



문항 분석, 유사문항 풀어보기까지

3월 모의고사 완벽 분석!

☆☆☆ 자료 사용 설명서 ☆☆☆

1. 2021년 시행 3월 모의고사 문제지를 푼다!
2. 채점 후 오답 문항을 다시 풀어본다!
3. 오답 점검 후 이 자료를 보며, 왼쪽 페이지 (짝수 페이지)의 분석 내용을 읽는다!
point : 놓친 개념이나 풀이의 비약은 없는지, 접근 방법이 제대로 되었는지 확인하기!
4. 분석 후 오른쪽 페이지 (홀수 페이지)의 유사 문항을 풀어 보며
공부한 내용을 잘 습득했는지 점검한다!

001 $\log_8 16$ 의 값은? [2점]

① $\frac{7}{6}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ $\frac{11}{6}$

로그의 연산 성질을 활용하는 문제야.

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_a b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

* 로그의 기본 성질

$$\log_a b = c \quad \cdot a > 0, a \neq 1 \text{ (밑조건)}$$

$$\cdot b > 0 \text{ (진수조건)}$$

$$\cdot a^c = b$$

$$\log_8 16 = \log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3} \log_2 2 = \frac{4}{3}$$

유사문항에도 로그의 기본 연산 문제를 수록해 뒀으니 풀어봐!

[1-2020년 시행 9월 모평 나형 24번]

$\log_5 40 + \log_5 \frac{5}{8}$ 의 값을 구하시오. [3점]

002 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_4 = 100$ 일 때, a_1 의 값은? [2점]

① 91

② 93

③ 95

④ 97

⑤ 99

등차수열의 일반항 문제야.

$$\text{첫째항을 } a_1, \text{ 공차를 } d \text{ 라 하면 } a_n = a_1 + (n-1)d$$

등차수열 문제가 나오면, 첫째항과 공차를 찾아봐야겠지.

$$a_n = a_1 + 3(n-1)$$

$$a_4 = a_1 + 3 \cdot 3 = 9 + a_1 = 100$$

$$\rightarrow a_1 = 91$$

유사문항에는 등비수열의 일반항 문제를 수록해 두었어.

* 등비수열의 일반항

첫째항이 a_1 , 공비가 r 인 등비수열 a_n

$$\rightarrow a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

[2-2020년 시행 대수능 나형 2번]

첫째항이 $\frac{1}{8}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\frac{a_3}{a_2} = 2$ 일 때, a_5 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ 2

⑤ 4

003 $0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 4x = \frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

삼각함수의 그래프와 기본 성질 (주기, 대칭성, 최대·최소) 을 활용하는 문제야.

* 삼각함수의 기본 성질 ($b \neq 0$)

$y = a \sin bx + c$ (또는 $y = a \cos bx + c$)

$y = a \tan bx + c$

· 주기 : $\frac{2\pi}{|b|}$

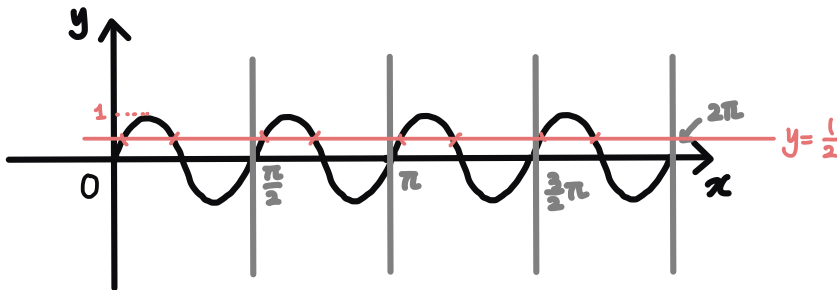
· 주기 : $\frac{\pi}{|b|}$

· 최대값 : $|a| + c$

· 최대값, 최소값 : 없음

· 최소값 : $-|a| + c$

$y = \sin 4x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 임을 바탕으로 $0 \leq x < 2\pi$ 에서의 그래프를 그려 볼게.



위의 그래프에서 볼 수 있듯이, $y = \frac{1}{2}$ 라 $y = \sin 4x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 8개야!

유사문항에도 이 문제와 비슷하게 그래프를 활용하는 문제를 수록해 뒀어!

[3-2022학년도 수능 예시문항 8번]

함수 $y = 6 \sin \frac{\pi}{12}x$ ($0 \leq x \leq 12$)의 그래프와 직선 $y = 3$ 이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점]

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

004 $\int_2^{-2} (x^3 + 3x^2) dx$ 의 값은? [3점]

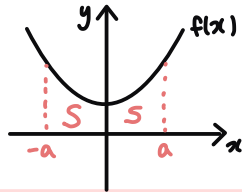
- ① -16 ② -8 ③ 0 ④ 8 ⑤ 16

정적분 문제인데, 우함수와 기함수의 성질을 활용하면 더 간단하게 풀 수 있어!

* 우함수와 기함수의 정적분 : 적분구간의 양 끝이 부호만 다르고 절댓값이 같은 경우

① 우함수 : y축 대칭 함수 ($f(-x) = f(x)$)

→ 다항함수인 경우 : 짝수차항만 존재함

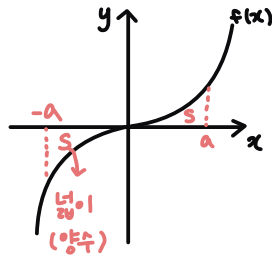


$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2S = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\therefore \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

② 기함수 : 원점 대칭인 함수 ($f(-x) = -f(x)$)

→ 다항함수인 경우 : 홀수차항만 존재함



$$\int_{-a}^a f(x) dx = (-S) + (S) = 0$$

$$\therefore \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \int_2^{-2} (x^3 + 3x^2) dx &= -\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2) dx \\ &= -2 \int_0^2 3x^2 dx = -2 [x^3]_0^2 \\ &= -2 \cdot 8 = -16 \end{aligned}$$

유사문항에도 마찬가지로 적분구간의 위끝과 아래끝을 바꾸어서 우함수, 기함수의 성질을 활용해 적분하는 문항을 수록해 뒀어!

[4-2019년 시행 10월 학평 나형 6번]

$\int_{-3}^3 (x^3 + 4x^2)dx + \int_3^{-3} (x^3 + x^2)dx$ 의 값은? [3점]

① 36

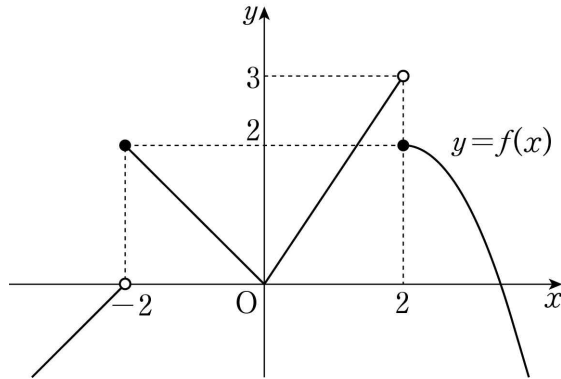
② 42

③ 48

④ 54

⑤ 60

005 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

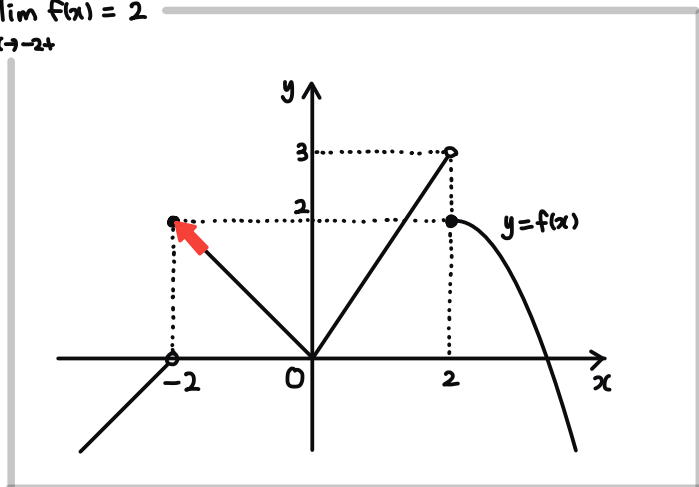


$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 의 값은? [3점]

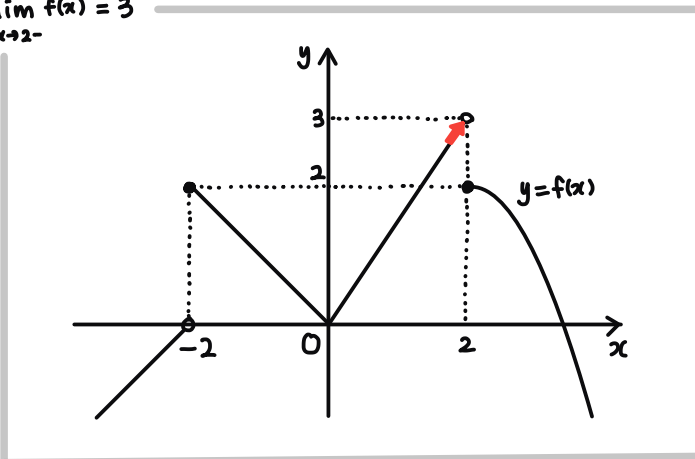
- ① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

함수의 극한 문제 중 그래프를 통해 함수의 좌극한, 우극한, 함숫값을 판단하는 기본 문제야.

