[나승민/한성은 모의고사]

대학수학능력시험 수학(나형) 연습 (2/4)

나승민 (성균관대 수학과)

이투스앤써, 이투스 네오

힘든 시기, 잘 버텨봅시다. 9평 잘 보세요.

수학에 감각을 더하다.
instagram @cremath_david

한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

수능까지 공부할 시간이 적지 않게 남았습니다.
9평/수시원서접수에 너무 들뜨거나 휘둘리지 마세요.

hansungeun.com
 – 저자소개, 학습자료, 교재판매

5지선다형

1. $\left(3\times 3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}-1}$의 값은? [2점]

① 1　② 3　③ 6　④ 9　⑤ 12

2. $\cos\frac{5}{6}\pi$의 값은? [2점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\int_{-1}^{2} 4x^3 dx$의 값은? [2점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6},\quad \mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{9}$　② $\frac{2}{9}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{4}{9}$　⑤ $\frac{5}{9}$

5. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+2a & (x \geq -1) \\ bx+4 & (x<-1) \end{cases}$이 $x=-1$에서 미분가능할 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

6. 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{33} \frac{3}{a_k a_{k+1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{93}{100}$ ② $\frac{24}{25}$ ③ $\frac{99}{100}$
④ $\frac{51}{50}$ ⑤ $\frac{21}{20}$

7. 한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 주사위의 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. ab가 6의 약수일 때, $a+b$도 6의 약수일 확률은? [3점]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

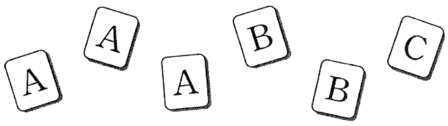
8. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식

$$3\sin^2 x = -\cos^2 x + \cos x + 2$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① 3π ② $\frac{7}{2}\pi$ ③ 4π ④ $\frac{9}{2}\pi$ ⑤ 5π

9. A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, B가 적힌 두 장의 카드가 서로 이웃할 확률은? [3점]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

10. 1보다 큰 세 실수 a, b, c가

$$\frac{\log_a b}{2} = \frac{\log_b c}{3} = \frac{\log_c a}{4}$$

를 만족시킬 때, $2\log_b a + 3\log_c b + 4\log_a c$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ ③ $\sqrt[3]{3}$ ④ $2\sqrt[3]{3}$ ⑤ $6\sqrt[3]{3}$

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$f(t)=t^2-6t, \quad g(t)=10t-t^2$$

이다. 두 점 P와 Q가 서로 같은 방향으로 움직이는 시각 t의 범위는? [3점]

① $2<t<4$ ② $3<t<5$ ③ $4<t<6$
④ $5<t<7$ ⑤ $6<t<8$

12. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-f(x)}{x-3}=4$$

를 만족시킬 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선의 y절편은? [4점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

13. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$은

$$a_{n+1} = \begin{cases} -a_n & (a_n < 0) \\ a_n - 1 & (a_n \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{42} a_k = \frac{1}{2}$일 때, a_1의 값은? (단, $0 < a_1 < 1$이다.) [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

14. $0 < x < 2\pi$에서 부등식 $(\log_{\pi} x - 1)(2\cos x - 1) < 0$의 해가 $a < x < b$ 또는 $c < x < d$일 때, $a+b+c+d$의 값은? (단, $a < b < c < d$이다.) [3점]

① 3π ② $\frac{10}{3}\pi$ ③ $\frac{11}{3}\pi$ ④ 4π ⑤ $\frac{13}{3}\pi$

15. 정규분포 $\mathrm{N}(48, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 하나를 택해 그 값을 X라 하고, 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(X \leq 5\sigma) = \mathrm{P}(\overline{X} \geq 9\sigma)$를 만족시키는 σ의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

16. 방정식

$$|2\log_2 x - k| = \log_2 x + 1$$

의 두 실근을 α, $\beta(\alpha < \beta)$라 하자. $\beta = 16\alpha$일 때, k의 값은? [4점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

17. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때

(좌변) = (우변) = 1

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{m+1}\times\frac{m(m+1)}{2}$$

