수능 정답 및 해설 2012학년도 수리 영역(나형)

정 답										
	01 ②	02 ④	03 ①	04 ③	05 ②	06 ⑤	07 ④	08 ①	09 ③	10 ⑤
	11 ⑤	12 ③	13 ④	14 ②	15 ⑤	16 ①	17 ②	18 ③	19 ①	20 ⑤
	21 ④	22 11	23 19	24 35	25 10	26 12	27 20	28 37	29 21	30 39

해 설

01 $A^{-1}=\dfrac{1}{1-0}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$

따라서, 모든 성분의 합은 $1+2+1=4$이다.

02 (주어진 식)$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{2}{5^n}}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{5+0}{1+0}=5$

03 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

$f(x)=x^2+5$에서 $f'(x)=2x$

$\therefore\ f'(1)=2\times1=2$

04 (지불 금액)$=500\times\sqrt[3]{8}+500\times\log_3 27$

$=500\times2+500\times3$

$=500\times5=2500$

05 $a_{n+1}=2\cdot\dfrac{n}{n+1}a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$이므로

$$a_2=2\cdot\frac{1}{2}a_1$$

$$a_3=2\cdot\frac{2}{3}a_2$$

$$\times)\ a_4=2\cdot\frac{3}{4}a_3$$

$$a_4=2^3\cdot\frac{1}{4}a_1$$

$\therefore\ a_4 = 2^3 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot 1 = 2$

[다른 풀이] $a_{n+1} = \dfrac{2n}{n+1} a_n$ 에서

$(n+1) \cdot a_{n+1} = 2 \cdot na_n$ 이므로 수열 $\{n \cdot a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

$\therefore\ n \cdot a_n = 1 \cdot a_1 \cdot 2^{n-1},\ 4 \cdot a_4 = 1 \cdot 1 \cdot 2^{4-1}$

$\therefore\ a_4 = 2$

06 (확률의 총합)$=1$이므로

$\dfrac{1}{4} + a + 2a = 1$

$\therefore\ 3a = \dfrac{3}{4}$

$\therefore\ a = \dfrac{1}{4}$

$\mathrm{E}(X) = 0 \times \dfrac{1}{4} + 1 \times \dfrac{1}{4} + 2 \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{5}{4}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{E}(4X+10) &= 4\mathrm{E}(X) + 10 \\ &= 4 \times \frac{5}{4} + 10 \\ &= 15\end{aligned}$$

07 주어진 조건에 따라 다음 식을 만족한다.

$\log a = A - \dfrac{1}{2}\log 1 - \dfrac{4K}{1}\ \cdots$ ㉠

$\log \dfrac{a}{2} = A - \dfrac{1}{2}\log 4 - \dfrac{d^2K}{4}\ \cdots$ ㉡

식 ㉠, ㉡를 정리하면

$\log a = A - 4K\ \cdots$ ㉢

$\log a = A - \dfrac{d^2K}{4}\ \cdots$ ㉣

㉢ $-$ ㉣ 하면 $\left(\dfrac{d^2}{4} - 4\right)K = 0$

$\therefore\ d = 4\ (\because\ d > 0,\ K > 0)$

08 x^4의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_4 a^3$이므로

${}_7\mathrm{C}_4 a^3 = 280,\ a^3 = 8$

$\therefore\ a = 2$

따라서, x^5의 계수는 ${}_7\mathrm{C}_5 a^2 = \dfrac{7 \cdot 6}{2} \cdot 2^2 = 84$이다.

09 $F(x)=\int_0^x (t^3-1)dt$에서

$F'(x)=x^3-1$

$\therefore\ F'(2)=2^3-1=7$

10 조건에서

(ⅰ) $\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{3}{8}$ ($\because$ A, B는 독립)

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{8}$

(ⅱ) $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2}$ ($\because$ A, B는 독립)

$\therefore\ \dfrac{3}{8}+\mathrm{P}(B)-\dfrac{3}{8}\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{8}\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{8}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{5}$

$\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B^c)=\mathrm{P}(A)\cdot(1-\mathrm{P}(B))$

$=\dfrac{3}{8}\times\left(1-\dfrac{1}{5}\right)$ ($\because$ (ⅰ), (ⅱ)에 의하여)

$=\dfrac{3}{10}$

11 $a_{11}=-5+2\cdot 10=15$

$a_{20}=-5+2\cdot 19=33$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=11}^{20}a_k=\frac{10(a_{11}+a_{20})}{2}$

$=\dfrac{10(15+33)}{2}$

$=240$

12 직선 PQ의 방정식은

$y=-(x-t)+t+1$

$=-x+2t+1$

$\therefore\ \mathrm{Q}(0,\ 2t+1)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AP}}^2=(t+1)^2+(t+1)^2$

$=2t^2+4t+2$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AQ}}^2=(-1)^2+(2t+1)^2$

$=4t^2+4t+2$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}=2$$

13 주머니에서 꺼낸 카드가 짝수일 경우를 모두 구하면 다음의 두 가지 경우이다.