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$



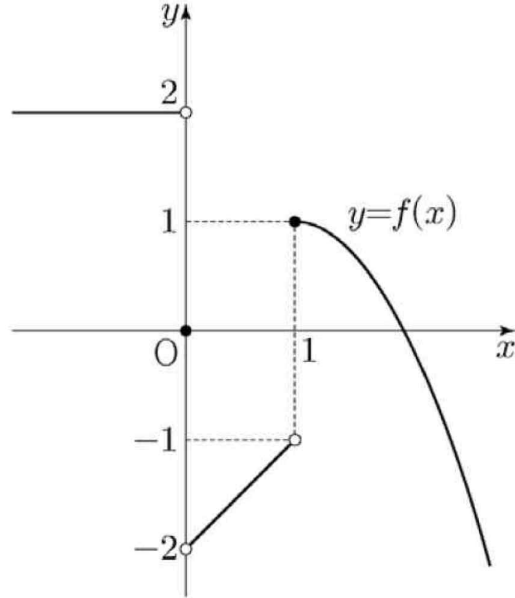
$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$



유사문항에도 그래프에서 극한값을 찾는 문항을 수록해 뒀어!

[5-2022학년도 수능 예시문항 4번]

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

006 함수

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} & (x < 3) \\ \frac{2x + 1}{x - 2} & (x \geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a - b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [3점]

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

함수의 연속에 관한 문제야.

* 함수의 연속

함수 $f(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이다

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

함수 $f(x)$ 는 $x < 3$, $x \geq 3$ 에서 각각 연속이기 때문에,

$x = 3$ 에서만 연속이면 모든 실수에서 연속이라고 할 수 있어.

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$ 을 만족해야 해.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x + 1}{x - 2} = 7$$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 7$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 분모 $\rightarrow 0$ 이므로 분자 $\rightarrow 0$ 이어야 해.

$$\rightarrow 9 + 3a + b = 0$$

여기서 두가지 풀이방법이 있어.

i) 정석 풀이

$$b = -3a - 9 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + ax - 3a - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)(x + a + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + a + 3) = a + 6 = 7$$

$$\rightarrow a = 1, b = -12$$

ii) 로피탈

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x + a}{1} = 6 + a \dots (\text{이하 동일})$$

참고로 로피탈의 정리는 0/0일 때 계산을 줄이는 용도로 사용할 수 있어.

교육과정 외의 내용이지만, 사용하면 계산이 훨씬 편해져.

$$x \rightarrow a \text{일때 } f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0 \text{인 경우 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

유사문항에도 함수의 연속성을 조사하는 비슷한 문제를 수록해 뒀어.

[6-2020년 시행 사관학교 나형 26번]

함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 10 & (x \leq a) \\ \frac{x^2 + ax + 4a}{x - a} & (x > a) \end{cases}$$

가 $x = a$ 에서 연속일 때, $f(2a)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.) [4점]

007 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항이

$$a_n = \begin{cases} \frac{(n+1)^2}{2} & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{n^2}{2} + n + 1 & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 235 ② 240 ③ 245 ④ 250 ⑤ 255

수열의 귀납적 정의 문제야.

수열 문제에서는 등차수열, 등비수열이 아니라면 식을 세우려는 접근보다는,

n 이부터 대입해가면서 규칙성을 파악하는 것이 좋아!

i) n 이 홀수인 경우 ($n=1, 3, 5, 7, 9$)

$$\frac{2^2}{2} + \frac{4^2}{2} + \frac{6^2}{2} + \frac{8^2}{2} + \frac{10^2}{2} = \frac{1}{2}(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)$$

ii) n 이 짝수인 경우 ($n=2, 4, 6, 8, 10$)

$$\frac{1}{2}(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2) + (2+4+6+8+10) + 1 \times 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= 2 \times \frac{1}{2}(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2) + (2+4+6+8+10) + 5 \\ &= 220 + 30 + 5 = 255 \end{aligned}$$

참고로 이 부분은 식을 세워 계산해도 되고, 직접 계산해도 좋아.

$$\text{식을 세우는 경우 } \sum_{n=1}^5 (2n)^2 = \sum_{n=1}^5 4n^2 = 4 \times \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} = 220$$

이렇게 계산할 수 있으니 참고해!

유사문항에도 비슷한 방법으로 경우를 나누어 푸는 문제를 수록해 놨어.

[7-2020년 시행 3월 학평 기형 9번]

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 7$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + 3}{2} & (a_n \text{ 이 소수인 경우}) \\ a_n + n & (a_n \text{ 이 소수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. a_8 의 값은? [3점]

① 11

② 13

③ 15

④ 17

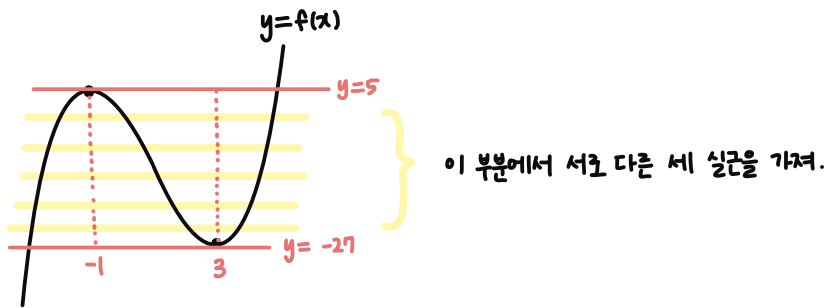
⑤ 19

- 008 곡선 $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ 와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은? [3점]
- ① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

삼차함수와 상수함수의 교점을 파악하는 문제야.

먼저 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ 로 두고 $f(x)$ 의 개형을 파악해 볼게.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$ 에서 $f(x)$ 는 $x = -1, x = 3$ 에서 극값을 가짐을 알 수 있지.



$M = 4, m = -26$

$\rightarrow M - m = 4 - (-26) = 30$

유사문항에도 비슷하게 삼차함수의 개형을 파악해서 교점을 찾는 문제를 수축해 봤어

[8-2020년 시행 6월 모평 나형 19번]

방정식 $2x^3 + 6x^2 + a = 0$ 이 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a 의 개수는?

[4점]

① 4

② 6

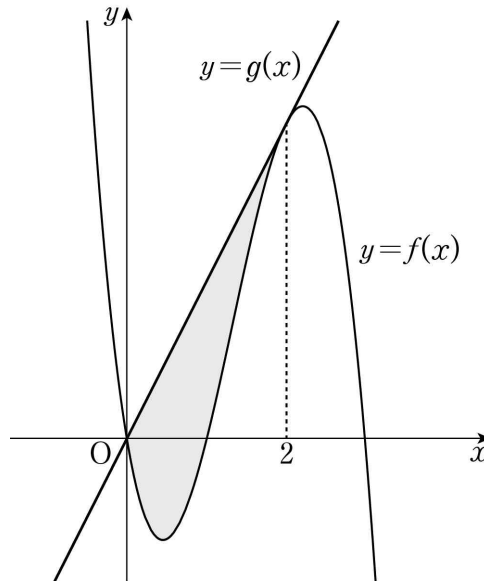
③ 8

④ 10

⑤ 12

009 최고차항의 계수가 -3 인 삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선 $y = g(x)$ 가 곡선 $y = f(x)$ 와 원점에서 만난다. 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



곡선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 문제야. 이 문제는 꼭 잘 보둬!

삼차함수 $f(x)$ 와 일차함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 접하고 $x=0$ 에서 실근을 가지므로

$f(x) - g(x) = -3x(x-2)^2$ 라는 식을 쓸 수 있어.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{g(x) - f(x)\} dx &= \int_0^2 3x(x-2)^2 dx \\ &= \int_0^2 (3x^3 - 12x^2 + 12x) dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^4 - 4x^3 + 6x^2 \right]_0^2 = \frac{3}{4} \cdot 16 - 32 + 24 = 4 \end{aligned}$$

유사문항에 어려운거 넣어둬서 미안함..ㅠㅠ 하지만 이 방식으로 식을 써내려가는 문제가

기술에 많지 않아서 어쩔 수 없었어..

꼭 풀어보길 바라!!

[9-2017년 시행 6월 모평 나형 30번]

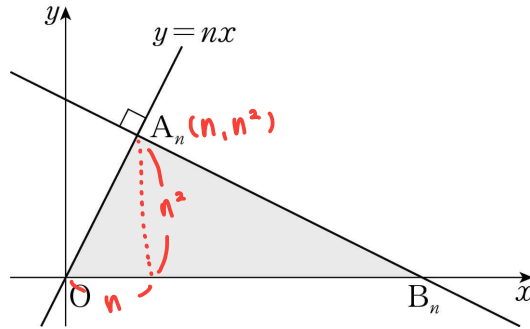
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha) = g(\alpha)$ 이고 $f'(\alpha) = g'(\alpha) = -16$ 인 실수 α 가 존재한다.

(나) $f'(\beta) = g'(\beta) = 16$ 인 실수 β 가 존재한다.

$g(\beta+1) - f(\beta+1)$ 의 값을 구하시오. [4점]

010 자연수 n 에 대하여 점 $A_n(n, n^2)$ 을 지나고 직선 $y = nx$ 에 수직인 직선이 x 축과 만나는 점을 B_n 이라 하자.



다음은 삼각형 A_nOB_n 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^8 \frac{S_n}{n^3}$ 의 값을 구하는 과정이다. (단, O 는 원점이다.)

