지수와 로그

1. 거듭제곱근

(1) a의 n제곱근

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n=a$$

를 만족시키는 근 x를 a의 n제곱근이라고 한다.

이때 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, $\cdots$을 통틀어

a의 거듭제곱근

이라고 한다.

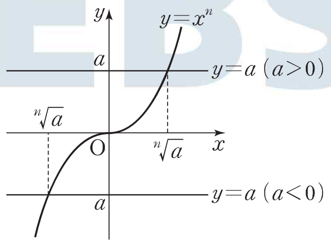
참고 0이 아닌 실수 a의 n제곱근은 복소수 범위에서 n개가 있음이 알려져 있다.

(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 기호 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

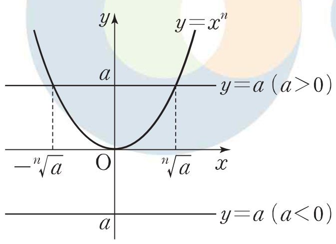
	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

설명 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 근 중에서 실수인 것과 같으므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다. 이때 이 실수를 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 나타낸다.

① n이 홀수일 때



② n이 짝수일 때



예 ① 8의 세제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^3=8$의 근 중 실수인 것으로 2이다.
그러므로 $\sqrt[3]{8}=2$이다.

② 16의 네제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^4=16$의 근 중 실수인 것으로 -2 또는 2이다.
그러므로 $\sqrt[4]{16}=2$, $-\sqrt[4]{16}=-2$이다.

(3) 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

예 ① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\times4}=\sqrt[3]{2^3}=2$

② $(\sqrt[6]{4})^3=\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{2^6}=2$

예제 1 거듭제곱근

27의 세제곱근 중 실수인 것을 α, 허수인 것을 각각 β, γ라 할 때, $\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha}$의 값은?

① -6　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 6

풀이 전략 실수 a의 n제곱근은 방정식 $x^n=a$의 근임을 이용한다.

풀이 27의 세제곱근은 방정식 $x^3=27$의 근이다.

이 방정식을 풀면

$$x^3-3^3=0,\ (x-3)(x^2+3x+9)=0$$

이때 방정식 $x^2+3x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=3^2-4\times9<0$$

이므로 이 이차방정식은 허근을 갖는다.

그러므로 $\alpha=3$이고 β, γ는 이차방정식 $x^2+3x+9=0$의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\beta+\gamma=-3,\ \beta\gamma=9$$

이므로

$$\beta^2+\gamma^2=(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma=(-3)^2-2\times9=-9$$

따라서 $\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha}=\dfrac{-9}{3}=-3$

답 ②

정답과 풀이 4쪽

[20007-0001]

유제 1 $\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{(-4)^2}$의 값은?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

[20007-0002]

유제 2 $\sqrt[6]{6}\div\sqrt{\sqrt[3]{3}}\times(\sqrt[6]{2})^5$의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

2. 정수인 지수

(1) 0 또는 음의 정수인 지수의 정의

$a\neq 0$이고 n이 자연수일 때

① $a^0=1$

② $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

설명 $a\neq 0$이고 m, n이 자연수일 때, 지수법칙

$$a^m\times a^n=a^{m+n} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 성립한다.

㉠이 $m=0$인 경우에도 성립한다고 하면

$$a^0\times a^n=a^{0+n}=a^n$$

이어야 한다. 이때 $a^n\neq 0$이므로 다음과 같이 정의한다.

$$a^0=1$$

또 ㉠이 $m=-n$ (n은 자연수)인 경우에도 성립한다고 하면

$$a^{-n}\times a^n=a^{-n+n}=a^0=1$$

이어야 한다. 그러므로 다음과 같이 정의한다.

