제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터

$$\vec{a}+2\vec{b},\quad 3\vec{a}+k\vec{b}$$

가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은? (단, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$) [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$1:2 = 3:k$

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이고 한 점근선의 방정식이 $y=2x$일 때, 두 초점 사이의 거리는? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① $4\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{5}$ ③ $8\sqrt{5}$ ④ $10\sqrt{5}$ ⑤ $12\sqrt{5}$

$a=3$ $b=6$ $c=3\sqrt{5}$

25. 좌표평면에서 두 직선

ℓ_1 $\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3}$, ℓ_2 $x-1=\frac{2-y}{3}$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

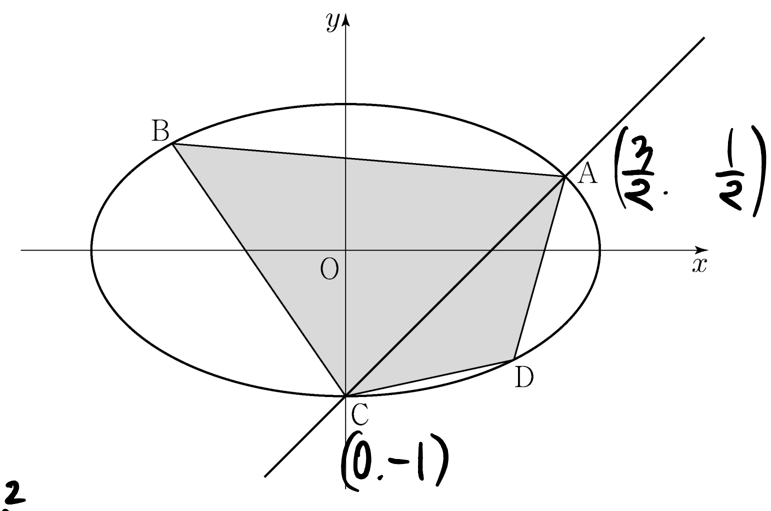
① $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

$\vec{l_1}=(4,3)$ $\vec{l_2}=(1,-3)$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}|}{|\vec{l_1}||\vec{l_2}|}=\frac{5}{5\sqrt{10}}$$

26. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점을 A, C라 하자. 선분 AC가 사각형 ABCD의 대각선이 되도록 타원 위에 두 점 B, D를 잡을 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은? [3점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