점 $A_n(n, n^2)$ 을 지나고 직선 $y = nx$ 에 수직인 직선의 기울기 $-\frac{1}{n} = (가)$
 직선의 방정식은 $y = (가) \times x + n^2 + 1$ $y=0$ 대입 $\rightarrow x = (n+n^3) \rightarrow B_n(n+n^3, 0)$
 이므로 두 점 A_n, B_n 의 좌표를 이용하여 S_n 을 구하면 $S_n = \frac{1}{2} \times (n+n^3) \times n^2 = (나)$
 $S_n = (나)$
 따라서 $\sum_{n=1}^8 \frac{S_n}{n^3} = (다)$ $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^8 (1+n^2) = \frac{1}{2} (8 + \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6}) = \frac{1}{2} (8 + 204) = 106 = (다)$
 이다.

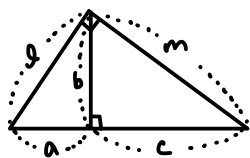
위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r 라 할 때, $f(1) + g(2) + r$ 의 값은? [4점]

- ① 105 ② 110 ③ 115 ④ 120 ⑤ 125

일반적인 풀이 방법은 위에 자세히 적어두었어.

이 방법으로는 두 직선이 수직일 조건 (기울기의 곱이 -1)을 이용해서 직접 좌표를 구했지만, 직각삼각형의 성질을 활용하면 더 쉽게 풀수 있어. 꼭 잘 기억해 뒤!

직각삼각형에서의 성질



- ① 넓이활용 $\rightarrow d \times m = (a+c) \times b$
- ② a, b, c 는 순서대로 등비수열 $\rightarrow b^2 = a \times c$
- ③ $a : c = d^2 : m^2$
(ex) $d=1, m=2 \rightarrow a : c = 1 : 4$

유사문항에도 이렇게 직각삼각형의 성질을 활용할 수 있는 문항을 수록해뒀으니 연습해봐!

[10-2020년 시행 9월 모평 나형 16번]

모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x 축 위의 점 P_n 과 곡선 $y = \sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n 이 있다.

- 선분 OP_n 과 선분 P_nQ_n 이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n 과 선분 Q_nP_{n+1} 이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1 의 좌표가 $(1, 0)$ 일 때, 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$ 의 넓이 A_n 을 구하는 과정이다.
(단, O 는 원점이다.)

모든 자연수 n 에 대하여 점 P_n 의 좌표를 $(a_n, 0)$ 이라 하자.

$$\overline{OP_{n+1}} = \overline{OP_n} + \overline{P_nP_{n+1}} \text{ 이므로}$$

$$a_{n+1} = a_n + \overline{P_nP_{n+1}}$$

이다. 삼각형 OP_nQ_n 과 삼각형 $Q_nP_nP_{n+1}$ 이 닮음이므로

$$\overline{OP_n} : \overline{P_nQ_n} = \overline{P_nQ_n} : \overline{P_nP_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n 의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$ 이므로

$$\overline{P_nP_{n+1}} = \boxed{\text{(가)}}$$

이다. 따라서 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$ 의 넓이 A_n 은

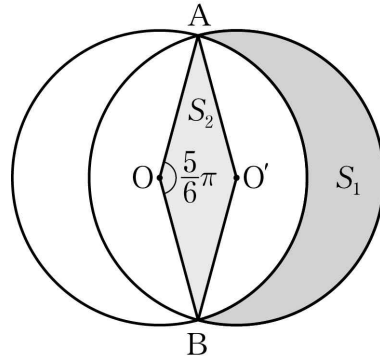
$$A_n = \frac{1}{2} \times (\boxed{\text{(나)}}) \times \sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나)에 알맞은 식을 $f(n)$ 이라 할 때, $p + f(8)$ 의 값은? [4점]

- ① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

011 그림과 같이 두 점 O, O' 을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O' 이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O' 이 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, $\angle AOB = \frac{5}{6}\pi$ 이다.



원 O 의 외부와 원 O' 의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1 , 마름모 $AOBO'$ 의 넓이를 S_2 라 할 때, $S_1 - S_2$ 의 값은? [4점]

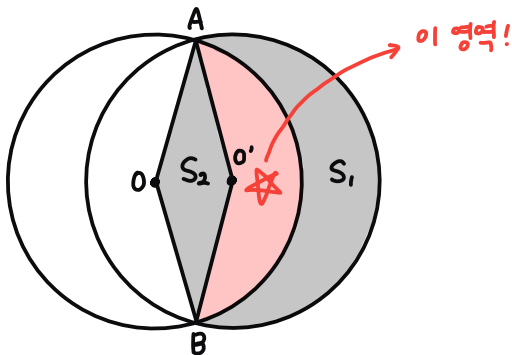
- ① $\frac{5}{4}\pi$
- ② $\frac{4}{3}\pi$
- ③ $\frac{17}{12}\pi$
- ④ $\frac{3}{2}\pi$
- ⑤ $\frac{19}{12}\pi$

삼각함수의 도형에서의 활용 문제야.

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각을 θ 라 할 때,

- 호의 길이 $l = r\theta$
- 부채꼴의 넓이 $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$

이 문제는 링장이 독특한데, S_1, S_2 에 모두 포함되지 않은 가운데 영역을 포함해서 식을 쓰면 깔끔하게 풀 수 있다는 점이야. (→ 미적분 기출에 많이 있는 사고방식임~)



$$\begin{aligned}
 S_1 - S_2 &= (S_1 + \star) - (S_2 + \star) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{7}{6}\pi - \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \frac{5}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi
 \end{aligned}$$

유사문항에는 이 사고가 활용된 미적분 기출 문항을 변형해서 수록해 뒀어.

미적분 선택 학생들은 저 문항의 원본 문항도 꼭 찾아서 풀어봐!

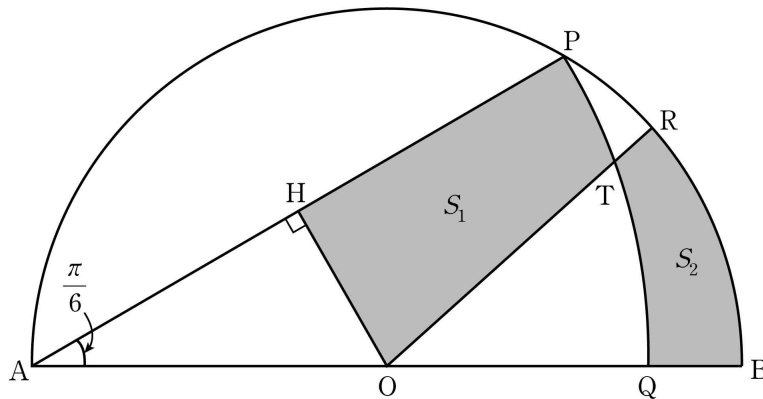
[11-2019년 시행 6월 모평 가형 28번 변형]

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 $\angle PAB = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 점 P를 잡고,

중심이 A이고 반지름의 길이가 \overline{AP} 인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.

호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 3 : 7이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.

세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. 이때 $S_1 - S_2$ 의 값은? [4점]



① $\frac{2}{15}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

② $\frac{2}{15}\pi - \frac{\sqrt{3}}{8}$

③ $\frac{2}{15}\pi - \frac{\sqrt{3}}{16}$

④ $\frac{\pi}{30} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

⑤ $\frac{\pi}{30} - \frac{\sqrt{3}}{8}$

012 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x - 1} = 5$

(나) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + g(x) - 2f(1)}{x - 1} = 7$

두 실수 a , b 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - a}{x - 1} = b \times g(1)$ 일 때, ab 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

함수의 극한에 관한 문제야.

$x \rightarrow a$ 일 때,

분모 $\rightarrow 0$ 인데 극한값 존재 : 분자 $\rightarrow 0$

분자 $\rightarrow 0$ 인데 극한값 존재 : 분모 $\rightarrow 0$

"0이 아닌"

(분자 $\rightarrow 0$ 인데 극한값이 0이어도 분모가 0으로 갈 수는 있지만,
항상 그렇지는 않으니 조심해.)

(가) 조건에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값이 존재하므로 분자 $\rightarrow 0$ 이어야 해.

따라서 $f(1) = g(1)$ 이지.

그리고 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) - \{g(x) - g(1)\}}{x - 1} = f'(1) - g'(1) = 5$ 라는 것도 알 수 있어.

이제 (나) 조건을 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) + g(x) - g(1)}{x - 1}$ 로 고칠 수 있어.

그럼 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 7 \rightarrow f'(1) + g'(1) = 7$

(물론 로피탈을 사용해도 같은 결과를 얻을 수 있어.)

두 식을 연립하면 $f'(1) = 6, g'(1) = 1$ 임을 알 수 있지!

이제 구하는 값인 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - a}{x - 1} = b \times g(1)$ 에서, $x \rightarrow 1$ 일 때 분모 $\rightarrow 0$ 이므로 분자 $\rightarrow 0$ 이어야 해.

따라서 $f(1) = a$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - a}{x - 1} = f'(1)$ 이므로 $f'(1) = b \times g(1)$ 에서 $b \times g(1) = 6$ 이지.

$ab = f(1) \times \frac{6}{g(1)} = 6$ (사실 이 과정이 크게 의미있다고 생각하진 않지만..)

이런 문제도 있다.. ~ 뭐 이런 의미로 한번 복습해줘!

