g(t)=2g(1) \\ \lim_{t\to1-} f(t)g(t)=4g(1) \\ f(1)g(1)=3g(1) \end{cases}$$

$2g(1)=4g(1)=3g(1)$

$\therefore\ g(1)=0$

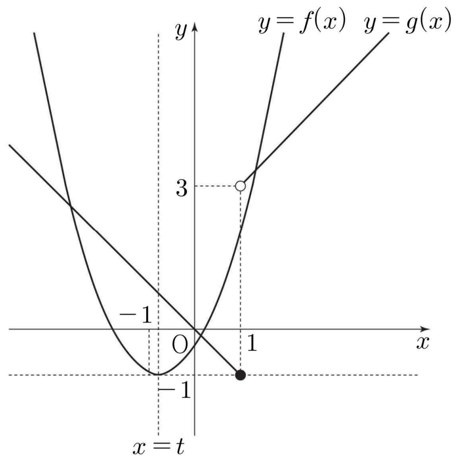
$\therefore\ g(t)=t(t-1)$

$\therefore\ f(3)+g(3)=2+6=8$

79) [정답] ③

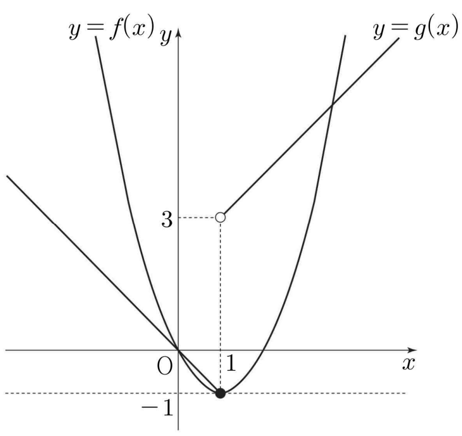
[해설]

ㄱ.



$\lim_{t\to-1+} h(t)=3$ (참)

ㄴ.



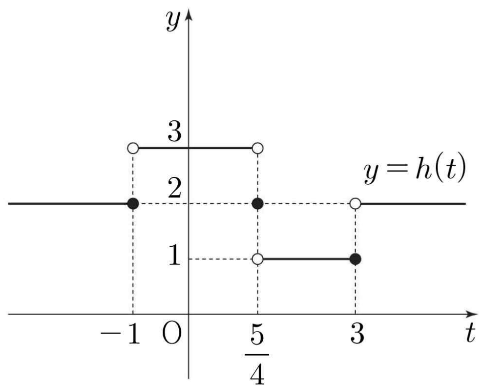
$\lim_{t\to1-} h(t)=3,\ \lim_{t\to1+} h(t)=3,\ h(1)=3$이므로

함수 $h(t)$는 $t=1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프가 $t=\frac{5}{4}$에서

접하므로 함수 $h(t)$는

$$h(t)=\begin{cases} 2 & (t\le-1) \\ 3 & \left(-1<t<\frac{5}{4}\right) \\ 2 & \left(t=\frac{5}{4}\right) \\ 1 & \left(\frac{5}{4}<t\le3\right) \\ 2 & (t>3) \end{cases}$$



함수 $h(t)$가 $t=-1,\ t=\frac{5}{4},\ t=3$에서

불연속이므로 모든 a의 값의 합은

$-1+\frac{5}{4}+3=\frac{13}{4}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

80) [정답] ②

[해설]

점 $(0, 5)$를 지나고 기울기가 t인 직선이 함수 $f(x)$의 그래프

가 만나는 점의 개수를 a의 값의 범위에 따라 나타내면 다음

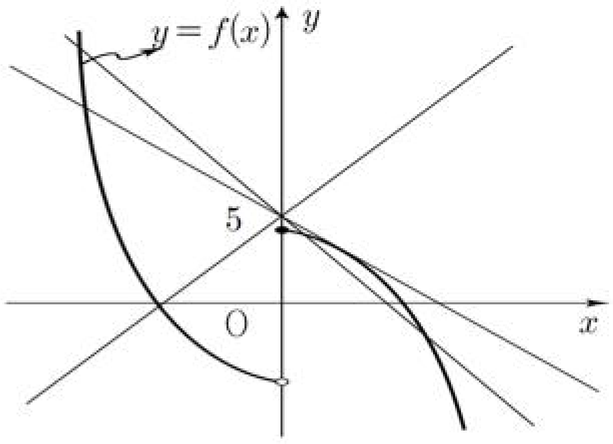
과 같다.