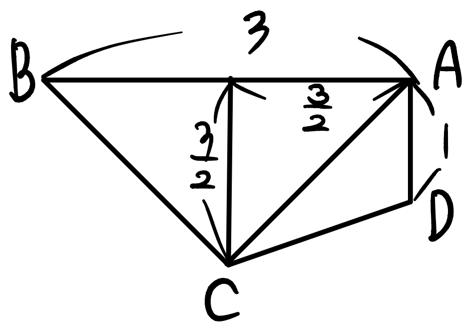


$\frac{x^2}{3}+x^2-2x+1=1 \to x=0, \frac{3}{2}$

B에서의 접선 기울기 = D에서의 접선 기울기 = 1

→ $B(-3k, k)$ $D(3k, -k)$로 잡을 수 있다. $(k>0)$

$\frac{9}{3}k^2+k^2=4k^2=1$ ∴ $k=\frac{1}{2}$



ABC $=\frac{9}{4}$ ACD $=\frac{3}{4}$

ABCD $=3$

2022 4월 학평 26번

25. 좌표평면에서 두 직선

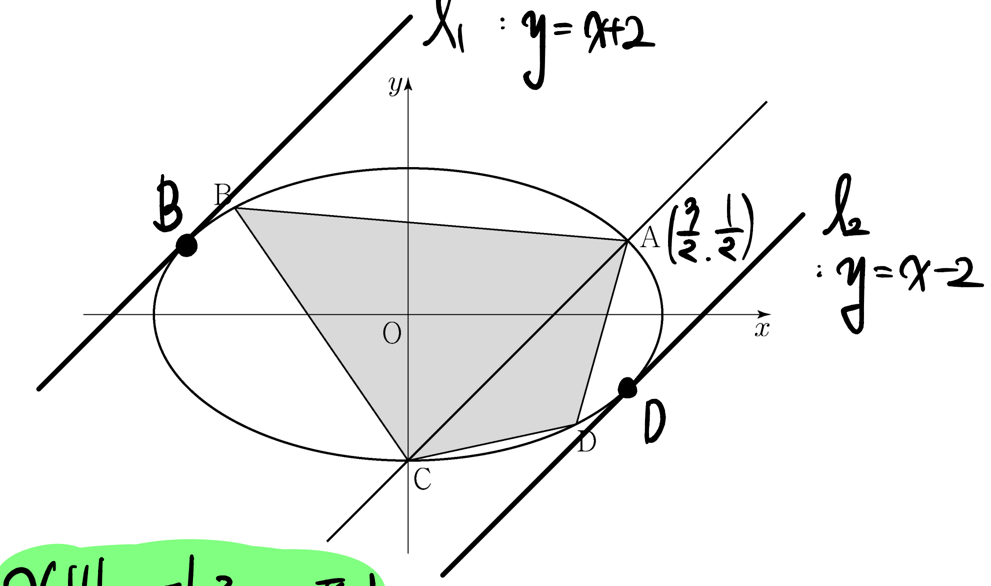
$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\quad x-1=\frac{2-y}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

26. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점을 A, C라 하자. 선분 AC가 사각형 ABCD의 대각선이 되도록 타원 위에 두 점 B, D를 잡을 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은? [3점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3 ✓



26번 다른 풀이

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ $\quad m=1,\ a^2=3,\ b^2=1$

$y=x\pm2$

l_1, l_2 사이 거리 $=2\sqrt{2}$

$\overline{AC}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$\therefore$ ABCD $=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}=3$

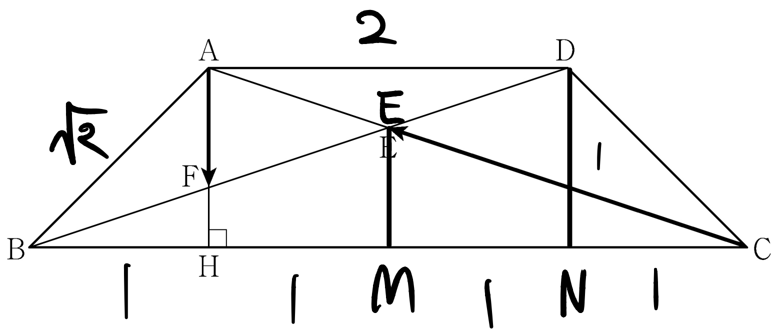
$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}$

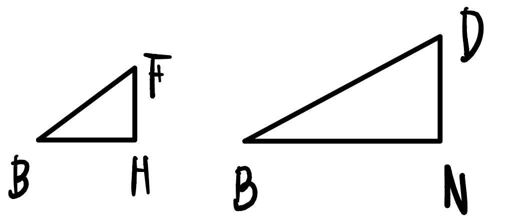
$=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{ME} = -|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{ME}|$

쌍곡선 $\overline{PB}-\overline{PA}=2|a|$

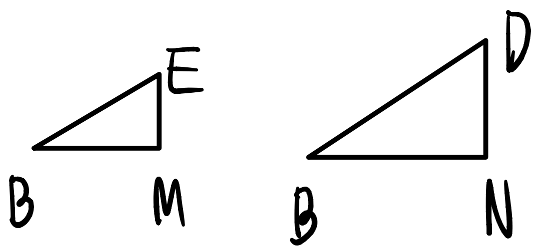
27. $\overline{AD}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{2}$, $\angle ABC=\angle BCD=45°$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 선분 BD의 교점을 F라 할 때, $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{5}{9}$





$\overline{FH}=\frac{1}{3}\overline{DN}=\frac{1}{3}$, $\overline{AF}=\frac{2}{3}$



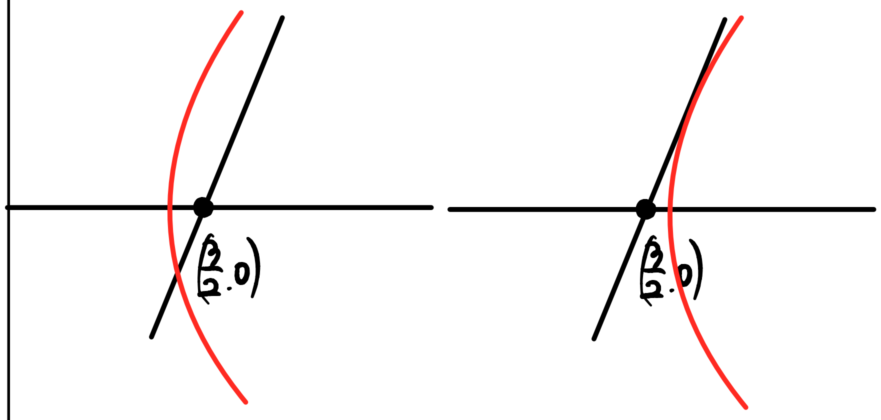
$\overline{ME}=\frac{2}{3}\overline{DN}=\frac{2}{3}$