유사문항에는 극한 식을 통해 다항함수의 식을 추론하는 문제를 수록해 놔어~

[12-2018년 시행 4월 학평 나형 17번]

다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [4점]

$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x^2} + 1 \right\} = 0 \\ \text{(나)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x^2} = -1 \end{aligned}$$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

013 함수

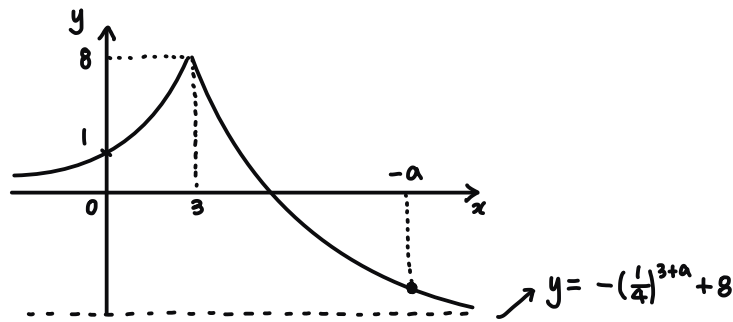
$$f(x) = \begin{cases} 2^x & (x < 3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} + 8 & (x \geq 3) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 중에서 y 좌표가 정수인 점의 개수가 23 일 때, 정수 a 의 값은? [4점]

- ① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

지수함수의 점근선을 활용하는 문제인데, 이 문제는 굉장히 독특하니 꼭 읽고 넘어가 줘!

일단 주어진 함수 먼저 파악해보아야겠지?



함수를 그려 보면 개형은 이렇게 생겼어.

문제에서 $y = f(x)$ 위의 점 중에서 **y좌표가 정수인 점의 개수가 23** 이라고 했지.

그럼 $y = (\text{정수})$ 와 $y = f(x)$ 의 교점의 개수를 위에서부터 세어 볼게.

$y = 8 \rightarrow 1$ 개

$y = 7 \sim 1 \rightarrow 2$ 개 (14개)

$y = 0 \sim ? \rightarrow 1$ 개

여기서 23개가 존재하려면 여기서 8개 점이 나와야 하지. 따라서 $? = -7$ 이야.

즉, 점근선의 y값은 $-8 \leq (\text{점근선 } y\text{값}) < -7$ 이어야 해.

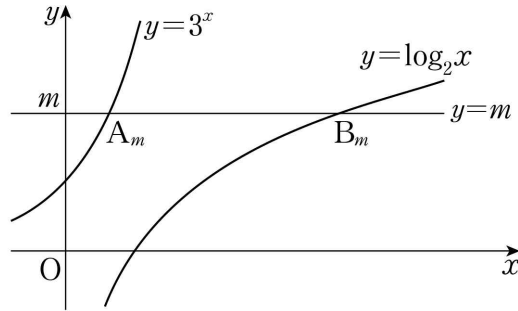
$-8 \leq 8 - \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} < -7 \rightarrow 15 < \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} \leq 16$ 에서 $-3 - a = 2$, $a = -5$ 가 돼

기술이 많이 된 소재는 아니라서, 유사문항에는 값이 자연수가 나온다는 발상을 활용하는 문제를 수록했어.

두 문항 모두 확실하게 알아 줘!

[13-2020년 시행 3월 학평 나형 16번]

그림과 같이 자연수 m 에 대하여 두 함수 $y = 3^x$, $y = \log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y = m$ 이 만나는 점을 각각 A_m , B_m 이라 하자. 선분 $A_m B_m$ 의 길이 중 자연수인 것을 작은 수부터 크기순으로 나열하여 a_1, a_2, a_3, \dots 이라 할 때, a_3 의 값은? [4점]



① 502

② 504

③ 506

④ 508

⑤ 510

014 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(x) + |f'(x)|$$

라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(0) = g(0) = 0$
- (나) 방정식 $f(x) = 0$ 은 양의 실근을 갖는다.
- (다) 방정식 $|f(x)| = 4$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

삼차함수의 개형을 추론하는 문제야.

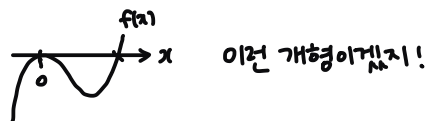
$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) + f'(x) & (f'(x) \geq 0) \\ f(x) - f'(x) & (f'(x) < 0) \end{cases} \quad \text{이렇게 조건을 정리하고 (가)~(다)를 차근차근 살펴보자!}$$

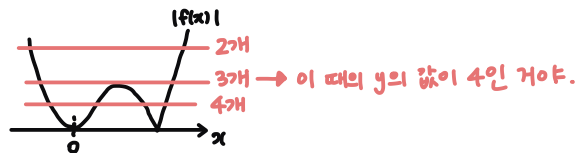
(가) $f(0) = g(0) = 0$ 에서, $g(0) = f(0) + |f'(0)|$ 이므로 $f'(0) = 0$ 임을 알 수 있어.

즉 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 **지축에 접하거나 삼중근을 가져.**

(나) $f(x) = 0$ 은 '양의 실근', 즉 $x=0$ 이 아닌 **다른 실근을 가져.**



(다) 방정식 $|f(x)| = 4$ 가 서로 다른 세 실근을 가져.

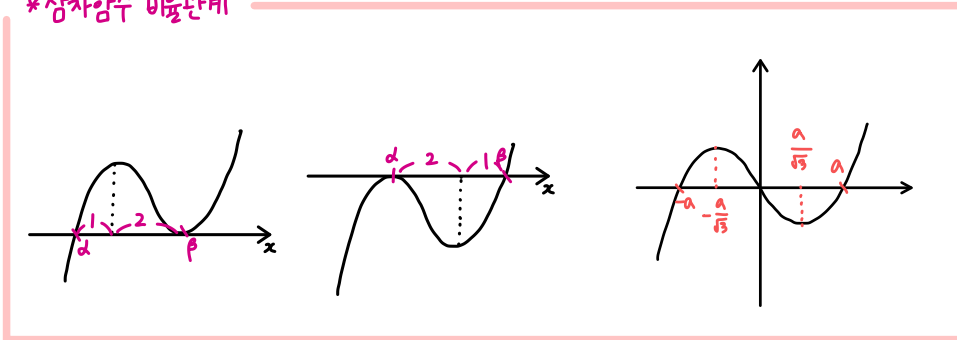


즉 함수 $y=f(x)$ 의 **극솟값이 -4인 것이지!**

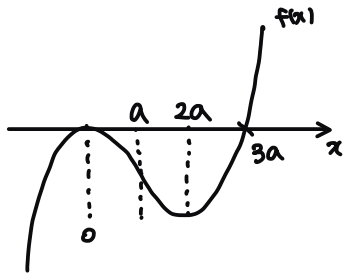
이제 삼차함수의 식만 파악하면 끝나.

↖ 꼭 암기하기 !!

*삼차함수 비물관계



삼차함수의 비물관계를 활용하면 좀더 편하게 식을 쓸 수 있어.



$$f(x) = x^2(x-3a)$$

$$f(2a) = -4 \rightarrow 4a^2 \cdot (-a) = -4 \rightarrow a=1$$

$$\therefore f(x) = x^2(x-3)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad f'(3) = 27 - 18 = 9$$

$$\therefore g(3) = f(3) + f'(3) = 0 + 9 = 9$$

복잡하긴 하지만, 이런 유형의 문제들 중에서는 그렇게 어렵지 않아.

꼭 판단을 내린 근거가 뭔지 꼼꼼히 짚어보고,

유사문항이 킬러 문항이지만 서로 라정이 거의 비슷하니 꼭 풀어보며 복습해봐.

[14-2020년 시행 대수능 나형 30번]

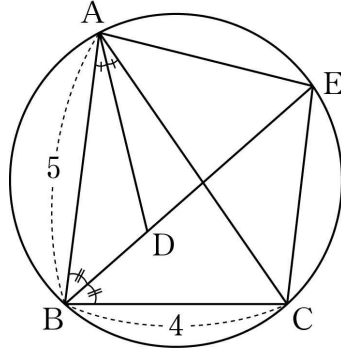
함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$ 는 일차함수이다. 함수 $h(x)$ 를

$$h(x) = \begin{cases} |f(x) - g(x)| & (x < 1) \\ f(x) + g(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0) = 0$, $h(2) = 5$ 일 때, $h(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

015 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC) = \frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$ 의 이등분선과

$\angle CAB$ 의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보기>

- ㄱ. $\overline{AC}=6$
- ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$
- ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

삼각함수의 도형 문제야.

일단 사인법칙, 코사인법칙, 원주각에 대한 개념을 알고 있는지 한번 점검해보자!

* 사인법칙

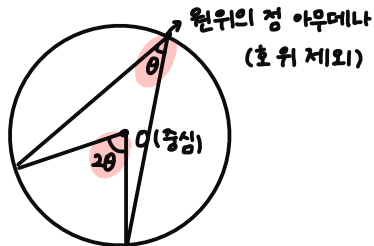
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

* 코사인법칙

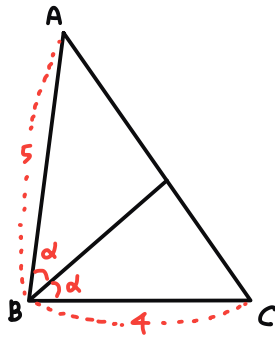
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

* 중심각과 원주각



이제 본격적으로 문제를 풀어 볼게.

7.



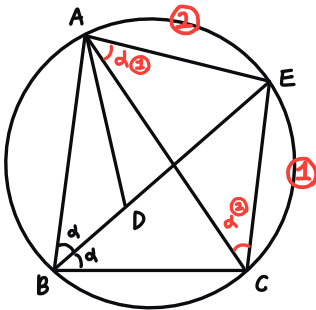
문제에서 $\cos 2\alpha = \frac{1}{8}$ 임을 알려줬어.

