공통 접선 관찰하기

20210930(가)

30. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

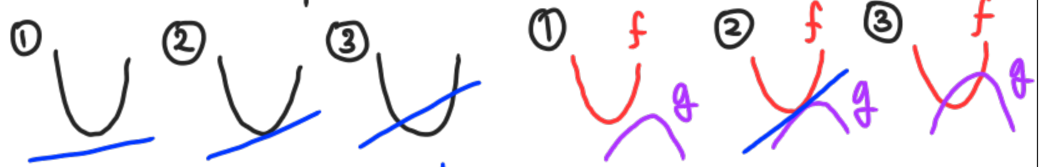
> 모든 실수 x에 대하여 부등식
>
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
>
> 이 성립한다.

$|M \times m^3| = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

#Tip! 곡선 두 개가 나왔을 때, 공통 접선에서 답이 되는 상황이나 집중해서 관찰해야 할 상황이 자주 나옵니다. 특히 교점의 개수를 셀 때!

* 나형 학생들은 공통 접선 상황이 되는 것만 확인하시고,
가형 학생들은 직접 미분해서 풀어보세요

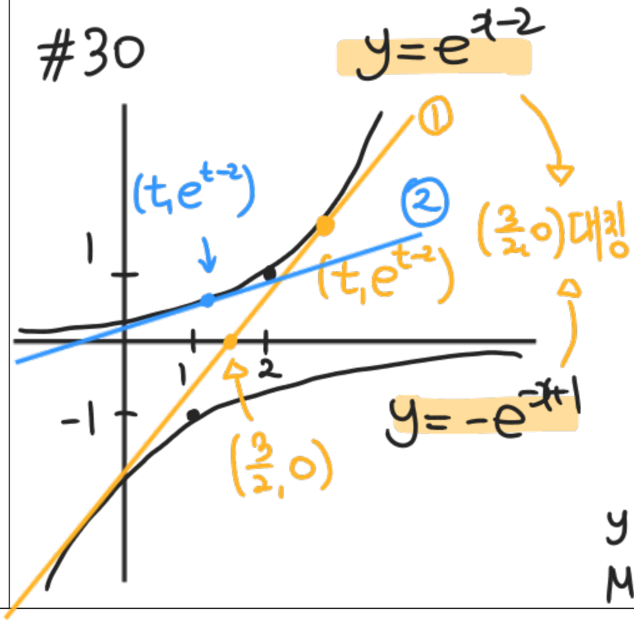
* 교점의 개수 * $f(x)$, $g(x)$의 대소 관계



0개 1개 2개 $f(x)>g(x)$ $f(x)\ge g(x)$ X

→ 접선 기준으로 상황이 바뀌는 것을 알 수 있다.

#30



① $m = ab$ (⊕ ⊖)

$e^{t-2} = \dfrac{e^{t-2}}{t-\frac{3}{2}}$, $t=\dfrac{5}{2}$

$y = e^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{5}{2}\right)+e^{\frac{1}{2}}$

$m = -\dfrac{3}{2}e$

② $M = ab$ (⊕ ⊕)

$y = e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$

$M = (1-t)e^{2t-4}$ 의 최댓값

$M = \dfrac{1}{2}e^{-3}$

공통 접선 관찰하기

* 나형은 공통 접선인 것만 확인

2022 예시문항(미적분) 30번

30. 두 양수 a, $b\,(b<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax & (x\le 0) \\ \dfrac{\ln(x+b)}{x} & (x>0) \end{cases}$$

$-x(x-a)$

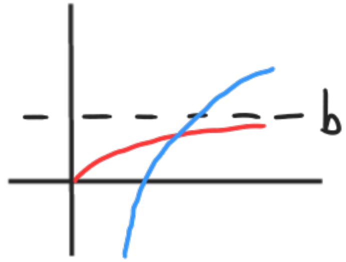
이라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$이라 할 때, 함수 $g(m)$은 다음 조건을 만족시킨다.

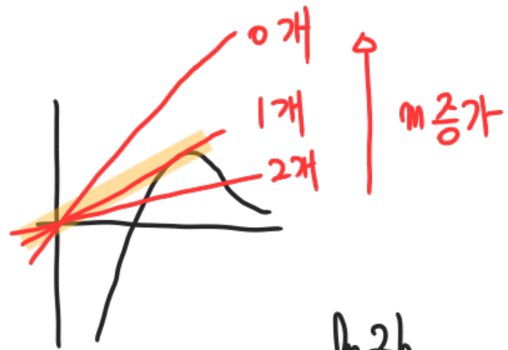
> $\lim\limits_{m\to\alpha-} g(m) - \lim\limits_{m\to\alpha+} g(m) = 1$을 만족시키는 양수 α가 오직 하나 존재하고, 이 α에 대하여 점 $(b,\ f(b))$는 직선 $y=\alpha x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점이다.

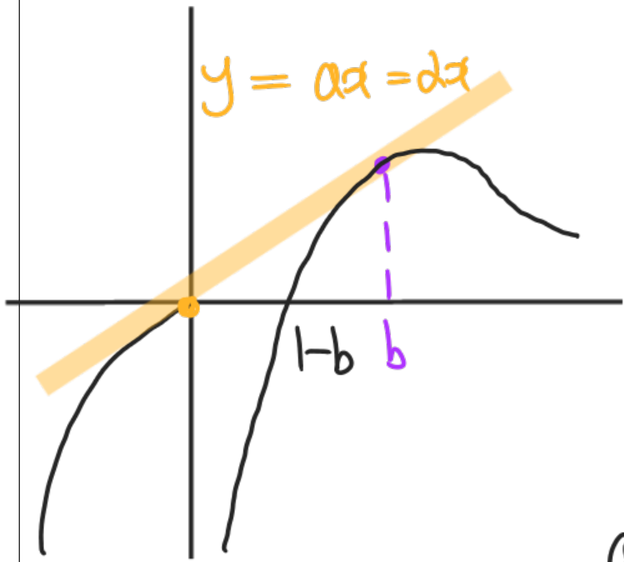
$ab^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이다.) [4점]

$$\left(\frac{\ln(x+b)}{x}\right)' = \frac{\frac{x}{x+b} - \ln(x+b)}{x^2}$$







$\alpha b = \dfrac{\ln 2b}{b}$

$\alpha = \dfrac{\frac{1}{2} - \ln 2b}{b^2} = \dfrac{\ln 2b}{b^2}$

$\ln 2b = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$

$a = \alpha = \frac{1}{4} \times 4e^{-\frac{1}{2}}$
$= e^{-\frac{1}{2}}$

$ab^2 = \frac{1}{4}$