(ⅰ) 주사위가 3 또는 6이 나오고, A 주머니에서 짝수가 나올 확률은

$$\frac{2}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$$

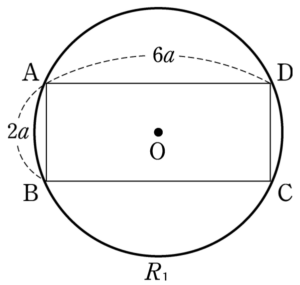
(ⅱ) 주사위가 1 또는 2 또는 4 또는 5가 나오고, B 주머니에서 짝수가 나올 확률은

$$\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}$$

따라서, 구하는 확률(조건부 확률)은

$$\frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15}+\frac{1}{3}}=\frac{2}{7}$$

14 R_1의 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $6a$, $2a$라 하면



$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10}\,a=1$

$\therefore\ a=\frac{1}{\sqrt{10}}$

R_n의 가장 작은 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$r_1=1,\ r_2=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad r_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{10}}r_n$

각 원에서 색칠된 부분의 넓이는 첫 항이 $\pi-\frac{12}{10}$, 공비가 $\frac{1}{10}$인 등비수열이고, 개수는 1개, 2개, 4개, …의 등비수열을 이루므로

$$S_n=\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+2\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\pi-\frac{6}{5}\right)+2^2\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\pi-\frac{6}{5}\right)$$
$$+\cdots+2^{n-1}\frac{1}{10^{n-1}}\cdot\left(\pi-\frac{6}{5}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}S_n=\frac{\pi-\frac{6}{5}}{1-\frac{2}{10}}=\frac{5\pi-6}{4}=\frac{5}{4}\pi-\frac{3}{2}$$

15 ㄱ. $A^2+B=3E$의 양변의 왼쪽과 오른쪽에 A를 곱하면

$A^3+AB=3A\quad\cdots$ ㉠

$A^3+BA=3A\quad\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ 하면

$AB=BA$이다. (참)

ㄴ. $A^2=3E-B$를 $A^4+B^2=7E$에 대입하면

$(3E\,B)^2 + B^2 = 7E$

$2B^2 - 6B + 2E = O$

$B^2 - 3B + E = O$

$B(3E - B) = E$

따라서 $B^{-1} = 3E - B = A^2$ $(\because A^2 + B = 3E)$이다. (참)

ㄷ. ㄴ에 의해 주어진 식은

$B^{-1} + B = 3E$, $(B^{-1})^2 + B^2 = 7E$이고

$$\begin{aligned} A^6 + B^3 &= (B^{-1})^3 + B^3 \\ &= (B^{-1} + B)\{(B^{-1})^2 - E + B^2\} \\ &= 3E \cdot (7E - E) \\ &= 18E \end{aligned}$$

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

16 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 4^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m \le X \le a) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{a-m}{4}\right) = 0.3413$에서 표준정규분포표를 이용하면

$\dfrac{a-m}{4} = 1$

$\therefore\ a = m + 4 \cdots$ ㉠

크기가 16인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X} \ge a - 2)$

$= \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{a-2-m}{1}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 2)$ $(\because$ ㉠에서$)$

$= 0.5 - 0.4772$

$= 0.0228$

17 자연수 n에 대하여 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$이므로

$nS_{n+1} = (n+2)S_n + (n+1)^3$에서

$n(S_n + a_{n+1}) = nS_n + 2S_n + (n+1)^3$

$\therefore\ na_{n+1} = 2S_n + (n+1)^3 \quad (n \ge 2) \cdots$ ㉠

이다. 2 이상의 자연수 n에 대하여 ㉠의 식에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$(n-1)a_n = 2S_{n-1} + n^3 \qquad \cdots$ ㉡

이고, ㉠에서 ㉡을 뺀 식으로부터

$$\begin{aligned} na_{n+1} - (n-1)a_n &= 2(S_n - S_{n-1}) + (n+1)^3 - n^3 \\ &= 2a_n + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

$\therefore\ na_{n+1} = (n+1)a_n + \boxed{3n^2 + 3n + 1}$ (가)

를 얻는다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{\boxed{3n^2+3n+1}}{n(n+1)}=\frac{a_n}{n}+3+\frac{1}{n(n+1)}$$

이다. $b_n=\dfrac{a_n}{n}$이라 하면

$b_{n+1}=b_n+3+\boxed{\dfrac{1}{n(n+1)}}$ (나) $(n\geq 2)$

이므로 $b_n=b_2+\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\left(3+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=b_2+\boxed{3(n-2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}$ (다) $(n\geq 3)$

이다.