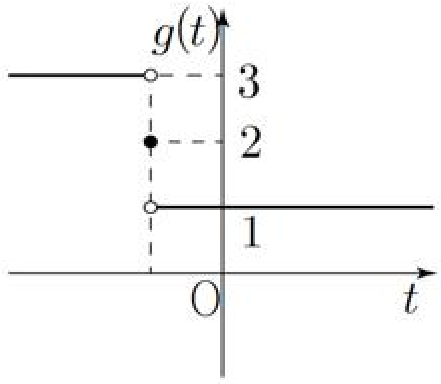
(ⅰ) $a+7<5(a<-2)$일 때

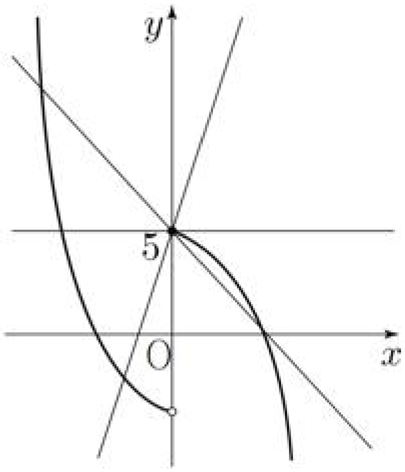
기울기 t의 범위에 따라 교점의 개수는 1, 2, 3이다.
따라서 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.

그러므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이 아니다.

(ⅱ) $a+7=5(a=-2)$일 때

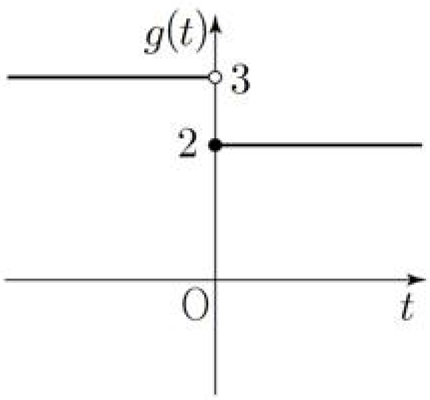






기울기 t의 범위에 따라 교점의 개수는 2, 3이다.
따라서

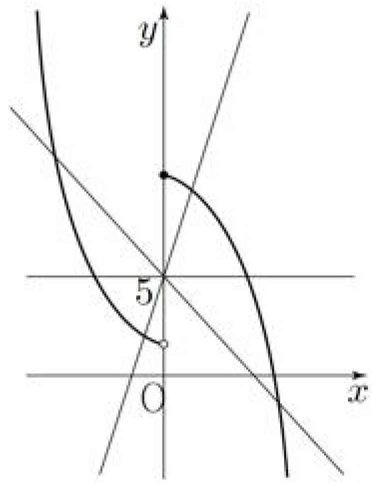
$g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



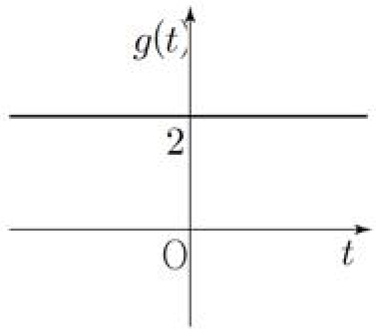
그러므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이 아니다.

(iii) $a-1<5<a+7(-2<a<6)$일 때

기울기 t의 범위에 따라 교점의 개수는 2이다.

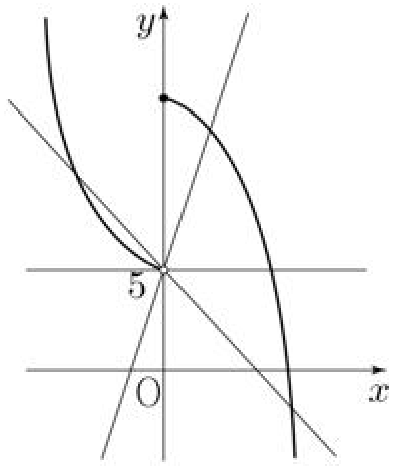


따라서 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



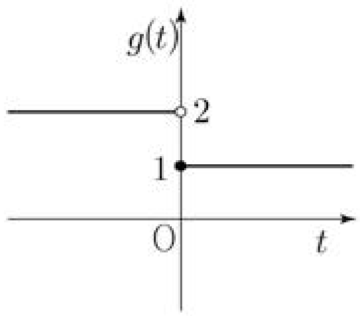
그러므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(iv) $a-1=5(a=6)$일 때