7 선지는 $\triangle ABC$ 에서 코사인 법칙만 쓰면 알수 있어!

$$\overline{AC}^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} = 36$$

$$\therefore \overline{AC} = 6 \text{ (참)}$$

L.



7에서와 같이 $\angle ABE$ 를 α 라 해볼게.

그럼 호 CE (1) 의 원주각인 $\angle CAE = \alpha$ 라 할수 있어.

호 AE (2) 의 원주각인 $\angle ACE = \alpha$ 도 성립하겠지?

즉 $\angle EAC = \angle ECA$ 이므로

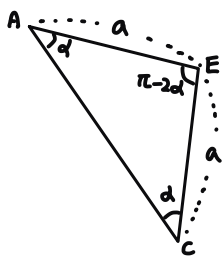
$\triangle ACE$ 는 $\overline{EA} = \overline{EC}$ 인 이등변삼각형이야. (참)

이제 문제의 (?) D 를 풀어볼게. 길어도 차근차근 잘 따라와줘!

① 사각형 ABCD가 원에 내접하냐? 이 경우 마주보는 두각의 합은 항상 π 로 일정해.

$\angle ABC = 2\alpha$ 이니, $\angle AEC = \pi - 2\alpha$ 인 것이지.

②



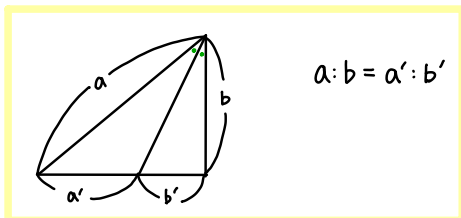
여기서 코사인법칙을 활용하면

$$6^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\pi - 2\alpha)$$

$$36 = 2a^2 + 2a^2 \cos 2\alpha = 2a^2 + \frac{1}{8} \cdot 2a^2$$

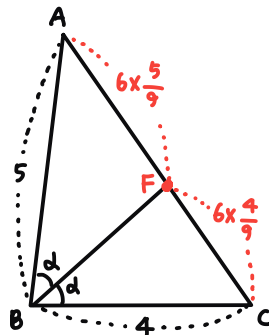
$$36 = \frac{9}{4} a^2, a = 4$$

③ 각의 이등분선의 성질을 알고 있지?

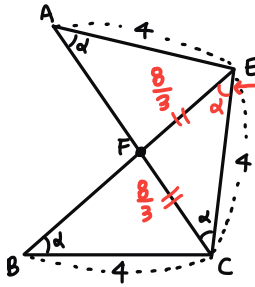


이걸 활용해서 구해보면

$$\overline{AF} = \frac{10}{3}, \overline{CF} = \frac{8}{3} \text{ 이 돼.}$$



④

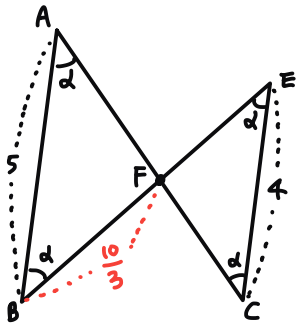


$\overline{BC} = \overline{AE} = 4$ 이므로

$\angle BEC = \angle ACE = \alpha$

따라서 $\triangle CFE$ 는 $\overline{CF} = \overline{EF} = \frac{8}{3}$ 인 이등변삼각형이야.

⑤

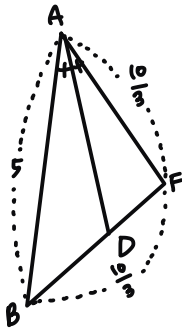


$\triangle FAB$ 와 $\triangle FCE$ 는 서로 닮음이야 (AA)

닮음비는 5:4 이지.

$$\overline{BF} = \frac{5}{4} \times \overline{EF} = \frac{5}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$

⑥



\overline{AD} 는 $\angle BAF$ 의 이등분선이지?

③에서 사용한 성질을 한번 더 사용할거야.

$$5 : \frac{10}{3} = \overline{BD} : \overline{DF} = 3:2$$

$$\overline{DF} = \frac{2}{5} \times \overline{BF} = \frac{2}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \overline{ED} = \overline{EF} + \overline{FD} = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4 \text{ (거짓)}$$

D 선지가 까다로웠지만 의미있는 문제이니, 차근차근 복습해 봐.

유사문항에도 사인, 코사인 법칙을 활용하는 2022 수능 예시문항 문제를 수록했으니 꼭 풀어보고!

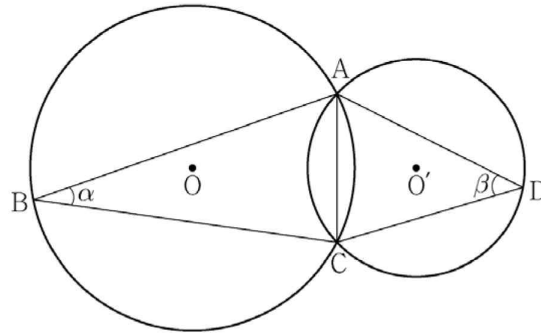
[15-2022학년도 수능 예시문항 21번]

그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC , ACD 의 외심을 각각 O , O' 이라 하고 $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$ 라 할 때,

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{3}{2}, \cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}, \overline{OO'} = 1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



- 016 두 함수 $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$, $g(x) = x^3 + 2$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x = 0$ 에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

함수의 곱의 미분법에 대한 문제야.

$$f(x)g(x) \xrightarrow{\text{미분}} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 3 \rightarrow f'(x) = 4x + 5 \rightarrow f'(0) = 5$$

$$g(x) = x^3 + 2 \rightarrow g'(x) = 3x^2 \rightarrow g'(0) = 0$$

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ 에서 } f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 10 \\ 5 \cdot 2 + 3 \cdot 0$$

유사문항에도 비슷한 연산문제가 들어가 있으니 연습해봐 ~

[16-2022학년도 수능 예시문항 17번]

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(1) = 2$, $f'(1) = 4$ 를 만족시킬 때, 함수 $g(x) = (x+1)f(x)$ 의 $x = 1$ 에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

017 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$$3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n > 0$$

이 성립하도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하시오. [3점]

이차부등식을 풀이하는 문제야!

모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 이 항상 성립하려면 $D < 0$ 을 만족해야겠지.

따라서 이문제에서는 $D/4 = (\log_2 n)^2 - 3\log_2 n < 0$ 이 성립하면 돼.

$$\log_2 n \{ \log_2 n - 3 \} < 0, \quad 0 < \log_2 n < 3, \quad \log_2 1 < \log_2 n < \log_2 8$$

$\therefore 1 < n < 8$, 자연수 n 은 6개.

유사문항에도 거의 비슷한 문항을 수록해두었으니 꼭 풀어봐!

[17-2017년 시행 4월 학평 가형 17번]

두 집합

$$A = \{x \mid x^2 - 5x + 4 \leq 0\},$$

$$B = \{x \mid (\log_2 x)^2 - 2k \log_2 x + k^2 - 1 \leq 0\}$$

에 대하여 $A \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시키는 정수 k 의 개수는? [4점]

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

018 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $F(x)$ 의 도함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (x < 0) \\ k(2x - x^2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. $F(2) - F(-3) = 21$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하시오. [3점]

다항함수의 적분 문제야!

$$\hookrightarrow \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (\text{단, } C \text{는 적분상수, } n \text{은 자연수})$$

많은 학생들이 이 문제를 부정적분으로 수습해 풀었음 것 같아.

정적분을 활용하는 풀이도 보여줄테니 꼭 두 풀이 모두 익혀둬!

유사문항도 두가지 풀이 모두 가능하니 둘 다 연습해 보 ~

Sol 1. 부정적분

$$f(x) = \begin{cases} -2x & (x < 0) \\ k(2x - x^2) & (x \geq 0) \end{cases} \rightarrow F(x) = \begin{cases} -x^2 + C_1 & (x < 0) \\ k(x^2 - \frac{1}{3}x^3) + C_2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$\rightarrow F(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로 $C_1 = C_2$

$$\begin{aligned} F(2) - F(-3) &= \left\{ k\left(4 - \frac{8}{3}\right) + C_1 \right\} - \left\{ -9 + C_1 \right\} \\ &= \frac{4}{3}k + 9 = 21, \quad \frac{4}{3}k = 12, \quad k = 9 \end{aligned}$$

Sol 2 정적분

$$\begin{aligned} F(2) - F(-3) &= \int_{-3}^2 f(x) dx = \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_{-3}^0 (-2x) dx + \int_0^2 k(2x - x^2) dx \\ &= [-x^2]_{-3}^0 + \left[k\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \right]_0^2 \\ &= -(-9) + k\left(4 - \frac{8}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3}k + 9 = 21, \quad k = 9 \end{aligned}$$

유사문항에도 마찬가지로 두가지 풀이 모두 가능한 문항으로 수록해 뒀으니,

꼭 두가지 풀이 모두 시도해 보!

[18-2022학년도 수능 예시문항 6번]

다항함수 $f(x)$ 가

$$f'(x) = 3x^2 - kx + 1, f(0) = f(2) = 1$$

을 만족시킬 때, 상수 k 의 값은? [3점]

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

019 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ 이고 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1}S_n = a_nS_{n+1}$$

이 성립할 때, S_5 의 값을 구하시오. [3점]

귀납적으로 정의된 수열 문제인데, 7번 문제에서 했던 말 기억나?