$\therefore\ f(n)=3n^2+3n+1,\ g(n)=\dfrac{1}{n(n+1)},\ h(n)=3n-\dfrac{11}{2}-\dfrac{1}{n}$이므로

$$\frac{f(3)}{g(3)h(6)}=\frac{37}{\frac{1}{12}\times\left(18-\frac{11}{2}-\frac{1}{6}\right)}=\frac{37}{\frac{1}{12}\times\frac{74}{6}}=\frac{37}{\frac{2\times 37}{72}}=36$$

18 ㄱ. $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=1$ $\therefore$ 참

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to1+0}f(x)=2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}f(x)=2,\ f(1)=1$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. $g(x)=(x-1)f(x)$로 놓으면

$g(1)=(1-1)\cdot f(1)=0$

$\lim\limits_{x\to1}g(x)=\lim\limits_{x\to1}(x-1)f(x)=0$

따라서, $g(x)=(x-1)\cdot f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. $\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

19 $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$이므로

$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx$이면

$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx=0$

따라서, $f(x)=ax^2-1$로 놓으면

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax^2-1)dx$$

$$=\frac{a}{3}-1=0\quad\therefore\ a=3$$

$\therefore\ f(x)=3x^2-1,\ f(2)=12-1=11$

20 $\log 54 = 1 + \log 5.4$이므로

$f(54) = 1,\ g(54) = \log 5.4$

따라서, 주어진 부등식은

$f(n) \le 1$

$g(n) \le \log 5.4$ ⋯㉠

n은 자연수이므로 $f(n) = 0$ 또는 $f(n) = 1$

(ⅰ) $f(n) = 0$일 때 ㉠에서

$0 \le \log n - 0 \le \log 5.4$

$1 \le n \le 5.4$

$\therefore\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

(ⅱ) $f(n) = 1$일 때 ㉠에서

$0 \le \log n - 1 \le \log 5.4$

$\log 10 \le \log n \le \log 54$

$10 \le n \le 54$

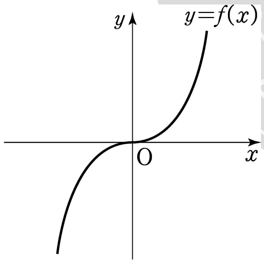
$\therefore\ n = 10,\ 11,\ \cdots,\ 54$

따라서, (ⅰ), (ⅱ)로부터 구하는 n의 개수는

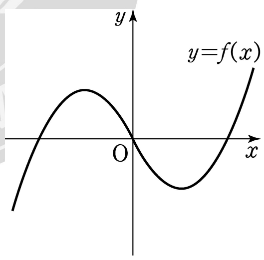
$5 + 45 = 50$

21 최고차항의 계수가 1이고 모든 실수 x에 대해 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키는 $f(x)$의 그래프는 다음 두 가지 유형이 가능하다.

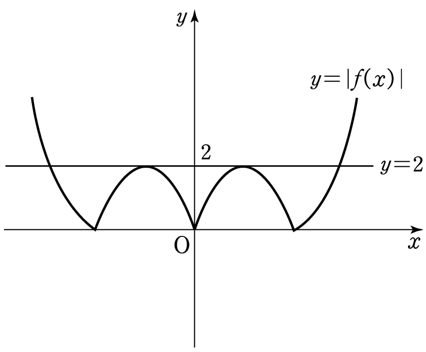
(ⅰ)



(ⅱ)



두 가지 유형 중 $|f(x)| = 2$의 서로 다른 실근이 4개가 가능한 것은 (ⅱ)의 유형이다. (그림 참조)



따라서, $f(x)$의 극솟값은 -2, 극댓값은 2이다.

$f(x)=x^3-bx$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-b=0$에서 $x=\pm\sqrt{\dfrac{b}{3}}$

$f\left(\sqrt{\dfrac{b}{3}}\right)=-2$이므로

$\left(\sqrt{\dfrac{b}{3}}\right)^3-b\times\sqrt{\dfrac{b}{3}}=-2$

정리하여 계산하면, $b=3$

$\therefore\ f(3)=3^3-3\times3=18$

22 (주어진 식)$=\lim\limits_{x\to1}(x^2+3x+7)$

$=1+3+7$

$=11$

23 $\log_3(x-11)=3\log_3 2$

$=\log_3 2^3$

$=\log_3 8$

$\therefore\ x-11=8$

$\therefore\ x=19$

24 $\displaystyle\int_0^5(4x-3)dx=\Big[\ 2x^2-3x\ \Big]_0^5$

$=50-15$

$=35$

25 a, $a+b$, $2a-b$가 등차수열이므로

$2(a+b)=3a-b\quad\therefore\ a=3b$

1, $a-1$, $3b-1$이 등비수열이므로

$(a-1)^2=3b+1$, $(a-1)^2=a+1$, $a^2-3a=0$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=3$

공비가 양수이므로 $a=3$, $b=1$

$\therefore\ a^2+b^2=3^2+1^2=10$

26 $f(x)=-x^3+4x$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2+4$이다.