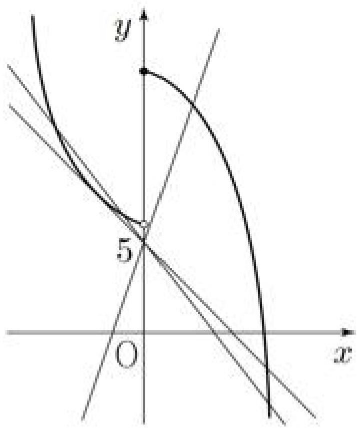
기울기 t의 범위에 따라 교점의 개수는 1, 2이다.
따라서

$g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



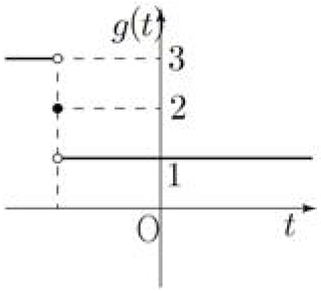
그러므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이 아니다.

(v) $a-1>5(a>6)$일 때



기울기 t의 범위에 따라 교점의 개수는 1, 2, 3이다.

따라서 $g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이 아니다.

따라서 (ⅰ)~(ⅴ)에서 함수 $g(t)$가 모든 실수 t에 대하여 연속이 되도록 하는 a의 범위는 $-2<a<6$이므로 정수 a는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$이다.

그러므로 그 합은 $-1+0+1+2+3+4+5=14$이다.

81) [정답] 19

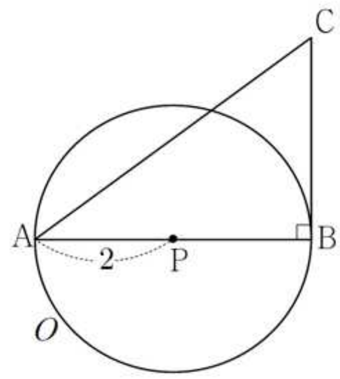
[해설]

[그림1]과 같이 $x=2$일 때,
원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 3이다.

$\therefore f(2)=3$

$0<x<2$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$\therefore f(x)=2(0<x<2)$



[그림1]

[그림2]와 같이 원 O가 선분 AC에 접할 때, 접하는 점을 H라 하면 삼각형 AHP와 삼각형 ABC는 닮음이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{AP}:\overline{HP}$

$5:3=x:2$

$x=\frac{10}{3}$

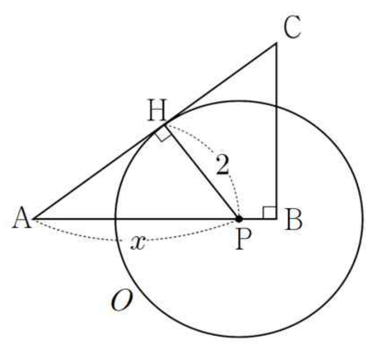
$x=\frac{10}{3}$일 때, $f\left(\frac{10}{3}\right)=3$

$2<x<\frac{10}{3}$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 4이다.

$\therefore f(x)=4(2<x<\frac{10}{3})$

$\frac{10}{3}<x<4$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$\therefore f(x)=2(\frac{10}{3}<x<4)$

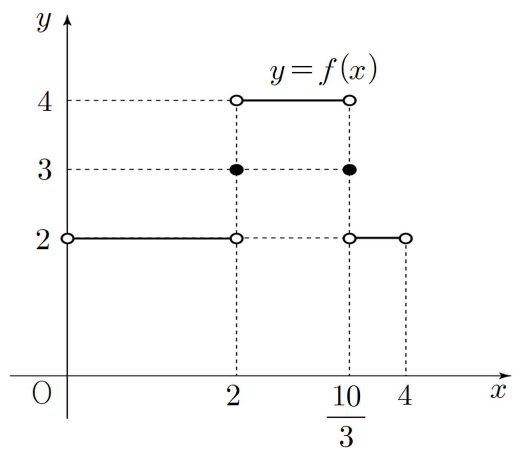


[그림2]

따라서

$$f(x)=\begin{cases} 2 & (0<x<2) \\ 3 & (x=2) \\ 4 & \left(2<x<\frac{10}{3}\right) \\ 3 & \left(x=\frac{10}{3}\right) \\ 2 & \left(\frac{10}{3}<x<4\right) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



함수 $f(x)$가 $x=2$, $x=\frac{10}{3}$에서 불연속이므로

모든 실수 a의 값의 합은 $2+\frac{10}{3}=\frac{16}{3}$이다.