이다. $n=m+1$일 때

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^{k+1}k^2\\ &=(-1)^{m+1}\times\frac{m(m+1)}{2}+\boxed{\text{(가)}}\\ &=(-1)^{m+2}\left\{-\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)^2\right\}\\ &=(-1)^{m+2}\times\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k^2=(-1)^{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(4)g(4)$의 값은? [4점]

① 275 ② 300 ③ 325
④ 350 ⑤ 375

18. 착한 의학자 석태는 전 세계에 확산된 바이러스 모르나19의 감염여부를 검사하는 진단키트를 개발하였다. 이 진단키트는 모르나19에 감염된 환자를 감염자로 진단할 확률이 98%이고, 감염되지 않은 환자를 비감염자로 진단할 확률이 95%라고 한다. 어느 진료소에서 모르나19에 감염된 환자 100명과 감염되지 않은 환자 300명을 대상으로 이 진단키트를 사용하였다. 이 400명 중 임의로 택한 한 명의 환자가 진단키트에서 감염자로 진단 당했을 때, 이 환자가 실제로 모르나19에 감염된 환자일 확률은? [4점]

① $\frac{92}{113}$ ② $\frac{94}{113}$ ③ $\frac{96}{113}$
④ $\frac{98}{113}$ ⑤ $\frac{100}{113}$

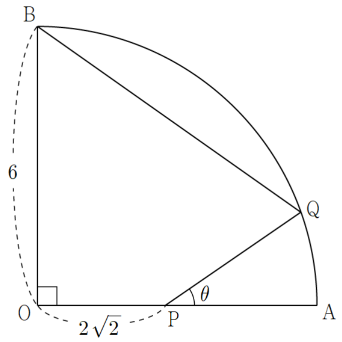
19. 세 점 O(0, 0), A($2n$, 0), B$(n,\ \sqrt{3}n)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이가 두 점 O, A를 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 의하여 이등분될 때, $f(x)$의 극댓값을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① $36\sqrt{3}$ ② $39\sqrt{3}$ ③ $42\sqrt{3}$
④ $45\sqrt{3}$ ⑤ $48\sqrt{3}$

20. 그림과 같이 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA 위의 점 P와 호 AB 위의 점 Q는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{OP}=2\sqrt{2}$
(나) $\angle QPA=\theta$라 할 때 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\overline{BQ}$의 값은? [4점]



① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ 8 ⑤ $4\sqrt{5}$

21. 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=(x-1)-\int_{1}^{x} f(t)dt$$

는 다음 조건을 만족시킨다.

$x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq 0$이다.

$f(0)$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

단답형

22. 다항식 $(2x+1)^4$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하여라. [3점]

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{5}\right)$를 따를 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하여라. [3점]

24. 함수 $f(x)=2|\sin\pi x|+4$는 주기가 a인 주기함수이고, $f(x)$의 최솟값은 m, 최댓값은 M이다. $a+m+M$의 값을 구하여라. [3점]

25. 곡선 $y=x^2-4x+5$의 접하는 직선 중 점 $(4, 2)$를 지나는 두 직선을 l_1, l_2라 할 때, 두 직선 l_1, l_2의 기울기의 곱을 구하여라. [3점]

26. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - n$

(나) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = (n-2)2^n + 2$

$b_5 + b_6$의 값을 구하여라. [4점]

27. 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. [4점]

> (가) $x+y+z=19$
> (나) x, y, z는 어떤 삼각형의 세 변의 길이이다.

28. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 극한값

$$\lim_{x\to n}\frac{f(x)g(x)}{(x-n)^n}\ (n=1,\ 2,\ 3)$$

가 존재하고 $f(x)$가 $x=2$에서 극댓값을 가질 때, $g(5)$의 값을 구하여라. [4점]

29. 집합

$$A=\{x\,|\,x\text{는 } n \text{ 이하의 자연수}\}\ (\text{단, } n \geq 3)$$

의 부분집합 중 원소의 개수가 3인 모든 부분집합에 대하여 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값을 $f(n)$이라 하자. $\sum_{k=3}^{10} f(k)$의 값을 구하여라. [4점]

