21. $x>0$ 에서 정의되고 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x)=\int f(x)dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to+0} g(x)=g(2)+1$
> (나) 함수 $[g(x)]$ 의 불연속점의 x좌표의 최솟값이 3 이다.

$f(3)$ 의 값은? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대의 정수이다.) [4점]

① $\frac{7}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

해설)

$f(x)=px^2+qx+r$, $F(x)=\int_0^x (pt^2+qt+r)dt$ 라 할 때, $g(x)=F(x)+C$입니다. $(x>0)$

$\lim_{x\to+0} g(x)=g(2)+1$ 에서 $C=g(2)+1$ 이므로, $g(2)=C-1$ 입니다.

만약 구간 $(0,3)$ 에서 $g(x)<C-1$ 인 x 가 존재한다면 (나)조건을 불만족합니다.
그러므로 $(0,3)$ 에서 $g(x)\geq C-1$, $g(2)=C-1$ 이고, 이는 곧

$\lim_{x\to 2+0}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)\geq 0$

$\lim_{x\to 2-0}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)\leq 0$ 이므로, $g'(2)=0$ 입니다. $g'(x)=f(x)$ 이므로, $f(2)=0$ 임을 알 수 있습니다.

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 할 때, $f(2)=0$ 이므로 $f(x)=a(x-2)(x-b)$ 라 할 수 있습니다. 위에서 점 $(2,g(2))$ 는 함수 $g(x)$ 의 극솟값이므로, $b<2$입니다. (만일 극댓값이라면, 중간값 정리에 의하여 $f(\alpha)=f(2)=C-1$ 인 α 가 0 과 2 사이에 적어도 하나 존재하고, α에 대하여 $\int_0^\alpha f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx=-1$가 성립합니다. 이는 곧

$\int_\alpha^2 f(x)dx=0$인데, 이 조건을 만족시키기 위해서는 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수여야 합니다. 문제 발문에서 최고차항의 계수가 양수임이 전제되었으므로, 점

$(2, g(2))$는 함수 $g(x)$의 극솟값입니다.[1])

$f(x) = a(x-2)(x-b) = ax^2 - a(b+2)x + 2ab$이므로,

$g(x) = \dfrac{a}{3}x^3 - \dfrac{a(b+2)}{2}x^2 + 2abx + C$입니다.

점 $(2, g(2))$는 함수 $g(x)$의 극솟값이므로, $x > 2$에서 함수 $g(x)$는 증가합니다.

그러므로 함수 $[g(x)]$의 불연속점의 x좌표의 최솟값이 3이기 위해서는

$\lim\limits_{x \to 3-0} g(x) = \lim\limits_{x \to 3+0} g(x) = g(3) = C$여야 합니다. (만일 $g(x) = 3$인 값이 구간 $(2, 3)$에 존재한다면 (나) 조건을 만족하지 못하므로.)

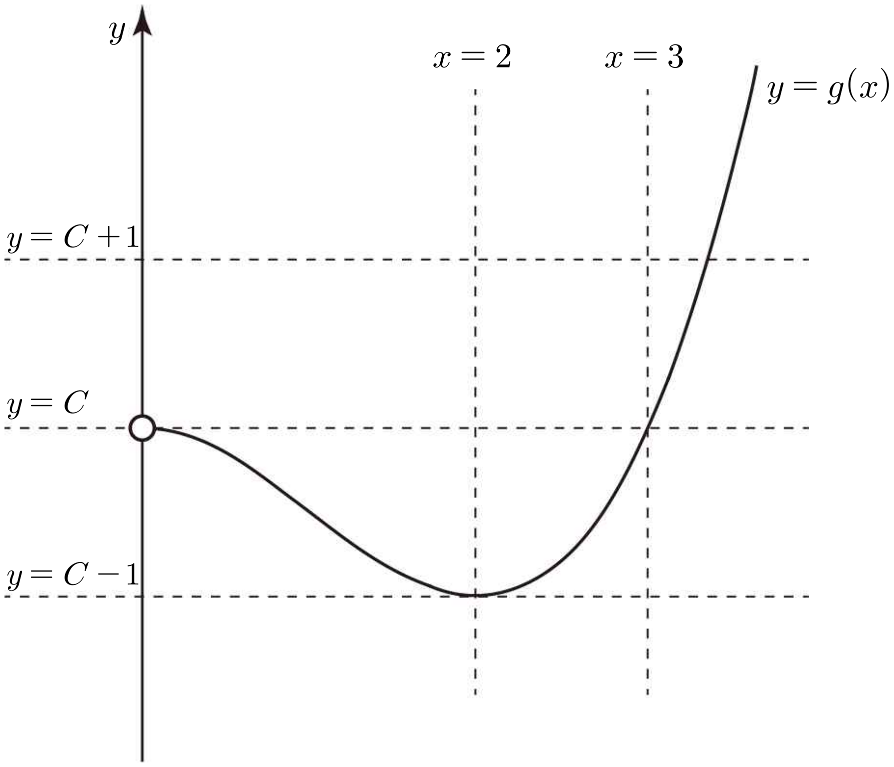
$g(3) = \dfrac{3}{2}ab + C = C \to ab = 0$이고, $a > 0$이므로 $b = 0$입니다.

그러므로 $f(x) = ax(x-2), g(x) = \dfrac{a}{3}x^3 - ax^2 + C$이고, 앞에서 $g(2) = C - 1$임을 보였으므로

$g(2) = C - \dfrac{4}{3}a = C - 1$에서 $a = \dfrac{3}{4}$입니다.

$f(x) = \dfrac{3}{4}x(x-2)$이므로, $f(3) = \dfrac{3}{4} \times 3 \times 1 = \dfrac{9}{4}$입니다.

또한 이 때 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같습니다.



1) 만일 최고차항의 계수가 음수라고 하더라도, 그 그래프는 (나) 조건을 만족하지 못합니다.

사실 이는 잘못된 풀이입니다. C가 정수임을 확인하지 않았기 때문입니다.
C가 정수가 됨을 확인하겠습니다.
만약 C가 정수가 아니고, $[C]=n$이라 하면 $n<C<n+1$, $n-1<C-1<n$입니다.
함수 $g(x)$는 다항함수이므로 $x>0$에서 항상 연속이고, $\lim_{x\to+0} g(x)=C, g(2)=C-1$이므로 중간값의 정리에 의하여 $C-1<n<C$인 정수 n에 대하여 $f(k)=n$인 실수 k가 0과 2 사이에 적어도 하나 존재합니다.
그러므로 구간 $(0,k]$에서 $[g(x)]=n$, $(k,2)$에서 $[g(x)]=n-1$입니다. 이는 (나) 조건에 어긋나므로 모순입니다. 그러므로 적분상수 C는 정수가 됩니다.

답 : ②