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

예 ① $2^0=1$, $(-3)^0=1$

② $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$, $(-3)^{-2}=\dfrac{1}{(-3)^2}=\dfrac{1}{9}$

(2) 지수가 정수일 때의 지수법칙

$a\neq 0$, $b\neq 0$이고 m, n이 정수일 때

① $a^ma^n=a^{m+n}$

② $a^m\div a^n=a^{m-n}$

③ $(a^m)^n=a^{mn}$

④ $(ab)^n=a^nb^n$

설명 ① m, n이 음의 정수인 경우

$m=-p$, $n=-q$ (p, q는 자연수)로 놓으면 음의 정수인 지수의 정의와 중학교에서 배운 지수가 자연수일 때의 지수법칙에 의하여 다음이 성립한다.

$$a^ma^n=a^{-p}\times a^{-q}=\frac{1}{a^p}\times\frac{1}{a^q}=\frac{1}{a^{p+q}}=a^{-(p+q)}=a^{(-p)+(-q)}=a^{m+n}$$

같은 방법으로 두 정수 m, n 중 하나만 음의 정수인 경우에도 $a^ma^n=a^{m+n}$이 성립함을 보일 수 있다.

예 ① $2^3\times 2^{-2}=2^{3+(-2)}=2^1=2$

② $2^2\div 2^{-3}=2^{2-(-3)}=2^5=32$

③ $(2^3)^{-2}=2^{3\times(-2)}=2^{-6}=\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{1}{64}$

④ $(2\times 3)^{-2}=2^{-2}\times 3^{-2}=\dfrac{1}{2^2}\times\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{36}$

예제 2 지수가 정수일 때의 지수법칙

두 양의 실수 a, b가

$$\begin{cases} a^{-2}(a^2+ab)^2=9 \\ (a^2-b^2)(a+b)^{-1}=1 \end{cases}$$

을 만족시킬 때, ab의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략 지수가 정수일 때의 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 한다.

풀이 $a^{-2}(a^2+ab)^2=9$에서

$a^{-2}\times a^2\times(a+b)^2=9$

$a^{-2+2}\times(a+b)^2=9$

$(a+b)^2=9$

이때 $a>0$, $b>0$이므로

$a+b=3$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 $(a^2-b^2)(a+b)^{-1}=1$에서

$(a-b)(a+b)\times(a+b)^{-1}=1$

$(a-b)(a+b)^{1+(-1)}=1$

$a-b=1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2$, $b=1$이므로

$ab=2$

답 ②

정답과 풀이 4쪽

[20007-0003]

유제 3 $5^{-4}\times\left(\dfrac{1}{25}\right)^{-5}\div\dfrac{1}{125^{-2}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{25}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ 1 ④ 5 ⑤ 25

[20007-0004]

유제 4 자연수 n에 대하여 $(24\times n^{-3})^{-1}$이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값을 구하시오.

3. 유리수인 지수

(1) 유리수인 지수의 정의

$a>0$이고 m은 정수, n은 2 이상의 자연수일 때, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$이다. 특히 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$이다.

설명 $a>0$이고 m, n이 정수일 때, 다음 지수법칙이 성립한다.

$(a^m)^n=a^{mn}$ …… ㉠

이때 지수가 유리수일 때도 ㉠이 성립한다고 하면 유리수 $\frac{m}{n}$ (m은 정수, n은 2 이상의 정수)에 대하여

$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$이다. 이때 $a^{\frac{m}{n}}>0$이라 하면 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이다. 그러므로 다음과 같이 정의한다.

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

참고 지수가 유리수일 때는 밑 a가 양수, 즉 $a>0$에 유의해야 한다.

예를 들어 $\sqrt[3]{-8}=-2$이지만, $(-8)^{\frac{1}{3}}$과 같은 수는 정의하지 않는다.

(2) 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

① $a^ra^s=a^{r+s}$

② $a^r\div a^s=a^{r-s}$

③ $(a^r)^s=a^{rs}$

④ $(ab)^r=a^rb^r$

설명 ① $r=\frac{m}{n}$, $s=\frac{p}{q}$ (m, p는 정수, n, q는 2 이상의 자연수)라 하면 유리수인 지수의 정의와 거듭제곱근의 성질에 의하여 다음이 성립한다.

$$a^r\times a^s=a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq}{nq}}\times a^{\frac{np}{nq}}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\times\sqrt[nq]{a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq}\times a^{np}}=\sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$
$$=a^{\frac{mq+np}{nq}}=a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{r+s}$$

예 ① $2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2^1=2$

② $2^{\frac{4}{3}}\div2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}=2^1=2$

③ $(2^{\frac{1}{3}})^3=2^{\frac{1}{3}\times3}=2^1=2$

④ $(2\times3^{\frac{1}{2}})^2=2^2\times(3^{\frac{1}{2}})^2=2^2\times3^{\frac{1}{2}\times2}=2^2\times3^1=12$

4. 실수인 지수

(1) 실수인 지수의 정의

지수가 무리수인 수, 예를 들어 $2^{\sqrt{2}}$을 살펴보자.