30. 최솟값이 2인 사차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$f(x)=f(t)$$

의 서로 다른 모든 실근의 합을 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a는 모두 5개이고 이를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열한 것이 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_5$이다.

$$a_3-a_2=2,\quad f(a_3)-f(a_2)=4,\quad g(a_3)-g(a_2)=3$$

일 때, $f(7)$의 값을 구하여라. [4점]

[나승민/한성은 모의고사]

수능(나형) 연습(2/4) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	①	03	⑤	04	③	05	①
06	③	07	④	08	①	09	②	10	⑤
11	②	12	②	13	④	14	①	15	③
16	⑤	17	⑤	18	④	19	④	20	③
21	②	22	24	23	416	24	11	25	4
26	24	27	45	28	16	29	792	30	38

COMMENT 10

$\dfrac{\log_a b}{2}=\dfrac{\log_b c}{3}=\dfrac{\log_c a}{4}=k$라 두면 $\log_a b=2k$, $\log_b c=3k$, $\log_c a=4k$이다.

세 등식을 변끼리 모두 곱하면 $k=2\sqrt[3]{3}$ 이고, $2\log_b a=3\log_c b=4\log_c a=\dfrac{1}{k}=2\sqrt[3]{3}$ 이다.

COMMENT 14

(ⅰ) $\log_\pi x-1<0$이고 $\cos x-\dfrac{1}{2}>0$인 경우 : $0<x<\pi$이고 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$이다.

(ⅱ) $\log_\pi x-1>0$이고 $\cos x-\dfrac{1}{2}<0$인 경우 $\pi<x<2\pi$이고 $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{5}{3}\pi$ 이므로 $\pi<x<\dfrac{5}{3}\pi$ 이다.

따라서 부등식의 해는 $0<x<\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\pi<x<\dfrac{5}{3}\pi$ 이다.

COMMENT 16

$2\log_2 x-k\le 0$일 때 : $-2\log_2 x+k=\log_2 x+1 \Rightarrow 3\log_2 x=k-1 \Rightarrow x=2^{\frac{k-1}{3}}$, 얘가 α이다.
$2\log_2 x-k>0$일 때 : $2\log_2 x-k=\log_2 x+1 \Rightarrow \log_2 x=k+1 \Rightarrow x=2^{k+1}$, 얘가 β이다.

COMMENT 17

$f(m)=(-1)^{m+2}(m+1)^2$, $g(m)=\dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$

COMMENT 19

삼각형 OAB의 넓이는 $\sqrt{3}n^2$이다. $f(x)=mx(x-2n)$이라 할 때, $\dfrac{\sqrt{3}n^2}{2}=\dfrac{|m|}{6}(2n)^3$이다.

$m=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8n}$이고 $f(x)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8n}x(x-2n)$이다. $f(x)$의 극댓값은 $a_n=f(n)=\dfrac{3\sqrt{3}n}{8}$이다.

COMMENT 20

$\overline{PQ}=x$라 할 때, 삼각형 OPQ에서 코사인 돌리면

$$6^2=(2\sqrt{2})^2+x^2-4\sqrt{2}x\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \Leftrightarrow (\sqrt{3}x-6)(\sqrt{3}x+14)=0$$

이므로 $x=2\sqrt{3}$ 이다. 사인 돌리면 $\sin(\angle POQ)=\dfrac{1}{3}$이다.

$\angle BOQ=\dfrac{\pi}{2}-\angle POQ$이므로 $\cos(\angle BOQ)=\dfrac{1}{3}$이다. 삼각형 BOQ에서 코사인.

COMMENT 21

$f(x)=-x^2+ax+b$라 하자.
모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이며 $g(1)=0$이므로 $g'(1)=0$이다. $b=2-a$이다.

'방정식 $g(x)=0$의 한 근이 0 이하'를 풀면 $a\le\dfrac{4}{3}$이다.