$f'(1)=-3+4=1$

따라서, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$y=f'(1)(x-1)+3$

$= 1 \cdot (x-1)+3$

$= x+2$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

$\therefore\ 10a+b=12$

27 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=1$ $\cdots$㉠

$\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{4}$ $\cdots$㉡

$$10=\int_0^1 (ax+5)f(x)dx$$

$$=\int_0^1 axf(x)dx+\int_0^1 5f(x)dx$$

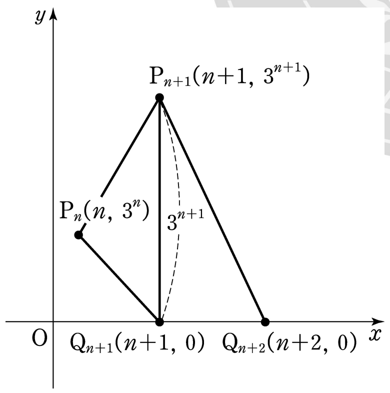
$$=a\int_0^1 xf(x)dx+5\int_0^1 f(x)dx$$

$=\frac{1}{4}a+5$ ($\because$ ㉠, ㉡에서)

$\therefore\ \frac{1}{4}a=5$

$\therefore\ a=20$

28 사각형의 꼭짓점의 좌표를 구하면



그림에서 P_{n+1}과 Q_{n+1}의 x좌표가 같으므로 넓이 a_n은

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\times\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}\times 1\right)\times 2$$

$$=3^{n+1}$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

$\therefore\ p^2+q^2 = 6^2+1^2 = 37$

29 (가)에서 $A^2+2A=E$ $\cdots$㉠

$(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$(A^2+2A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

㉠에 의하여

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= 3A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 3\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (\because \text{ 조건 (나)에 의하여}) \\ &= \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\therefore\ x+y = 9+12 = 21$

30 $f(x) = a^{x+1} - b^x$라 하자.

$f(x) = b^x\left\{a\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1\right\}$이므로, $a \ge b$이면 $x \ge 1$에서 $f(x)$는 증가함수

(ⅰ) $a \ge b$일 때,

$x \ge 1$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이고

$f(1) = a^2 - b \ge a^2 - a > 0$이므로

$\therefore\ a^2 - b \le 10$

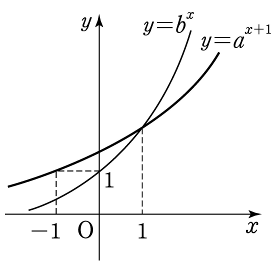
가능한 경우는 $a=2$일 때 $b=2$

$a=3$일 때 $b=2,\ 3$

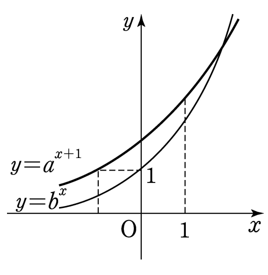
$a \ge 4$이면 $a^2-b \ge a^2-a \ge 12$

가능한 경우는 $(2,\ 2)$, $(3,\ 2)$, $(3,\ 3)$의 3가지

(ⅱ) $a < b$일 때



[그림 1]



[그림 2]

$f(x)=0$의 근을 α라 하자.
$\alpha<1$이면 [그림 1]에서 $|f(x)|$의 최솟값은 $f(1)$
$\alpha \geq 1$이면 [그림 2]에서 $|f(x)|$의 최솟값은 0
$\therefore$ $f(1)<0$이면 $-10 \leq f(1)<0$이어야 하고,
  $f(1) \geq 0$이면 항상 성립한다.
$\therefore$ $f(1) \geq -10$이면 항상 성립한다.
그런데, $f(1)=a^2-b \geq 2^2-10 \geq -10$이므로
$\therefore$ $a<b$이면 항상 성립한다.
$2 \leq a<b \leq 10$에서 $(a,\, b)$의 순서쌍은 ${}_9\mathrm{C}_2=36$(개)
따라서, (ⅰ), (ⅱ)에서, 구하는 순서쌍은 $3+36=39$(개)이다.