제 2 교시

수학 영역(나형)

5지선다형

1. $2^2 \times 8^{-\frac{2}{3}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

해설 : $2^2 \times 8^{-\frac{2}{3}} = 2^2 \times (2^3)^{-\frac{2}{3}} = 2^2 \times 2^{-2} = 2^{2-2} = 2^0 = 1$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n + 3 \times 2^n}{4^n + 5}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

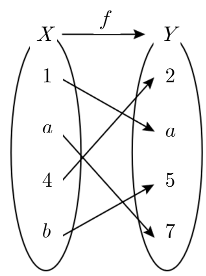
해설 : $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n + 3 \times 2^n}{4^n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1 + 3 \times 0}{1 + 5 \times 0} = 1$

3. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 $n(A \cup B)$의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설 : $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로 $n(A \cup B) = 8$이다.

4. 그림은 함수 $f : X \to Y$를 나타낸 것이다.



$f^{-1}(5) = 6$이고 $a + b = 9$일 때, $f^{-1}(7)$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설 :
$f^{-1}(5) = 6$이면 $f(6) = 5$이므로 $b = 6$이다.
$a + b = 9$이므로 $a = 3$이다.
$f^{-1}(7) = k$라 할 때, $f(k) = 7$이고
정의역 X의 원소 $a(=3)$가 공역 Y의 원소 7에 대응되므로
$k = 3$이다.
$\therefore f^{-1}(7) = 3$

5. 두 사건 A, B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{10},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{60}$ ② $\frac{1}{30}$ ③ $\frac{1}{20}$ ④ $\frac{1}{15}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

해설 :
확률의 덧셈정리에 의하여
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로
$\frac{2}{5}=\frac{1}{10}+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이다. ⋯ ①
두 사건 A와 B가 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이고,
따라서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}\mathrm{P}(B)$이다. ⋯ ②
②를 ①에 대입하면 $\frac{2}{5}=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\mathrm{P}(B)$, 즉 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$이므로
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$이다.

6. 실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

$p : |x|=a$,
$q : -3<x\le 3$

p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설 :
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
p가 q이기 위한 충분조건이므로 $p\Rightarrow q$, 즉 $P\subset Q$이다.
조건 p에서 주어진 일차방정식의 해집합은 $P=\{-a, a\}$이다.
$-a\in Q$이므로 $-3<-a\le 3$ 즉, $-3\le a<3$이고
a는 자연수이므로 $a=1$ 또는 $a=2$이다.
$a\in Q$이므로 $-3<a\le 3$이고 a는 자연수이므로
$a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$이다.
자연수 a는 $a=1$ 또는 $a=2$ 즉, 자연수 a의 개수는 2이다.

7. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$과 수열 $\{b_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n}-\frac{b_n}{a_n}\right)=3$$

을 만족시킨다. 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n\le a_nc_n\le 2a_n$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}c_n$의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설 :
주어진 급수가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}-\frac{b_n}{a_n}\right)=0$이다.
$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$이므로
$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}-\frac{b_n}{a_n}\right)$
$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{n}-\frac{2n+1}{n}+\frac{b_n}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=2-0=2$이다.
주어진 부등식의 각 변을 a_n으로 나누면 $\frac{b_n}{a_n}\le c_n\le 2$이고
$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}2=2$이므로 샌드위치 정리에 의하여
$\lim_{n\to\infty}c_n=2$이다.

8. $\int_{-1}^{0} 4x(x^2-1)dx$의 값은? [3점]

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설 :

$\int_{-1}^{0} 4x(x^2-1)dx = \int_{-1}^{0}(4x^3-4x)dx = [x^4-2x^2]_{-1}^{0} = 1$

9. 어느 피아니스트의 연주회에 참석한 청중 300명을 대상으로 성별과 관람 위치를 조사한 결과는 다음과 같다.

(단위 : 명)

관람 위치 \ 성별	남성	여성	합계
1층	140	70	210
2층	40	50	90
합계	180	120	300

이 연주회에 참석한 청중 300명 중에서 임의로 선택한 1명이 남성이었을 때, 이 남성이 2층에서 연주를 관람하였을 확률은? [3점]

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{4}{9}$　④ $\frac{5}{9}$　⑤ $\frac{2}{3}$

해설 :

이 연주회에 참석한 청중 중에서 선택된 한 청중이 2층에서 연주를 관람할 사건을 A, 남성일 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{40}{180} = \frac{2}{9}$이다.