$\therefore p=3,\ q=16$

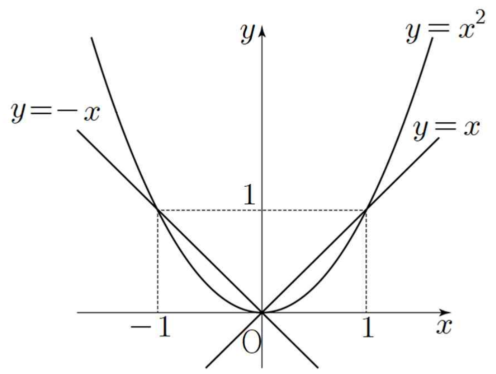
따라서 $p+q=19$

82) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. 집합 $\{(x,\ y)\,|\,y=x$ 또는 $y=x^2\}$이 나타내는 도형과

직선 $x+y=0$을 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



$x^2=-x$에서 $x=0$ 또는 $x=-1$

$\therefore a=0$일 때, $f(0)=2$이다. (참)

ㄴ. $x+y=-\frac{1}{4}$과 $y=(x-a)^2-a$를 연립하여 정리하면

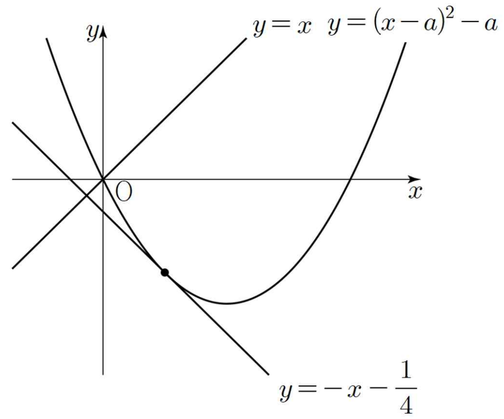
$x^2-(2a-1)x+a^2-a+\frac{1}{4}=0$이다.

이 이차방정식의 판별식을

D_1이라 하면 $D_1=(2a-1)^2-4\left(a^2-a+\frac{1}{4}\right)=0$이므로 직선

$x+y=-\frac{1}{4}$과

곡선 $y=(x-a)^2-a$는 한 점에서 만난다.

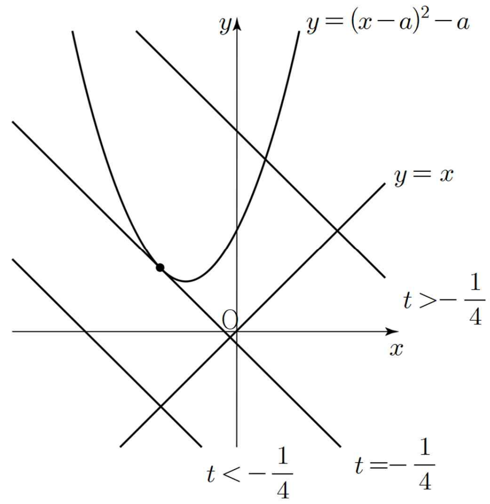


$\lim_{t\to -\frac{1}{4}-} f(t)=1$, $\lim_{t\to -\frac{1}{4}+} f(t)=3$이므로 $f(t)$는

$t=-\frac{1}{4}$에서 불연속이다. (참)

ㄷ. (ⅰ) 곡선 $y=(x-a)^2-a$와 직선 $y=x$가 만나는 점의

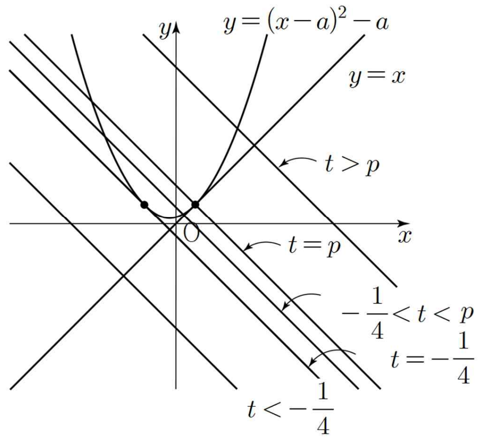
개수가 0인 경우



함수 $f(t)$의 불연속인 점의 개수가 1이다.

(ⅱ) 곡선 $y=(x-a)^2-a$와 직선 $y=x$가 만나는 점의

개수가 1인 경우



함수 $f(t)$의 불연속인 점의 개수가 2이다.