COMMENT 25

접점을 $(t,\ f(t))$라고 하면 접선의 방정식은 $y=(2t-4)(x-t)+t^2-4t+5$이다.
점 $(4,\ 2)$를 지나므로 $t^2-8t+13=0$이다. 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면, 두 기울기의 곱은 $(2\alpha-4)(2\beta-4)$이다.
※ $x^2-4x+5=m(x-4)+2$에서 (판별식)$=0$을 풀어도 좋다.

COMMENT 27

세 자연수 $x,\ y,\ z$ 중 어느 하나가 다른 두 수의 합보다 작아야 한다.
　$\Rightarrow$ 가장 큰 자연수가 9 이하이다.
전체 경우의 수 ${}_3H_{16}$에서 어느 하나가 10 이상인 경우의 수 ${}_3H_7\times3$을 빼면 된당.

COMMENT 28

다항식 $f(x)g(x)$가 $(x-1),\ (x-2)^2,\ (x-3)^3$을 모두 인수로 가져야 한다.
다항식 $f(x)g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 6차식이므로 $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$이다.
두 삼차함수 $f(x)$와 $g(x)$가 인수를 잘 나눠먹어야 하는데, $x=2$에서 극댓값을 가지려면
띠띠띠 $f(x)=(x-2)^2(x-3)$ 밖에 안 되네. $g(x)=(x-1)(x-3)^2$이다.

COMMENT 29

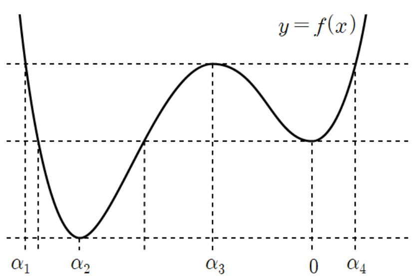
$$f(n)=\sum_{k=1}^{n-2}\{k\times{}_{n-k}C_2\}$$
$$=({}_{n-1}C_2+{}_{n-2}C_2+\cdots+{}_2C_2)+({}_{n-2}C_2+{}_{n-3}C_2+\cdots+{}_2C_2)+({}_{n-3}C_2+\cdots+{}_2C_2)+\cdots+{}_2C_2$$
$$={}_nC_3+{}_{n-1}C_3+{}_{n-2}C_3+\cdots+{}_3C_3={}_{n+1}C_4$$
※ $f(n)=\sum_{k=1}^{n-2}\{k\times{}_{n-k}C_2\}$에서 $\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k(n-k)(n-k-1)}{2}$을 푸는 것도 가능하다. 이론상.

COMMENT 30

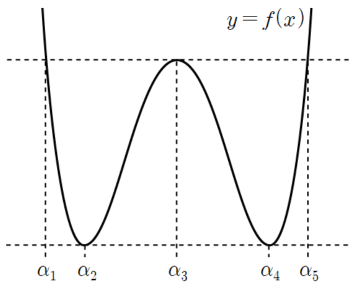
사차함수가 극댓값을 가지지 않으면 $g(a)$의 불연속점은 많아야 1개다. 안 되겠군.

사차함수가 극소극대극소를 가지며 대충 생기면
방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 변하는 t값이 7개다.
이 중 들어오거나 나가는 실근이 0인 경우는 함수 $g(t)$의 불연속점에서 제외된다.
빠진다면 1개 또는 3개이므로, $g(t)$의 불연속점이 7개가 아니라면 6개 또는 4개가 된다.
[그림1]은 대충 생긴 사차함수와 $f'(x)=0$의 실근 중 하나가 1일 때의 예이다. 참고.

사차함수가 극소극대극소를 가지며 극소점 2개의 y좌표가 서로 같아야 한다. [그림2] 참고.
$g(a_3)=a_1+a_3+a_5=3a_3,\ g(a_2)=a_2+a_4=2a_3$이므로 $g(a_3)-g(a_2)=a_3=3$이다.
$a_3-a_2=2$에서 $a_2=1,\ y=f(x)$는 대충 대칭이므로 $a_4=5,\ f(x)=k(x-1)^2(x-5)^2+2$이다.
$f(a_3)-f(a_2)=f(3)-f(1)=16k$이므로 $k=\frac{1}{4},\ f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^2(x-5)^2+2$이다.



[그림1]



[그림2]