10. 유리함수 $y=\frac{3x+2}{x-a}$의 그래프는 함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 것이다. $k+a+b$의 값은? (단, a, k, b는 상수이다.) [3점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설 :

$\frac{3x+2}{x-a} = 3 + \frac{3a+2}{x-a}$이므로 함수 $y=\frac{3a+2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시키면 함수 $y=\frac{3x+2}{x-a}$의 그래프와 일치한다.

$\therefore\ a=1,\ b=3$

$\therefore\ k=3a+2=5$

$\therefore\ k+a+b=5+1+3=9$

11. 모든 항이 0이 아닌 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n - \frac{1}{a_{n+1}} = n$$

이고 $a_3 a_4 = 10$일 때, a_1의 값은? [3점]

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{17}{21}$ ③ $\frac{23}{21}$ ④ $\frac{27}{23}$ ⑤ $\frac{33}{23}$

해설 :

$n=1$일 때, $a_1 - \frac{1}{a_2} = 1$

$n=2$일 때, $a_2 - \frac{1}{a_3} = 2$

$n=3$일 때, $a_3 - \frac{1}{a_4} = 3$

$a_3 a_4 = 10$에서 $a_4 = \frac{10}{a_3}$이고 이를 등식 $a_3 - \frac{1}{a_4} = 3$에 대입하여 정리하면 $a_3 = \frac{10}{3}$이다.

이를 등식 $a_2 - \frac{1}{a_3} = 2$에 대입하여 정리하면 $a_2 = \frac{23}{10}$이다.

이를 등식 $a_1 - \frac{1}{a_2} = 1$에 대입하여 정리하면 $a_1 = \frac{33}{23}$이다.

12. 함수 $f(x) = 2\sqrt{x}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x) \le y \le f(x)$인 두 자연수 x, y의 모든 순서쌍 (x, y)의 개수는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설 :

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점을 찾기 위해

방정식 $2\sqrt{x} = x$에서 양변을 제곱하면 $4x = x^2$ 즉, $x=0$ 또는 $x=4$이다.

함수 $f(x)$는 증가함수이므로 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $g(x)$의 그래프는 두 점 $(0, 0)$, $(4, 4)$에서 만난다.

$\therefore\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4$

$f(1) = 2$이므로 $(1, 1)$, $(1, 2)$는 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

또한 $g(2) = 1$이다.

$f(2) = 2\sqrt{2}$이고 $2 < 2\sqrt{2} < 3$이므로

$(2, 1)$, $(2, 2)$는 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

$f(3) = 2\sqrt{3}$이고 $3 < 2\sqrt{3} < 4$

$g(3) = a$라 하면 $f(a) = 3$ 즉, $2\sqrt{a} = 3$이므로 $a = \frac{9}{4}$이다.

$g(3) = \frac{9}{4}$이고 $2 < \frac{9}{4} < 3$이므로

$(3, 3)$은 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

$f(4) = g(4) = 4$이므로

$(4, 4)$는 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

따라서 문제에서 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y)은

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$

따라서 문제에서 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y)의 개수는 6

13. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x & (x \le 2) \\ \dfrac{1}{x-2} & (x > 2) \end{cases},\quad g(x)=(x-2)^n$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설 :

함수 $f(x)g(x)$는

$$f(x)g(x)=\begin{cases} x(x-2)^n & (x \le 2) \\ (x-2)^{n-1} & (x > 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되기 위해서는

함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이어야 한다.

그러므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$ 즉, $\lim_{x\to 2-} x(x-2)^n = \lim_{x\to 2+}(x-2)^{n-1}=0$

이때 $n=1$이라면

$\lim_{x\to 2+}(x-2)^{n-1}=\lim_{x\to 2+}1=1$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 $n\ge 2$이고 자연수 n의 최솟값은 2이다.

14. 1이 아닌 세 자연수 a, b, c에 대하여

$$\log_a b=\log_b c^2=\log_c a^4$$

일 때, a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]

① $a<b<c$ ② $a=b<c$ ③ $a<b=c$
④ $b<a<c$ ⑤ $c<b<a$

해설 :

주어진 등식을 t라 하면 $\log_a b=t$이다.