곡선 $y=(x-a)^2-a$와 직선 $y=x$가 접할 때의 a의 값을 구하자.

$(x-a)^2-a=x$에서 이를 정리하면

$$x^2-(2a+1)x+a^2-a=0$$

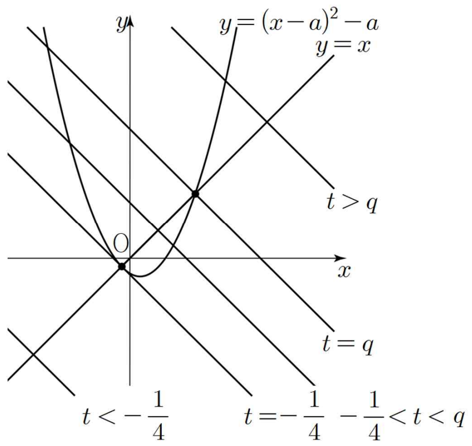
이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(2a+1)^2-4(a^2-a)=8a+1$$

$D_2=0$에서 $a=-\frac{1}{8}$

(iii) 곡선 $y=(x-a)^2-a$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 개수가 2인 경우

(a) 곡선 $y=(x-a)^2-a$가 두 직선 $y=x, y=-x-\frac{1}{4}$이 만나는 점을 지나는 경우

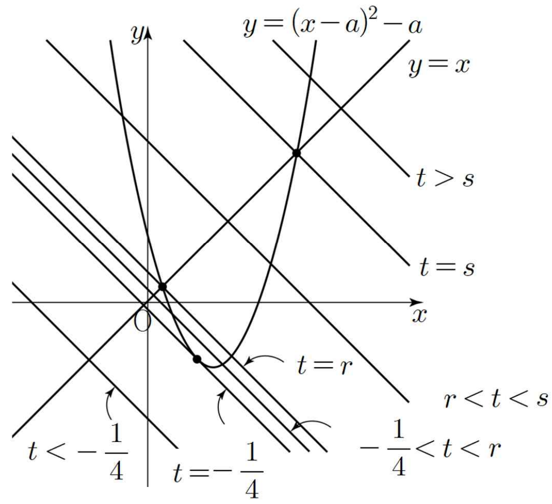


함수 $f(t)$의 불연속인 점의 개수가 2이다.

곡선 $y=(x-a)^2-a$가 두 직선 $y=x, y=-x-\frac{1}{4}$이 만나는 점 $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$을 지나므로 $-\frac{1}{8}=\left(-\frac{1}{8}-a\right)^2-a$를 정리하면 $\left(a-\frac{3}{8}\right)^2=0$

$$\therefore a=\frac{3}{8}$$

(b) 곡선 $y=(x-a)^2-a$가 두 직선 $y=x$, 만나는 점을 지나지 않는 경우



함수 $f(t)$의 불연속인 점의 개수가 3이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $f(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속이 되는 실수 α의 개수가 2일 때, a의 값은 $-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$이다.

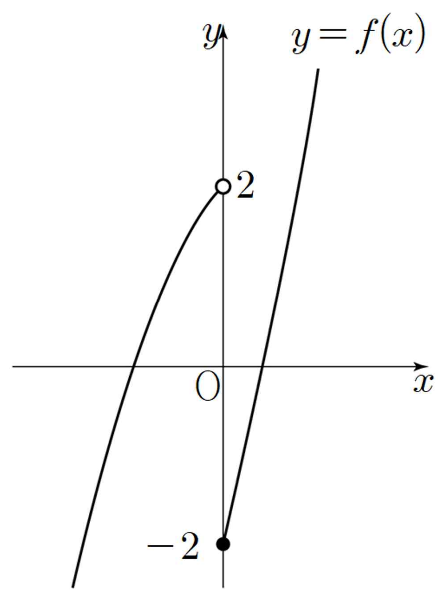
따라서 모든 a의 값의 합은 $\frac{1}{4}$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

83) [정답] 100

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=0$에서 불연속이고 그 개형은 그림과 같다.