무리수 $\sqrt{2}$는 $\sqrt{2}=1.414213\cdots$이고, 유리수 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …를 지수로 갖는 수

2^1, $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$, $2^{1.4142}$, …

은 일정한 수에 한없이 가까워진다는 사실이 알려져 있는데 이 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$으로 정의한다. 이와 같은 방법으로 지수가 무리수인 수를 정의한다. 따라서 $a>0$일 때, 임의의 실수 x에 대하여 a^x을 정의할 수 있다.

(2) 지수가 실수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^xa^y=a^{x+y}$

② $a^x\div a^y=a^{x-y}$

③ $(a^x)^y=a^{xy}$

④ $(ab)^x=a^xb^x$

예제 3 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$2\sqrt{2}$의 6제곱근 중 양의 실수인 것을 a라 할 때, $a\times 2^{-\frac{5}{4}}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

풀이 전략 $a>0$이고 n이 짝수일 때, a의 n제곱근 중 양수인 것은 $\sqrt[n]{a}$인 것을 이용하여 나타낸다.

풀이 $2\sqrt{2}$의 6제곱근 중 양의 실수인 것은 $\sqrt[6]{2\sqrt{2}}$이므로

$$\begin{aligned}a&=\sqrt[6]{2\sqrt{2}}\\&=(2\times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}}\\&=(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{6}}\\&=2^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}a\times 2^{-\frac{5}{4}}&=2^{\frac{1}{4}}\times 2^{-\frac{5}{4}}\\&=2^{\frac{1}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)}\\&=2^{-1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

답 ②

정답과 풀이 4쪽

유제 [20007-0005]

5 $\sqrt[4]{8}\div\left\{\sqrt[8]{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

유제 [20007-0006]

6 $(3^{\sqrt{3}}\div 3)^{\sqrt{3}+1}$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

5. 로그

(1) 로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x를 기호로

$\log_a N$

으로 나타낸다. 즉,

$a^x=N \iff x=\log_a N$

이때 $\log_a N$에서 a를 밑, N을 진수라 하고, $\log_a N$을 a를 밑으로 하는 N의 로그라고 한다.

참고 ① $a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다.

② $\log_a N$으로 쓸 때, 특별한 언급이 없으면 $a>0$, $a\neq1$, $N>0$임을 의미한다.

참고 $a>0$, $a\neq1$일 때, $a^0=1$, $a^1=a$이므로

$\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

예 ① $2^3=8 \iff 3=\log_2 8$

② $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2} \iff \frac{1}{2}=\log_2 \sqrt{2}$

(2) 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

② $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

③ $\log_a M^r=r\log_a M$ (단, r는 실수)

설명 $\log_a M=m$, $\log_a N=n$이라 하면

$a^m=M$, $a^n=N$

① $MN=a^m\times a^n=a^{m+n}$이므로

$\log_a MN=m+n$

$=\log_a M+\log_a N$

② $\frac{M}{N}=a^m\div a^n=a^{m-n}$이므로

$\log_a \frac{M}{N}=m-n$

$=\log_a M-\log_a N$

③ $M^r=(a^m)^r=a^{mr}$이므로

$\log_a M^r=mr$

$=r\log_a M$

예 ① $\log_2 6=\log_2 (2\times3)=\log_2 2+\log_2 3$

$=1+\log_2 3$

② $\log_2 \frac{3}{2}=\log_2 3-\log_2 2=\log_2 3-1$

③ $\log_2 16=\log_2 2^4=4\log_2 2=4$

예제 4 로그의 정의와 성질

두 실수 x, y가 $x=\log_2 3$, $2^y=24$를 만족시킬 때, $y-x$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략 로그의 정의를 이용하여 y를 나타낸 후 로그의 성질을 이용한다.