등차, 등비수열이 아니라면 n 이 부터 대입해나가면서 접근하라고 했지!

이 문제도 마찬가지야. (주어진 식의 양변을 $a_n a_{n+1}$ 로 나누면 $\frac{S_n}{a_n} = \frac{S_{n+1}}{a_{n+1}}$ 으로 식이 예뻐지니 참고!)

n 이부터 $n=4$ 까지 대입해가면 돼~ 아래에 식을 적어둘테니 참고해 :))

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 12, a_4 = 36, a_5 = 108$$

$$S_1 = 2, S_2 = 6, S_3 = 18, S_4 = 54, S_5 = 162$$

$$a_3 S_2 = a_2 S_3 \rightarrow a_3 \cdot 6 = 4(6 + a_3)$$

$$a_3 = 12$$

$$a_4 S_3 = a_3 S_4 \rightarrow a_4 \cdot 18 = 12(18 + a_4)$$

$$a_4 = 36$$

$$a_5 S_4 = a_4 S_5 \rightarrow a_5 \cdot 54 = 36(54 + a_5)$$

$$a_5 = 108$$

유사문항에도 귀납적으로 정의된 수열 문제를 수족해 두었으니 참고해.

[19-2019년 시행 7월 학평 나형 26번]

첫째항이 2 이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. x 에 대한 이차방정식

$$a_n x^2 - a_{n+1} x + a_n = 0$$

이 모든 자연수 n 에 대하여 중근을 가질 때, $\sum_{k=1}^8 a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

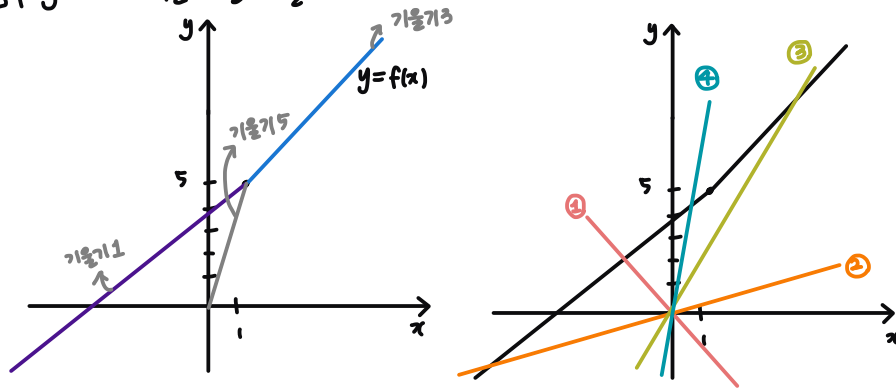
020 실수 m 에 대하여 직선 $y = mx$ 와 함수

$$f(x) = 2x + 3 + |x - 1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$ 이라 하자. 최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $h(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

주어진 조건을 통해 함수 $g(m)$ 의 식을 도출하고, 함수의 연속성도 활용해야 하는 문제야.

먼저 함수 $g(m)$ 의 식을 도출해볼게!



$y = f(x)$ 의 그래프를 그려보면 위와 같아.

이제 기울기 m 을 기준으로 분류해야 하는데, 위의 '1, 3, 5' 기울기가 나올때 조심해야겠지? (평행하면 안 만나니까)

그렇게 나눠서 교점의 개수를 구해보면 이렇게 돼.

$m < 0$ (㉠)	
$m = 0$	
$0 < m < 1$ (㉡)	
$m = 1$	0
$1 < m < 3$	0
$m = 3$	0
$3 < m < 5$ (㉢)	
$m = 5$	
$m > 5$ (㉣)	

따라서 함수 $g(m)$ 은 $m = 1, m = 3$ 일 때에 불연속이야.

함수 $g(x)h(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이기 위해서는

$h(1)$ 과 $h(3)$ 이 0이 되어야 해'

$$\rightarrow h(x) = (x-1)(x-3)$$

$$h(5) = 4 \cdot 2 = 8$$

함수 식 작성과 연속성을 동시에 쓰는 문제가 없어서, 유사문항에는 연속성을 쓰는 문제를 넣어 두었어.

함수의 식을 작성해가는 방법도 꼭 익혀둬!

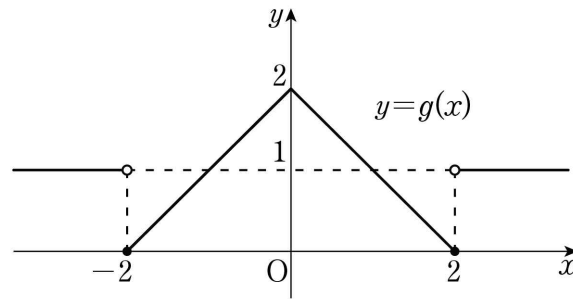
[20-2019년 시행 10월 학평 나형 14번]

최고차항의 계수가 1 인 이차함수 $f(x)$ 와 함수

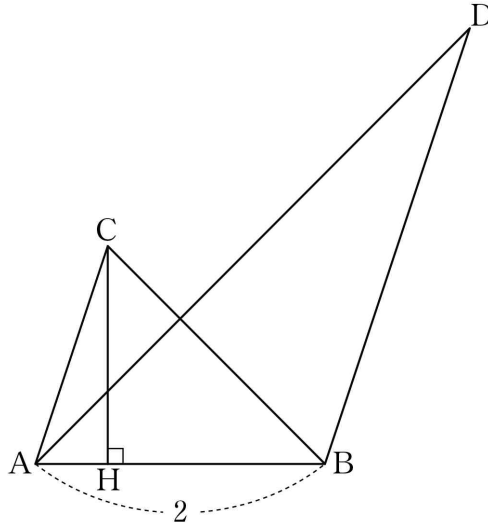
$$g(x) = \begin{cases} -|x| + 2 & (|x| \leq 2) \\ 1 & (|x| > 2) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이다. 함수 $y = f(x-a)g(x)$ 의 그래프가 한 점에서만 불연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 값의 곱은? [4점]

- ① -16 ② -12 ③ -8 ④ -4 ⑤ -1



021 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$ 인 두 삼각형 ABC, ABD 가 있다. 점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발 H 는 선분 AB 를 1:3 으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD 의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R 라 할 때,
 $4(R^2 - r^2) \times \sin^2(\angle CAB) = 51$ 이다. \overline{AC}^2 의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB < \frac{\pi}{2}$) [4점]

15번 문제와 마찬가지로 사인, 코사인 법칙을 활용할 것 같은 느낌이 오지?

* 사인법칙

삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

* 코사인법칙

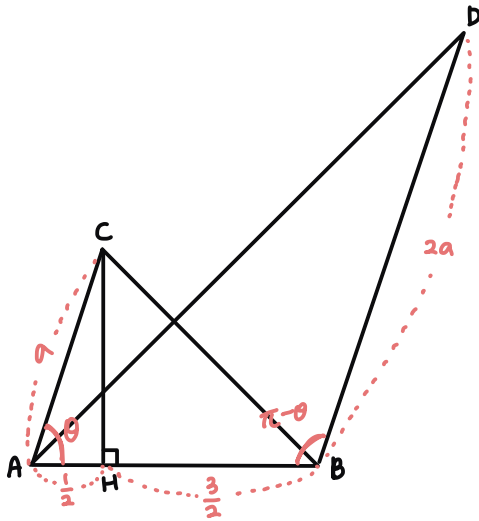
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

또 이 문제에서 중요한 점은 **평행선**과 **길이의 비**가 주어졌다는 점이야.

따라서 **답음**을 이용할 것이라는 생각을 하고 있어야 해!

(사실 이 문제에서는 안쓰지만, 항상 생각은 하고 있어야 해.)

이제 문제에서 준 정보를 그림에 표시해 보고, 미지수도 설정해 볼게.



문제에서 각각 삼각형의 외접원의 반지름의 길이와 사인 값을 통해서

제발 **사인법칙** 좀 써달라고 오치고 있네! \overline{AD} , \overline{BC} 를 포함하게 한번 써 볼게

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{\overline{AD}}{\sin\theta} = 2R, \quad \frac{\overline{BC}}{\sin\theta} = 2r$$

$$\rightarrow \overline{AD} = 2R\sin\theta, \quad \overline{BC} = 2r\sin\theta$$

$$\rightarrow 4(R^2 - r^2)\sin^2(\angle CAB) = 51 \xrightarrow{\text{대입}} \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51$$

이제 \overline{AD} , \overline{BC} 에 대한식이 더 필요한데, 저 변들을 제외하면 각각 삼각형에서 나머지 변, 각 하나가

주어져 있으니 **코사인 법칙** 을 써볼게!

$$\overline{AD}^2 = 4a^2 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2a \cos\theta$$

$$\overline{BC}^2 = a^2 + 4 - 4a \cos\theta$$

이 식을 이까 $\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 51$ 에 넣어서 정리하면

$$3a^2 + 12a \cos\theta = 51 \text{ 임을 알 수 있어.}$$

그런데 $\triangle ACH$ 에서 $\cos\theta = \frac{1}{2a}$ 임을 알 수 있지?

$$\therefore 3a^2 + 6 = 51, \quad a^2 = 15$$

삼각함수의 사인, 코사인법칙 문제들은 기술문제가 충분하지는 않아서 공부하기 힘들 수 있어.