28. 좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 점 $A(c, 0)$, $B(-c, 0)$ $(c>0)$에 대하여 $\overline{PB}-\overline{PA}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3, 3)$일 때, 상수 c의 값은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

$2|a|$가 최대이려면?

쌍곡선이 x축과 만나는 점이 원점에서 최대한 멀어져야 함



$2|a|$ 작음 $2|a|$ 최대

⇒ 쌍곡선이 P에서 $y=2x-3$에 접함.

$l: \frac{3x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}=1 \Leftrightarrow y=2x-3$

$\frac{3y}{b^2}=\frac{3x}{a^2}-1$

$\frac{9y}{b^2}=\frac{9x}{a^2}-3 \Leftrightarrow y=2x-3$

$\therefore b^2=9$, $a^2=\frac{9}{2}$, $c^2=\frac{27}{2} \rightarrow c=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

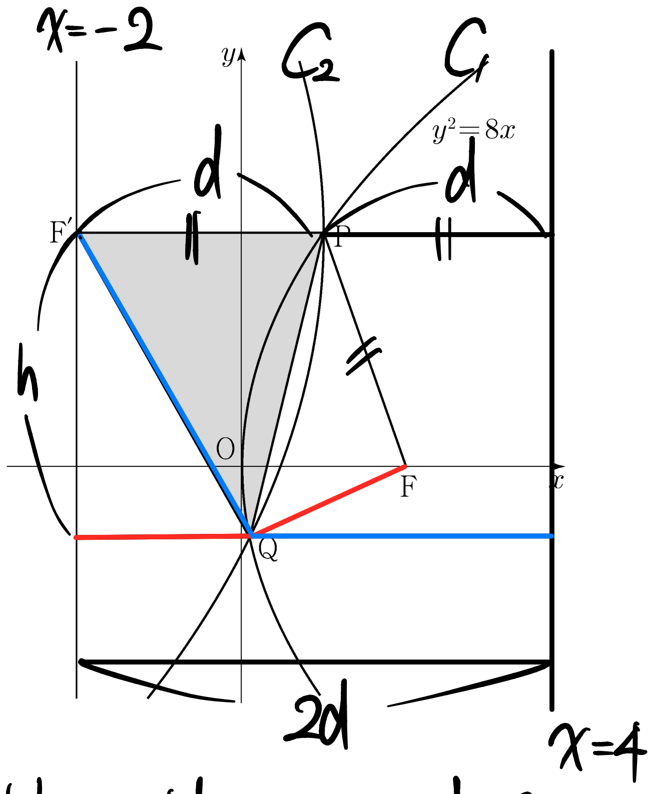
$=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

단답형

C_1

29. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F′이라 하자. 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF′Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

C_2



PF′QF 둘레 길이 $=4d=12$ $\therefore d=3$

$P(1, 2\sqrt{2})$, $F'(-2, 2\sqrt{2})$

C_2 : $(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)$

PF′Q 넓이 $=\frac{3}{2}h \longrightarrow$ h 구하려면 Q의 y좌표 구해야 함

연립방정식 $\begin{cases}(y-2\sqrt{2})^2=-12(x-1)\\ y^2=8x\end{cases}$

$(x, y)=\underset{P}{(1, 2\sqrt{2})}$ or $\underset{Q}{\left(\frac{1}{25}, -\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)}$