풀이 $2^y=24$에서

$y=\log_2 24$

이때

$$\begin{aligned} y-x &= \log_2 24-\log_2 3 \\ &= \log_2 \frac{24}{3} \\ &= \log_2 2^3 \\ &= 3\log_2 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이 $2^x=3$, $2^y=24$이므로

$$2^{y-x}=\frac{2^y}{2^x}=\frac{24}{3}=8=2^3$$

따라서 $y-x=3$

정답과 풀이 4쪽

[20007-0007]

유제 7 1이 아닌 두 양의 실수 x, y가 $\log_2 x=\frac{1}{3}$, $\log_x y=2$를 만족시킬 때, xy의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[20007-0008]

유제 8 $\log_2(\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4})+\log_2\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$의 값은?

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

(3) 로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

설명 $\log_a b=x$, $\log_c a=y$로 놓으면

$a^x=b$, $c^y=a$

이므로 지수법칙에 의하여

$b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$

이다. 그러므로

$xy=\log_c b$

$\log_a b\times\log_c a=\log_c b$ …… ㉠

$a\neq1$에서 $\log_c a\neq0$이므로 ㉠의 양변을 $\log_c a$로 나누면

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

예 ① $\log_2 3=\dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

② $\log_8 2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 8}=\dfrac{1}{\log_2 2^3}=\dfrac{1}{3\log_2 2}=\dfrac{1}{3}$

(4) 로그의 밑의 변환의 활용

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수이고 $m\neq0$)

④ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

설명 ① $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a b\times\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=\log_a c$

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{\log_a b^n}{\log_a a^m}=\dfrac{n\log_a b}{m\log_a a}=\dfrac{n}{m}\log_a b$

④ $c\neq1$일 때, $a=c^x$이라 하면 $x=\log_c a$이므로

$$a^{\log_b c}=(c^{\log_c a})^{\log_b c}=c^{\log_c a\times\log_b c}=c^{\log_c a\times\frac{\log_c c}{\log_c b}}=c^{\frac{\log_c a}{\log_c b}}=c^{\log_b a}$$

$c=1$일 때, 위의 식은 성립한다.

예 ① $\log_2 3=\dfrac{\log_3 3}{\log_3 2}=\dfrac{1}{\log_3 2}$

② $\log_8 16=\log_{2^3} 2^4=\dfrac{4}{3}\log_2 2=\dfrac{4}{3}$

예제 5 로그의 밑의 변환

1보다 큰 세 실수 a, b, c에 대하여

$$\log_a b : \log_{bc} ac = 2\log_a bc : 5$$

일 때, $\frac{5}{2}\log_a b - \log_a c$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

풀이 전략 로그의 밑을 모두 a로 나타내어 식을 정리한다.

풀이 $\log_a b : \log_{bc} ac = 2\log_a bc : 5$에서

$$\log_a b : \frac{\log_a ac}{\log_a bc} = 2\log_a bc : 5$$

$$5\log_a b = 2\frac{\log_a ac}{\log_a bc} \times \log_a bc$$

$$\frac{5}{2}\log_a b = \log_a ac$$

따라서

$$\frac{5}{2}\log_a b - \log_a c = \log_a ac - \log_a c = \log_a \frac{ac}{c} = \log_a a = 1$$

답 ④

정답과 풀이 5쪽

[20007-0009]

유제 9 $\log_2 \sqrt{3} \times \log_9 16$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

[20007-0010]

유제 10 $2^{\log_4 3} = 9^a$일 때, 실수 a의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

6. 상용로그

(1) 상용로그의 뜻

밑을 10으로 하는 로그를 상용로그라고 한다. 이때 상용로그 $\log_{10} N$은 보통 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

예 ① $\log 10 = \log_{10} 10 = 1$

② $\log \frac{1}{100} = \log_{10} 10^{-2} = -2$

③ $\log \sqrt{10} = \log_{10} 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(2) 상용로그의 활용

① 상용로그의 값 구하기

(i) 상용로그표를 이용한 상용로그의 값 구하기

상용로그표에는 0.01의 간격으로 1.00부터 9.99까지의 진수에 대한 상용로그의 값이 주어져 있으므로 주어진 진수의 값에 대한 상용로그의 값은 상용로그표를 이용하여 구할 수 있다.

(ii) 일반적인 양수의 상용로그의 값 구하기

양수 N은

$$N = a \times 10^n \ (1 \le a < 10,\ n\text{은 정수})$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

그러므로 N의 상용로그의 값은 (i)을 이용하여

$$\log N = \log (a \times 10^n) = n + \log a$$

로 구한다.