함수 $h(t)$에 대하여

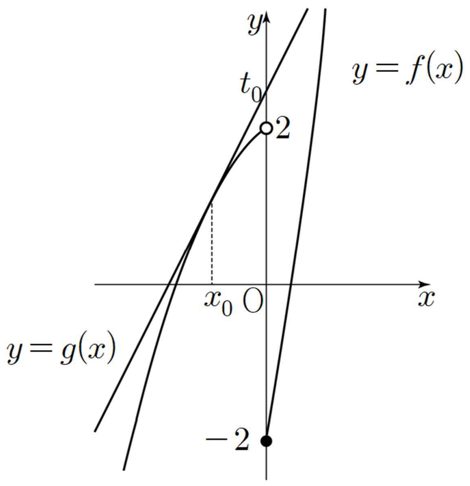
(ⅰ) $-2<t<2$일 때

k값에 관계없이 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 2이므로 $h(t)=2$

(ⅱ) $t\geq 2$일 때

$\lim_{x\to 0-} f'(x)=3k$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 기울기가 2이므로

(a) $3k<2$이면 $f'(x_0)=2$인 $x=x_0$ $(x_0<0)$가 존재한다.



즉, $x=x_0$에서 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프가 접할 때 $t=t_0$이라 하면, $t=2$에서 $h(t)=2$ $y=f(x)$ $y=g(x)$

$2<t<t_0$에서 $h(t)=3$

$t=t_0$에서 $h(t)=2$

$t>t_0$에서 $h(t)=1$

(b) $3k\geq 2$이면 $t\geq 2$에서 $h(t)=1$

(ⅲ) $t\leq -2$일 때

$\lim_{x\to 0+} f'(x)=\frac{4}{3k}$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 기울기가 2이므로

(a) $\frac{4}{3k}<2$이면 $f'(x_1)=2$인 $x=x_1$ $(x_1>0)$가 존재한다.

즉, $x=x_1$에서 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$의 그래프가 접할 때 $t=t_1$이라 하면,

$t_1<t\leq -2$에서 $h(t)=3$

$t=t_1$에서 $h(t)=2$

$t<t_1$에서 $h(t)=1$

(b) $\frac{4}{3k}\geq 2$이면

$t=-2$에서 $h(t)=2$

$t<-2$에서 $h(t)=1$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$k<\frac{2}{3}$일 때

$$h(t)=\begin{cases} 1 & (t<-2) \\ 2 & (-2\leq t\leq 2) \\ 3 & (2<t<t_0) \\ 2 & (t=t_0) \\ 1 & (t>t_0) \end{cases}$$

$k>\frac{2}{3}$일 때

$$h(t)=\begin{cases} 1 & (t<t_1) \\ 2 & (t=t_1) \\ 3 & (t_1<t\leq -2) \\ 2 & (-2<t<2) \\ 1 & (t\geq 2) \end{cases}$$

$k=\frac{2}{3}$일 때

$$h(t)=\begin{cases} 1 & (t<-2) \\ 2 & (-2\leq t<2) \\ 1 & (t\geq 2) \end{cases}$$

그러므로 함수 $h(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속이 되는 실수 α의 개수가 2가 되도록 하는 $k=\frac{2}{3}$

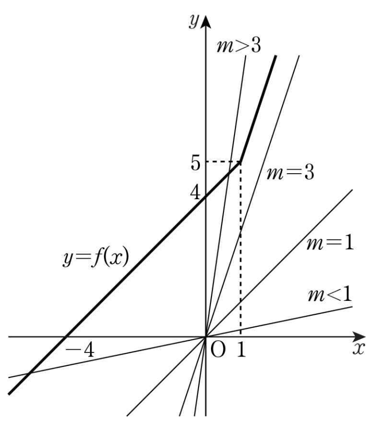
따라서 $150k=100$

84) [정답] 8

[해설]

직선 $y=mx$는 실수 m의 값에 관계없이 항상 원점을 지나므로 직선 $y=mx$와 함수

$f(x)=\begin{cases} x+4 & (x<1) \\ 3x+2 & (x\geq 1) \end{cases}$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 함수 $g(m)$은

$g(m)=\begin{cases} 1 & (m<1 \text{ 또는 } m>3) \\ 0 & (1\leq m\leq 3) \end{cases}$

즉, 함수 $g(m)$은 $m=1$과 $m=3$에서 불연속이다.

그런데 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$, $x=3$에서도 연속이 되어야 한다.