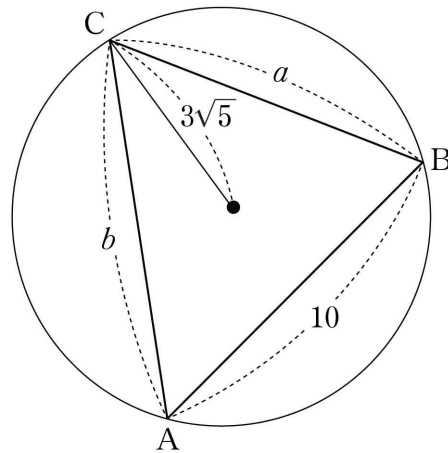
그래서 학생들이 자작 문항에만 집중하는 경향이 있는데 절대코 안돼!

기술 문항들 먼저 완벽하게 학습한 후에 자작 문항 풀기~~

[21-2020년 시행 3월 학평 나형 19번]

길이가 각각 10, a , b 인 세 선분 AB, BC, CA 를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$ 이고 $\frac{a^2 + b^2 - ab \cos C}{ab} = \frac{4}{3}$ 일 때, ab 의 값은? [4점]

- ① 140 ② 150 ③ 160 ④ 170 ⑤ 180



022 양수 a 와 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x (t^2 - 4) \{|f(t)| - a\} dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.
- (나) $g(2) = 5$

$g(0) - g(-4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

함수 $g(x)$ 를 추론하는 문제야.

정적분으로 정의된 함수의 형태로 $g(x)$ 가 주어졌어.

* 정적분으로 정의된 함수

$g(x) = \int_a^x f(t) dt$ 일 때,

- ① 대입: 아래끝 = 위끝 ($x=a$)
- ② 미분: $g'(x) = f(x)$

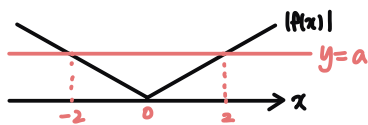
① $g(0) = 0$

② $g'(x) = (x^2 - 4) \{|f(x)| - a\}$

$g'(x)$ 는 $x=2, x=-2$ 에서 실근을 하나씩 가지는 함수야.

그런데 (가) 조건에서 함수 $g(x)$ 는 극값을 갖지 않는다고 했지?

그 말의 뜻은, $\{|f(x)| - a\}$ 가 $x=2, x=-2$ 에서 실근을 가져야 한다는 거야.



이런 상황이 되는 거지.

여기서 $f(x) = \frac{a}{2}x$ 라는 식을 쓸 수 있어.

이제 (나) 조건으로 마무리를 해 볼게.

$$\begin{aligned}
 g(2) &= \int_0^2 (t^2 - 4) \left(\left| \frac{a}{2}t \right| - a \right) dt = \int_0^2 (t^2 - 4) \left(\frac{a}{2}t - a \right) dt \\
 &= \int_0^2 \frac{a}{2} (t+2)(t-2)^2 dt = 5 \\
 &\rightarrow \int_0^2 (t^3 - 2t^2 - 4t + 8) dt = \frac{10}{a} \rightarrow (\text{별삼히 적분하}) a = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

이제 $g(-4)$ 의 값만 구하면 되는데, 단순 연산이니 직접 해봐! (22번 정답은 16)

[22-2020년 시행 대수능 나형 20번]

실수 $a(a > 1)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x) = x^2 \int_0^x f(t)dt - \int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a 의 최댓값은? [4점]

- ① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$



선택과목

확률과 통계

023 3H_6 의 값은? [2점]

① 24

② 26

③ 28

④ 30

⑤ 32

중복조합의 기본 연산 문제야.

* 중복조합

서로 다른 n 개 중에서 중복을 허락하여 r 개를 택할 때,

$$nH_r = {}_{(n+r-1)}C_r$$

$${}^3H_6 = {}_{(3+6-1)}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

유사문항도 비슷한 중복조합 연산 문제이니 풀어봐~

[23-2020년 시행 10월 학평 나형 2번]

${}_4P_2 + {}_4H_2$ 의 값은? [2점]

① 22

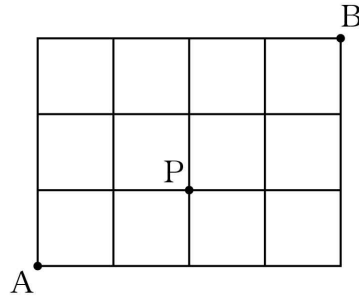
② 24

③ 26

④ 28

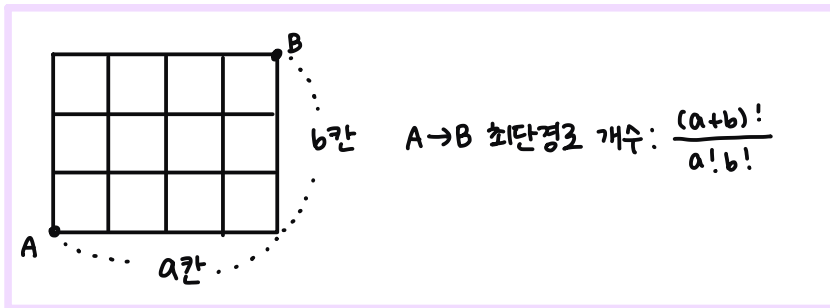
⑤ 30

024 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]



- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

최단 경로의 가짓수를 구하는 문제야.



이 문제에서는 점 P를 반드시 지나야 하니, $(A \rightarrow P) \times (P \rightarrow B)$ 로 구해주면 되겠지!

i) $A \rightarrow P$

$$\frac{3!}{2!1!} = 3$$

ii) $P \rightarrow B$

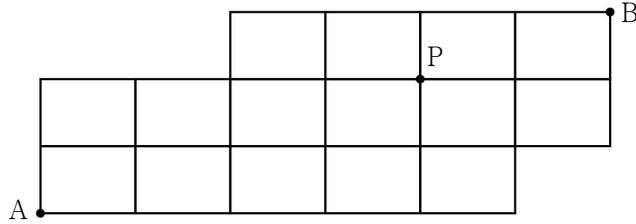
$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$\therefore 3 \times 6 = 18$$

유사문항에도 경유점이 있는 최단경로 문제를 수록해 뒀으니 풀어 보!

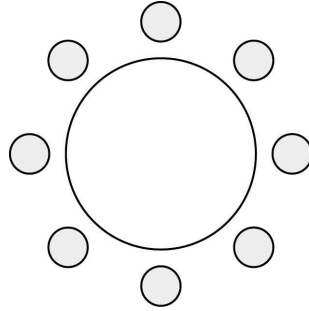
[24-2019년 시행 4월 학평 가형 24번]

그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하시오. [3점]



025 어느 고등학교 3학년의 네 학급에서 대표 2명씩 모두 8명의 학생이 참석하는 회의를 한다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 같은 학급 학생끼리 서로 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

- ① 92 ② 96 ③ 100 ④ 104 ⑤ 108



이웃하는 조건이 있는 원순열 문제야!

학급 A~D 에 속한 학생들을 $A_1, A_2, B_1, \dots, D_4$ 라 하면

먼저 A~D 네 학급을 원순열로 나열하면 $(4-1)! = 3!$

그 이후에는 A~D 에 각각 학생 두명씩을 배치하면 되므로

$$2^4 = 16$$

$$\therefore 6 \times 16 = 96$$

참고로 A~D 에서 원순열을 사용해 배치하고 나면 회전해서 서로 일치하는 경우가 없으니

그냥 순열로 계산하면 돼!

유사문항에도 이웃하는 조건이 걸린 원순열 문제를 수록해 뒀어~

[25-2020년 시행 6월 모평 가형 8번]

1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

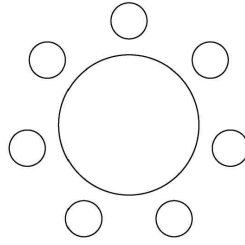
① 96

② 100

③ 104

④ 108

⑤ 112



026 같은 종류의 연필 6 자루와 같은 종류의 지우개 5 개를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 학생

이 적어도 한 자루의 연필을 받도록 나누어 주는 경우의 수는?

(단, 지우개를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

- ① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

중복조합을 활용하는 문제야!

일반적으로 $a+b+c=n$ 이런 느낌의 식이 세워진다면 '중복조합이 아닐까..?' 하는 의심을 해 보기도 좋아.

a, b, c 가 음이 아닌 정수, n 은 자연수일 때
 $a+b+c=n \rightarrow (a, b, c)$ 의 개수: 3H_n

a, b, c, n 이 모두 자연수일 때
 $a+b+c=n \rightarrow (a, b, c)$ 의 개수: ${}^3H_{n-3}$

학생 A, B, C 가 받는 연필의 개수를 각각 a, b, c 라 하면

$$a+b+c=6$$

이때 $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ 이므로 ${}^3H_3 = {}^5C_3 = 10$

학생 A, B, C 가 받는 지우개의 개수를 각각 d, β, r 라 하면

$$d+\beta+r=5$$

이때 $d \geq 0, \beta \geq 0, r \geq 0$ 이므로 ${}^3H_5 = {}^7C_2 = 21$

$$\therefore 10 \times 21 = 210$$

유사문항에도 비슷하게 같은 종류를 나누어 주는 문항을 수축해줬으니 꼭 풀어봐!

[26-2012년 시행 대수능 나형 12번]

같은 종류의 주스 4병, 같은 종류의 생수 2병, 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는?
(단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.) [3점]

- ① 330 ② 315 ③ 300 ④ 285 ⑤ 270

027

숫자 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 1이 적힌

카드와 2가 적힌 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

- ① 180 ② 185 ③ 190 ④ 195 ⑤ 200



여사건을 이용하면 편하게 풀 수 있는 경우의 수 문제야.