② 상용로그의 활용

상용로그를 이용하면 2^{30}, $\sqrt[3]{2}$ 등과 같은 수를 10진법으로 나타내어 어림한 값을 구할 수 있다.

예 2^{30}의 어림한 값을 구하면 다음과 같다.

(i) 상용로그 $\log 2^{30}$의 값 구하기

상용로그표에서 $\log 2 = 0.3010$이므로

$$\log 2^{30} = 30 \log 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03 = 9 + 0.03$$

(ii) 상용로그의 값으로부터 진수 구하기

상용로그표를 이용하여 $\log 1.07 = 0.03$으로 계산하면

$$9 + 0.03 = \log 10^9 + \log 1.07$$
$$= \log (1.07 \times 10^9)$$

(iii) 어림한 값 구하기

(i), (ii)에서 $\log 2^{30} = \log (1.07 \times 10^9)$이므로

$$\log 2^{30} - \log (1.07 \times 10^9) = 0,\ \log \frac{2^{30}}{1.07 \times 10^9} = 0,\ \frac{2^{30}}{1.07 \times 10^9} = 1$$

따라서 $2^{30} = 1.07 \times 10^9$

예제 6 상용로그

$\log \sqrt[5]{500}$의 값은? (단, $\log 2=0.3010$으로 계산한다.)

① 0.5248　② 0.5298　③ 0.5348　④ 0.5398　⑤ 0.5448

풀이 전략 상용로그의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 계산한다.

풀이 $\log \sqrt[5]{500}$

$=\log 500^{\frac{1}{5}}$

$=\frac{1}{5}\log 500$

$=\frac{1}{5}\log \frac{1000}{2}$

$=\frac{1}{5}(\log 10^3-\log 2)$

$=\frac{1}{5}(3-0.3010)$

$=\frac{1}{5}\times 2.6990$

$=0.5398$

답 ④

정답과 풀이 5쪽

[20007-0011]

유제 11 양수 $N=a\times 10^n$ (a는 10보다 작은 자연수, n은 정수)에 대하여 $\log N=-2.5229$일 때, $a+n$의 값은? (단, $\log 3=0.4771$로 계산한다.)

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

[20007-0012]

유제 12 두 자연수 a, b에 대하여 $\log a+\log b=3+\log 2$를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

Level 1 기초 연습

[20007-0013]

1 $(\sqrt{3}+1)^5\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)^{-5}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

[20007-0014]

2 $\sqrt[3]{2}\times16^{\frac{1}{6}}$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

[20007-0015]

3 양의 실수 a에 대하여 $a^4=4^{\frac{1}{3}}$일 때, $a\div\sqrt[6]{2^7}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

[20007-0016]

4 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{54}=2^{\frac{q}{p}}$일 때, $p+q$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

[20007-0017]

5 $\left(2^{\frac{4}{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3=a\times\left(2^{\frac{4}{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)+b$를 만족시키는 두 유리수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

[20007-0018]

6 $\log_x(2x+3)=2$를 만족시키는 1이 아닌 양의 실수 x의 값을 구하시오.

[20007-0019]

7 $\log_5 \sqrt[3]{100}+\frac{1}{3}\log_5 \frac{5}{4}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[20007-0020]

8 $\log_2(\sqrt[3]{9}-1)+\log_2(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{9}+1)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[20007-0021]

9 $\log_2 12-\frac{1}{\log_3 2}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[20007-0022]

10 $\log_{1000}\frac{1}{2}+\log\sqrt[3]{200}$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② 1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

Level 2 기본 연습

[20007-0023]

1 2 이상의 자연수 n에 대하여 허수 $1+i$가 정수 k의 n제곱근이 되도록 하는 n의 최솟값을 p라 하고, $n=p$일 때의 k의 값을 q라 하자. $p+q$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

[20007-0024]

2 두 실수 a, b가

$$(a+b)^{-1}=\frac{1}{2},\ a^{-1}+b^{-1}=-\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, a^3+b^3의 값은? (단, $a\neq0$, $b\neq0$, $a+b\neq0$)

① 31 ② 32 ③ 33 ④ 34 ⑤ 35

[20007-0025]

3 x에 대한 이차방정식 $\sqrt[3]{3}x^2-\sqrt[4]{k}x+\sqrt[3]{9}=0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 최솟값은?