$\dfrac{\log b}{\log a}=t$ 즉, $\log b=t\log a$이고 ⋯ ①

$\log_b c^2=t$에서 $2\log_b c=t$이므로

$\dfrac{2\log c}{\log b}=t$ 즉, $2\log c=t\log b$이다. ⋯ ②

$\log_c a^4=t$에서 $4\log_c a=t$이므로

$\dfrac{4\log a}{\log c}=t$ 즉, $4\log a=t\log c$이다.⋯ ③

①을 ②에 대입하면

$2\log c=t^2\log a$ 즉, $\log c=\dfrac{t^2}{2}\log a$이고 ⋯ ④

④를 ③에 대입하면 $4\log a=\dfrac{t^3}{2}\log a$이다.

a는 1이 아니므로 $\log a$는 0이 아니다.

∴ $t^3=8$ 즉, $t=2$

∴ $\log b=2\log a$, $\log c=\log b$

∴ $a<b=c$

15. 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{12}(-1)^n \times a_n = 18, \quad \sum_{n=1}^{14}(-1)^n \times (a_n)^2 = 273$$

을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설 :
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
일반항 a_n은 $a_n = a_1 + (n-1)d \ (n \geq 1)$이다.

$\sum_{n=1}^{12}(-1)^n \times a_n$
$= -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_{11} + a_{12}$
$= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{12} - a_{11})$
$= 6d = 18$ 즉, $d = 3$이다.

$\sum_{n=1}^{14}(-1)^n \times (a_n)^2$
$= -(a_1)^2 + (a_2)^2 - (a_3)^2 + \cdots + (a_{14})^2$
$= \{(a_2)^2 - (a_1)^2\} + \{(a_4)^2 - (a_3)^2\} + \cdots + \{(a_{14})^2 - (a_{13})^2\}$
$= (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) + (a_4 - a_3)(a_4 + a_3) + \cdots + (a_{14} - a_{13})(a_{14} + a_{13})$
$= d(a_1 + a_2) + d(a_3 + a_4) + \cdots + d(a_{13} + a_{14})$
$= d(a_1 + a_2 + \cdots + a_{12} + a_{13} + a_{14})$
$= d \times \frac{a_1 + a_{14}}{2} \times 14$
$= 21(a_1 + a_{14})$
$= 21(2a + 13d)$
$= 21(2a + 39) = 273$
위 등식을 정리하면 $a = -13$이다.
$\therefore\ a_n = -13 + 3(n-1)$, 즉 $a_n = 3n - 16$이고 $a_{10} = 14$이다.

16. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(h)-1}{h} = \lim_{x \to 4}\frac{f(x)-f(0)}{x-4} = 0$$

을 만족시킬 때, 구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은? [4점]

① 2 ② 5 ③ 10 ④ 17 ⑤ 26

해설 :
$\lim_{h \to 0}\{f(h) - 1\} = \lim_{h \to 0}\frac{f(h)-1}{h} \times h = 0 \times 0 = 0$이므로
$\lim_{h \to 0}\{f(h) - 1\} = f(0) - 1 = 0$ 즉, $f(0) = 1$이다.
미분계수의 정의에 의하여
$\lim_{h \to 0}\frac{f(h)-1}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = f'(0) = 0$이고
같은 방법으로 $f(4) = f(0) = 1$, $f'(4) = 0$이다.
따라서 사차함수 $f(x)$는
$f(x) - 1 = x^2(x-4)^2$ 즉, $f(x) = x^2(x-4)^2 + 1$이다.
함수 $f(x)$의 도함수는
$f'(x) = 2x \times (x-4)^2 + x^2 \times 2(x-4) = 4x(x-2)(x-4)$이고
방정식 $f'(x) = 0$의 실근이 $x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 4$이며
$x = 2$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로
함수 $f(x)$는 $x = 2$에서 극댓값 $f(2) = 17$을 갖는다.
$f(-1) = 26$, $f(4) = 1$이므로 구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 26이다.