(i) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1-} g(x)h(x)=1\times h(1)=h(1)$,

$\lim_{x\to1+} g(x)h(x)=0\times h(1)=0$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to1-} g(x)h(x)=\lim_{x\to1+} g(x)h(x)$에서 $h(1)=0$

(ii) $x=3$일 때

$\lim_{x\to3-} g(x)h(x)=0\times h(3)=0$,

$\lim_{x\to3+} g(x)h(x)=1\times h(3)=h(3)$

함수 $g(x)h(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3} g(x)h(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to3-} g(x)h(x)=\lim_{x\to3+} g(x)h(x)$에서 $h(3)=0$

(i), (ii)에서 $h(1)=h(3)=0$이므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$는 $h(x)=(x-1)(x-3)$

따라서 $h(5)=4\times2=8$

85) [정답] ④

[해설]

$0<r<1$이면 $f(r)=0$

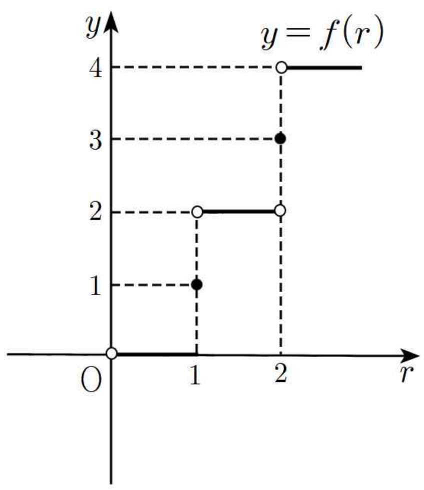
$r=1$이면 $f(r)=1$

$1<r<2$이면 $f(r)=2$

$r=2$이면 $f(r)=3$

$r>2$이면 $f(r)=4$

따라서 함수 $f(r)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. $f(2)=3$ (참)

ㄴ. $\lim_{r\to1+} f(r)=2\neq1=f(1)$ (거짓)

ㄷ. 함수 $f(r)$은 $r=1$일 때와 $r=2$일 때 불연속이므로 구간 $(0,4)$에서 불연속점의 개수는 2이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

86) [정답] ④

[해설]

(i) $a\neq0$ 인 경우

방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 판별식 D가 양수이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)=2a^2-6a+4$

$=2(a^2-3a+2)=2(a-1)(a-2)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $a>2$

또한, 중근(한 개의 실근)을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=2(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

또한, 실근을 갖지 않을 조건은

$\frac{D}{4}=2(a-1)(a-2)<0$

$\therefore 1<a<2$

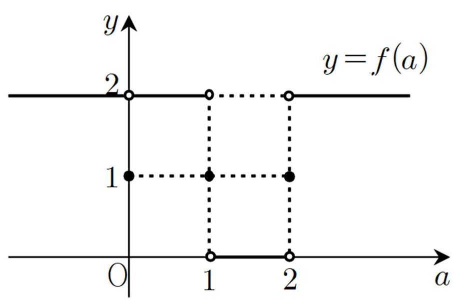
(ii) $a=0$ 인 경우

$-4x+2=0$이므로 실수 x는 $x=\frac{1}{2}$인 한 개다.

(i), (ii)에 의하여

$$f(a)=\begin{cases}2 & (a<0 \text{ 또는 } 0<a<1,\ a>2)\\1 & (a=0,\ 1,\ 2)\\0 & (1<a<2)\end{cases}$$

이를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



ㄱ. $\lim_{a\to0} f(a)=2$, $f(0)=1$이므로 $\lim_{a\to0} f(a)\neq f(0)$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{a \to c+} f(a) \neq \lim_{a \to c-} f(a)$인 c는 $c=1$, $c=2$이다. (참)

ㄷ. $a=0,\ 1,\ 2$에서 함수 $f(a)$가 불연속이다.(참)

87) [정답] ②

[해설]

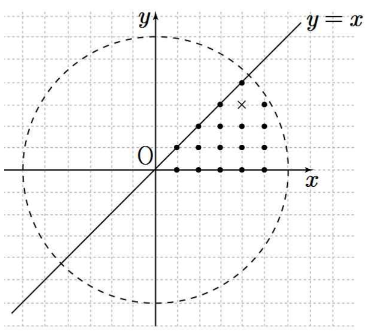
함수 $f(t)$는 원 $x^2+y^2=t^2$의 내부에 포함되는 정수 격자점의 개수이므로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f(t)=\begin{cases} 1 & (0<t\le 1) \\ 5 & (1<t\le \sqrt{2}) \\ 9 & (\sqrt{2}<t\le 2) \\ \vdots & \quad \vdots \end{cases}$$

위와 같이 원 $x^2+y^2=t^2$이 정수 격자점을 지날 때마다 함수 $f(t)$는 불연속이 된다. 그러므로 원점으로부터 거리(반지름의 길이 t)가 서로 다른 정수 격자점의 개수를 세면 함수 $f(t)$가 불연속이 되는 t의 개수를 알 수 있다.