① 140 ② 145 ③ 150 ④ 155 ⑤ 160

[20007-0026]

4 정의역이 $\{x\,|\,x>1\}$인 함수 $f(x)=(x\sqrt[3]{x})^{\frac{1}{2}}$이 있다. 1보다 큰 자연수 a에 대하여 $(f\circ f)(a)$의 값이 자연수일 때, $(f\circ f)(a)$의 최솟값은?

① 4 ② 8 ③ 9 ④ 16 ⑤ 27

[20007-0027]

5 두 양의 실수 a, b에 대하여 두 집합 A, B가

$$A=\{1,\ \log_2 ab\},\ B=\{2,\ \log_2 a,\ \log_2 \sqrt{b^3}\}$$

이고 $A-B=\{3\}$일 때, $\log_2 \frac{a}{b}$의 값은?

① $\frac{2}{3}$　② 1　③ $\frac{4}{3}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ 2

[20007-0028]

6 $\log_3 \sqrt[3]{24}+\log_3 \frac{\sqrt[6]{81^k}}{2}$이 자연수가 되도록 하는 10 이하의 자연수 k의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

[20007-0029]

7 1보다 큰 세 실수 a, b, c가

$$\log_a b=\frac{\log_b c}{2}=\frac{\log_c a}{3}$$

를 만족시킬 때, $\log_a b\div\log_a c$의 값은?

① $\frac{\sqrt[3]{6}}{3}$　② $\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$　③ $\sqrt[3]{6}$　④ $2\sqrt[3]{6}$　⑤ $3\sqrt[3]{6}$

[20007-0030]

8 두 양의 실수 a, b에 대하여 좌표평면에서 두 점 $(0,\ \log a)$, $(1,\ \log b)$를 지나는 직선이 점 $(2,\ 3)$을 지날 때, $\frac{b^2}{2a}$의 값을 구하시오.

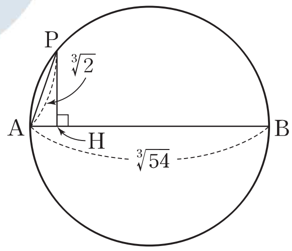
[20007-0031]

1 자연수 n이 $2\le n\le 10$일 때, $n^2-10n+21$의 n제곱근 중에 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

[20007-0032]

2 그림과 같이 길이가 $\sqrt[3]{54}$인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt[3]{2}$이다. 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 PAH의 넓이는 $2^{\frac{q}{p}}\times 3^r$이다. $p+q+r$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, r는 정수이다.)



[20007-0033]

3 $\log_2 n$이 자연수가 되도록 하는 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 양수 a의 개수를 $f(n)$이라 하자.

(가) $\log_2 a$는 정수이다.
(나) $\log_a n\times\log_n(n\times a^2)$은 자연수이다.

$f(n)=7$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 k라 할 때, $\log_4 k$의 값을 구하시오. (단, $a\ne 1$)

[20007-0034]

4 두 집합 $A=\{x\mid \log_2 x$는 자연수$\}$, $B=\{x\mid \log_p x$는 자연수$\}$가 다음 조건을 만족시킬 때, p의 값을 구하시오. (단, p는 1이 아닌 양의 실수이다.)

(가) $A\cap B=B$
(나) $a\in A$, $b\in B$, $2\le a\le 10$, $1\le b\le 1000$이고, $\log_a b$가 자연수가 되도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 7이다.

대표 기출 문제

출제 경향 로그의 정의와 성질을 이용하여 간단한 계산 문제, 로그의 성질을 활용하여 식의 관계성 등을 파악하는 이해 문제 등이 출제된다.

2 이상의 자연수 n에 대하여 $5\log_n 2$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 34 ② 38 ③ 42 ④ 46 ⑤ 50

2019학년도 대수능

출제 의도 ▸ 로그의 성질과 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수 n의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 로그의 밑을 변환하면

$$5\log_n 2=5\times\frac{\log_2 2}{\log_2 n}$$
$$=5\times\frac{1}{\log_2 n}$$

이 수가 자연수이어야 하므로 $\log_2 n$은 5의 양의 약수이어야 한다.

그러므로

$\log_2 n=1$ 또는 $\log_2 n=5$

$n=2^1$ 또는 $n=2^5$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+32=34$

답 ①