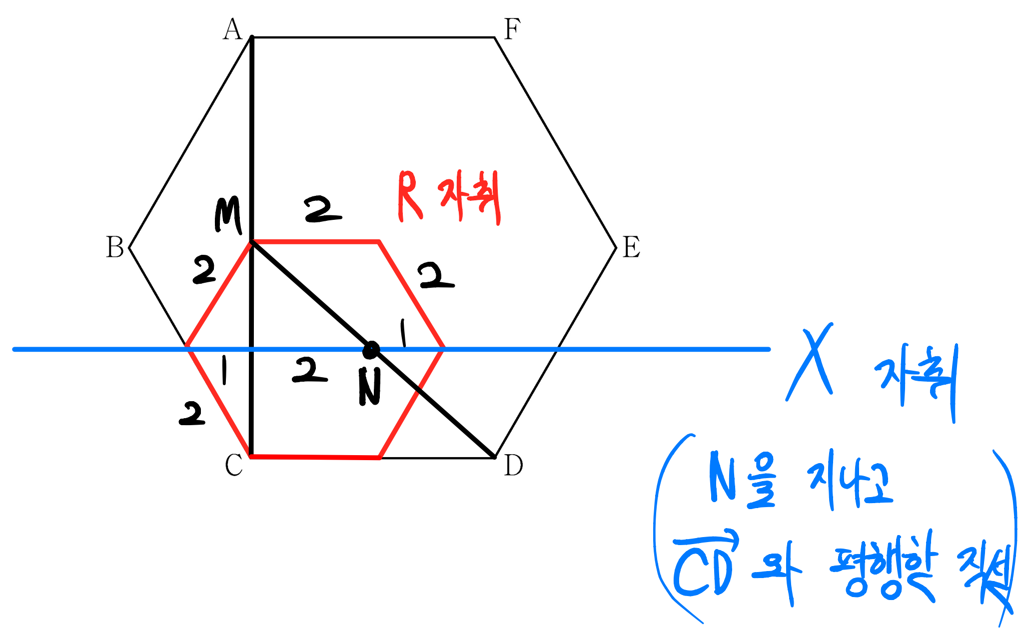
$h=\frac{12\sqrt{2}}{5}$, $\therefore \frac{3}{2}h=\frac{18\sqrt{2}}{5}$ $\boxed{23}$

(연립방정식 푸는 과정은 생략했어요)

30. 좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

> (가) $\overrightarrow{CX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$ $=\overrightarrow{CR}+\overrightarrow{CQ}$ $\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CR}\right)$
>
> (나) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}+2\overrightarrow{XD}=k\overrightarrow{CD}$

$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [4점]



$\overline{AC}$ 중점 M, $\overline{MD}$ 중점 N

(나) $(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC})+2\overrightarrow{XD}$

$=2\overrightarrow{XM}+2\overrightarrow{XD}$

$=4\overrightarrow{XN}=k\overrightarrow{CD}$

$16|\overrightarrow{XN}|^2=k^2\times 16^2$

$\therefore |\overrightarrow{XN}|^2=k^2$

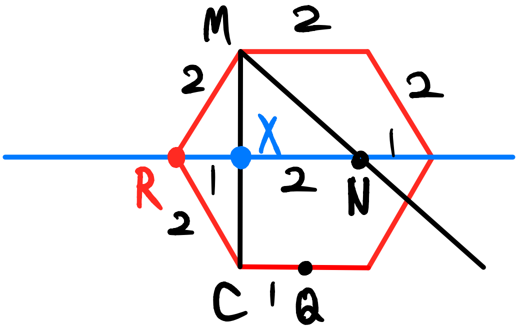
$|\overrightarrow{CX}|$가 최소일 때의 $|\overrightarrow{XN}|^2=\alpha^2$

$|\overrightarrow{CX}|$가 최대일 때의 $|\overrightarrow{XN}|^2=\beta^2$

* 확인 사항

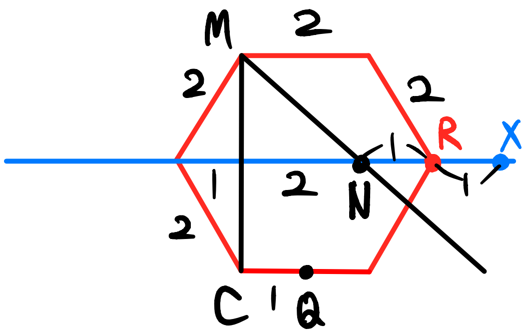
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

(i) $|\overrightarrow{CX}|$가 최소



$$|\overrightarrow{XN}|^2 = 4 = \alpha^2$$

(ii) $|\overrightarrow{CX}|$가 최대



$$|\overrightarrow{XN}|^2 = 4 = \beta^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8$$