$0<t<6$이므로 원점으로부터 거리(반지름의 길이 t)가 서로 다른 정수 격자점은 그림과 같이

영역 $\begin{cases} 0<x^2+y^2<6^2 \\ 0\le y\le x \end{cases}$에서 찾을 수 있다.



$x=1$일 때, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$
$x=2$일 때, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$
$x=3$일 때, $(3,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$
$x=4$일 때, $(4,\ 0)$, $(4,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 4)$
$x=5$일 때, $(5,\ 0)$, $(5,\ 1)$, $(5,\ 2)$, $(5,\ 3)$
여기서 주의할 점은 그림과 같이 두 좌표 $(5,\ 0)$과 $(4,\ 3)$은 원점으로부터 거리(반지름의 길이 t)가 같다.
따라서 불연속이 되는 t의 개수는 17이다.

88) [정답] 5

[해설]

직선 AB에서 가장 먼 원 위의 점 X까지의 거리는 $\frac{8}{5}$이고 그때의 넓이는 4이다.

반대편의 가장 먼 점 X까지의 거리는 $\frac{2}{5}$이고, 그때의 넓이는 1이다.

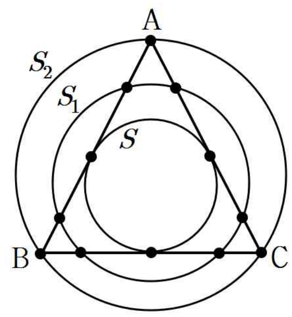
즉, 선분 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이고 삼각형 ABX의 넓이의 최댓값이 4, 최솟값이 1이므로 원 위의 모든 점이 집합의 원소가 될 수 있다.
따라서 t의 범위에 따라 $f(t)$를 구하면 다음과 같다.

$$f(t)=\begin{cases} 4 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \\ 2 & (1<t<4) \\ 1 & (t=4) \end{cases}$$

따라서 불연속이 되는 점은 $t=1,\ 4$이므로 불연속인 모든 t의 합은 $1+4=5$

89) [정답] ③

[해설]



원에서 거리가 t $(0\le t\le 1)$인 삼각형 ABC 위의 점 P의 개수를 $f(t)$라 하므로 다음과 같이 나누어볼 수 있다.

(i) $t=0$일 때
위의 그림에서 원 S와 삼각형 ABC의 교점의 개수와 같으므로 $f(t)=3$

(ii) $0<t<1$일 때
위의 그림과 같이 중심이 원 S와 같고, 반지름이 $1+t$인 원 S_1과 삼각형 ABC의 교점의 개수와 같으므로 $f(t)=6$

(iii) $t=1$일 때
위의 그림과 같이 중심이 원 S와 같고, 반지름이 2인 원 S_2와 삼각형 ABC의 교점의 개수와 같으므로 $f(t)=3$

이상에서 $f(t)=\begin{cases} 3 & (t=0) \\ 6 & (0<t<1) \\ 3 & (t=1) \end{cases}$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=0$ 또는 $t=1$에서 불연속이므로 불연속점의 개수 a는 $a=2$

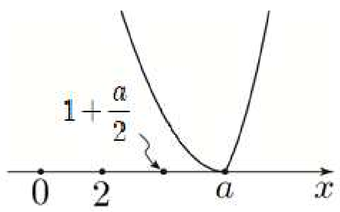
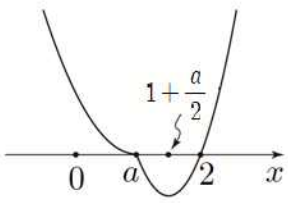
또, $\lim_{t\to 1-} f(t)=6$이므로 $b=6$

$\therefore a+b=2+6=8$

90) [정답] ①

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a>2$인 경우	(ii) $0<a<2$인 경우
	

(i) $a>2$인 경우

함수 $f(x)$는 $0<x<1+\frac{a}{2}$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)>0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<2$인 경우

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $\left[0,\ 1+\frac{a}{2}\right]$에서 연속이고,

$f(0)>0$, $f\left(1+\frac{a}{2}\right)<0$이므로 사이값 정리에 의하여 0과

$1+\frac{a}{2}$ 사이에 $f(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다.

조건 (나)에 의해 $0<a<2$인 경우의 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(2-a)\times\left\{-f\left(1+\frac{a}{2}\right)\right\}=-\frac{1}{2}\times(2-a)\times\left(\frac{a-2}{2}\right)\left(\frac{2-a}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{8}(2-a)^3=\frac{1}{8}$$

$(2-a)^3=1$,

즉 $a=1$

따라서 $f(3a)=f(3)=2$