여사건은 구하는 경우보다 그 반대의 경우가 구하기 더 편할 때 활용하는 풀이방향이야.

1과 2 사이에 두 장 이상의 카드가 들어가는 경우는 (2/3/4/5)장이 들어갈 수 있어.

물론 직접 다 구해도 되지만, 여사건을 활용해서 사이에 (0/1)장이 들어가는 경우를 전체에서 빼 줄게.

전체 경우의 수: $\frac{7!}{2!3!}$

1, 2가 서로 이웃하는 경우

→ $\boxed{1\ 2}\ 3\ 3\ 4\ 4\ 4$

→ $2 \times \frac{6!}{2!3!}$ ↗ 1, 2 하나로 보고
↘ 1, 2 자리바꿈 ↗ 같은 것이 있는 순열

1, 2 사이에 1장의 카드가 들어가는 경우

i) 3이 들어가는 경우

$\boxed{1\ 3\ 2}\ 3\ 4\ 4\ 4$

→ $2 \times \frac{5!}{3!}$ ↗ 1, 3, 2 하나로 보고
↘ 1, 2 자리바꿈 ↗ 같은 것이 있는 순열

ii) 4가 들어가는 경우

$\boxed{1\ 4\ 2}\ 3\ 3\ 4\ 4$

→ $2 \times \frac{5!}{2!2!}$ ↗ 1, 4, 2 하나로 보고
↘ 1, 2 자리바꿈 ↗ 같은 것이 있는 순열

∴ $\frac{7!}{2!3!} - \left(2 \times \frac{6!}{2!3!} + 2 \times \frac{5!}{3!} + 2 \times \frac{5!}{2!2!} \right) = 200$

비슷한 문항이 기술에 없어서 여사건 활용 문항을 넣어 뒀어.

여사건을 선택하는 상황에 대해서도 고민해 보!

[27-2019년 시행 대수능 나형 29번]

세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 사탕 6개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

- (가) 학생 A가 받는 사탕의 개수는 1 이상이다.
- (나) 학생 B가 받는 초콜릿의 개수는 1 이상이다.
- (다) 학생 C가 받는 사탕의 개수와 초콜릿의 개수의 합은 1 이상이다.

028 두 집합

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Y = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는? [4점]

(가) $f(2) < f(3) < f(4)$
 (나) $f(1) > f(3) > f(5)$

- ① 100 ② 102 ③ 104 ④ 106 ⑤ 108

함수의 개수를 구하는 문제야.

일반적으로 $<, >$: 조합, \leq, \geq : 중복조합을 활용해.

이 문제에서는 조합이 활용돼!

(가), (나)에 공통적으로 $f(3)$ 이 포함되어 있으니, $f(3)$ 을 기준으로 경우를 나누어 볼게.

i) $f(3) = 2, 12$ 인 경우

→ 2보다 작은 값과 12보다 큰 값이 존재하지 않아서 불가능해.

ii) $f(3) = 4, 10$ 인 경우

$$\begin{array}{l} f(3) = 4 \text{ 이면} \quad f(2) < f(3) < f(4) \\ \quad \quad \quad \quad 2 \quad \quad 4 \quad (6, 8, 10, 12) \\ f(1) > f(3) > f(5) \\ (6, 8, 10, 12) \quad 4 \quad \quad 2 \end{array}$$

$$\therefore 4 \times 4 = 16$$

$f(3) = 10$ 인 경우도 마찬가지이므로 총 경우의 수는 $16 \times 2 = 32$

iii) $f(3) = 6, 8$ 인 경우

$$\begin{array}{l} f(3) = 6 \text{ 이면} \quad f(2) < f(3) < f(4) \\ (2, 4) \quad \quad 6 \quad (8, 10, 12) \\ f(1) > f(3) > f(5) \\ (8, 10, 12) \quad 6 \quad (2, 4) \end{array}$$

$$\therefore 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$$

$f(3) = 8$ 인 경우도 마찬가지이므로 총 경우의 수는 $36 \times 2 = 72$

$$\therefore 32 + 72 = 104$$

유사문항에는 $<, >$ 가 아닌 \leq, \geq 인 경우로 넣어 줬으니 풀어 보!

[28-2020년 시행 7월 학평 가형 28번]

집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 함수 $f: X \rightarrow X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오. [4점]

- (가) $f(3) \times f(6)$ 은 3의 배수이다.
(나) 집합 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 이다.

029 5 이하의 자연수 a, b, c, d 에 대하여 부등식

$$a \leq b+1 \leq c \leq d$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하시오. [4점]

이게 28번에서 말한 중복조합 활용 문제야.

$b+1 = B$ 라 두면 $1 \leq b \leq 5$ 이므로 $2 \leq B \leq 6$ 이지.

$1 \leq a \leq B \leq c \leq d \leq 5$ 이므로,

전체 경우에서 $B=1$ 인 경우를 제외하는 여사건을 활용하는 것이 좋겠지!

전체 경우: $1 \sim 5$ 5개의 자연수 중 중복을 허용하여 4개 선택 $\rightarrow {}_5H_4$

$B=1$ 인 경우: $a=1$ 이므로, $1 \leq c \leq d \leq 5$ 를 만족하면 돼.

$1 \sim 5$ 5개의 자연수 중 중복을 허용하여 2개 선택 $\rightarrow {}_5H_2$

$$\therefore {}_5H_4 - {}_5H_2 = 70 - 15 = 55$$

유사문항으로 수축해 둔 문제가 비슷한 아이디어를 사용하는데 더 어렵고, 중요한 문제야!

꼭 풀어보고 복습해 봐야 해!

[29-2019년 시행 6월 모평 나형 29번]

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3 의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $n = 1, 2$ 일 때, $x_{n+1} - x_n \geq 2$ 이다.

(나) $x_3 \leq 10$

030 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.
 (나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.

확통 문제들 중 가장 까다로웠던 것 같아.

나는 이 문제를 보고 여사건을 떠올렸어.

(가) 조건에서도 1이 한 번 이상 (1~4번) 나오는 것보다는 0번 나오는 것이 더 쉽고,

(나) 조건에서도 이웃한 수의 차는 0~3 이기 때문에, 2이하보다는 3인 것이 더 쉬워.

(가) 조건을 만족하는 사건을 A, (나)조건을 만족하는 사건을 B, 전체 사건을 S라 할게.

나는 A^c, B^c 를 활용하고 싶운데, 구하는 것은 $n(A \cap B)$ 이기 때문에

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(S) - n(A^c \cup B^c) \\ &= n(S) - \{n(A^c) + n(B^c) - n(A^c \cap B^c)\} \text{ 임을 이용할 거야.} \end{aligned}$$

㉠ A^c : 숫자 1이 나오지 않는 경우

$$3^4 = 81$$

㉡ B^c : 이웃한 두수의 차이가 3인 경우 (1과 4 이웃)가 존재할 경우

$$\text{i) } 14(11)/(44) : 2 \times \binom{4!}{3!} = 8$$

$$\text{ii) } 14(22)/(33) : 2 \times \binom{3!}{2!} \times 2 = 12$$

$$\text{iii) } 14(12)/(13)/(24)/(34) : 4 \times \binom{4!}{2!} - 2 = 40$$

$$\text{iv) } 14(14) : 1 \times \binom{4!}{2!2!} = 6$$

$$\text{v) } 14(23) : 1 \times (3! \times 2) = 12$$

$$\therefore 78$$

㉢ $A^c \cap B^c$: 1이 나오지 않는데 1,4가 이웃하는 것이 존재 \rightarrow 불가능 (경우의수 0)

$$\therefore 81 + 78 - 0 = 159$$

이렇게까지 까다로운 문항이 기출에 없어서 이웃하는 경우를 따지는 문제로 수록했어. 꼭 풀어봐!

[30-2019년 시행 10월 학평 가형 18번]

숫자 1, 2, 3, 6, 18이 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 있다. 다음은 이 5장의 카드를 일렬로 나열할 때, 이웃한 두 카드에 적혀 있는 수의 곱이 모두 6의 배수가 되도록 나열하는 경우의 수를 구하는 과정이다.

이웃한 두 카드에 적힌 수의 곱이 6의 배수가 되지 않는 경우는 1, 2가 적힌 두 카드가 서로 이웃하는 경우와 1, 3이 적힌 두 카드가 서로 이웃하는 경우이다.

(i) 1, 2가 적힌 두 카드가 서로 이웃하는 경우

이 두 카드를 한 묶음으로 생각하고, 두 카드의 자리를 바꾸는 것을 고려하면 1, 2가 적힌 두 카드가 이웃하도록 5장의 카드를 나열하는 경우의 수는 이다.

(ii) 1, 3이 적힌 두 카드가 서로 이웃하는 경우

(i)과 마찬가지로 경우의 수는 이다.

(iii) (i)과 (ii)가 동시에 일어나는 경우

1, 2, 3이 적힌 세 카드를 한 묶음으로 생각하고, 세 카드 중 1이 적힌 카드가 가운데에 위치하도록 5장의 카드를 나열하는 경우의 수는 이다.

5장의 카드를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 $5! = 120$ 이므로 (i), (ii), (iii)에 의해 구하는 경우의 수는 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r 라 할 때, $p+q+r$ 의 값은? [4점]

① 96

② 100

③ 104

④ 108

⑤ 112