17. 자연수 k에 대하여 확률변수 X가 가지는 값이 k 이하의 자연수이고,

$$\mathrm{P}(X=n)=\frac{a}{n(n+1)}\quad(1\le n\le k)$$

를 만족시킨다. $\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)=8$일 때, 상수 k의 값은? (단, n은 자연수이고, a는 상수이다.) [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설 :

$\sum_{n=1}^{k}\mathrm{P}(X=n)=\sum_{n=1}^{k}\frac{a}{n(n+1)}=a\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{ak}{k+1}=1$이다.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)&=\sum_{n=1}^{k}n^2\times\frac{a}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{k}n\times\frac{a}{n(n+1)}\\&=\sum_{n=1}^{k}\frac{an}{n+1}+\sum_{n=1}^{k}\frac{a}{n+1}\\&=\sum_{n=1}^{k}\frac{a(n+1)}{n+1}=\sum_{n=1}^{k}a=ak=8\end{aligned}$$

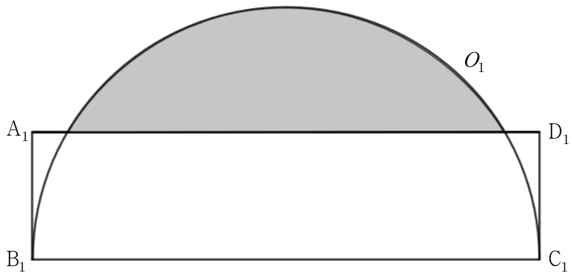
이므로 위 식에 대입하면 $k=7$이다.

18. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=1$, $\overline{\mathrm{B_1C_1}}=4$인 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$와 선분 $\mathrm{B_1C_1}$을 지름으로 하는 반원 $\mathrm{O_1}$이 있다. 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 외부와 반원 $\mathrm{O_1}$의 내부의 공통부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

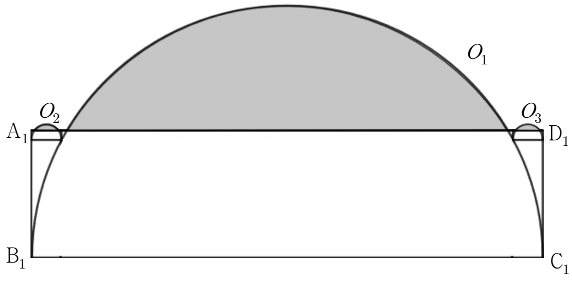
그림 R_1에서 선분 $\mathrm{A_1D_1}$과 호 $\mathrm{B_1C_1}$의 두 교점 중 점 $\mathrm{A_1}$와 가까운 점을 $\mathrm{E_1}$, 점 $\mathrm{D_1}$와 가까운 점을 $\mathrm{E_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{A_1B_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 호 $\mathrm{B_1E_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$, 선분 $\mathrm{A_1E_1}$ 위의 점 $\mathrm{D_2}$와 점 $\mathrm{A_1}$을 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{A_1B_2}}:\overline{\mathrm{B_2C_2}}=1:4$인 직사각형 $\mathrm{A_1B_2C_2D_2}$와 선분 $\mathrm{B_2C_2}$를 지름으로 하는 반원 $\mathrm{O_2}$를 그리고 선분 $\mathrm{E_2D_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_3}$, 호 $\mathrm{C_1E_2}$ 위의 점 $\mathrm{B_3}$, 선분 $\mathrm{C_1D_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_3}$와 점 $\mathrm{D_1}$을 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{A_3B_3}}:\overline{\mathrm{B_3C_3}}=1:4$인 직사각형 $\mathrm{A_3B_3C_3D_1}$와 선분 $\mathrm{B_3C_3}$을 지름으로 하는 반원 $\mathrm{O_3}$을 그린 후 직사각형 $\mathrm{A_1B_2C_2D_2}$의 외부와 반원 $\mathrm{O_2}$의 내부의 공통부분, 직사각형 $\mathrm{A_3B_3C_3D_1}$의 외부와 반원 $\mathrm{O_3}$의 내부의 공통부분을 각각 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에서 직사각형 $\mathrm{A_1B_2C_2D_2}$와 직사각형 $\mathrm{A_3B_3C_3D_1}$에 그림 R_1에서 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형과 반원을 각각 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

⋮

① $\frac{289}{864}(4\pi-3\sqrt{3})$ ② $\frac{289}{861}(4\pi-3\sqrt{3})$ ③ $\frac{256}{765}(4\pi-3\sqrt{3})$ ④ $\frac{289}{287}(\pi-\sqrt{3})$ ⑤ $\frac{289}{255}(\pi-\sqrt{3})$

19. 1부터 7까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 카드 7장이 있다. 이 중에서 2장을 뽑아 카드에 적힌 두 수 중에 작은 수를 a, 큰 수를 b라 하자. 정규분포 $\mathrm{N}(4,\ 2^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{P}(a \le X \le b) < 0.6$일 때, $a+b>8$일 확률은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332

① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

해설 :

• $0 < \mathrm{P}(a \le X \le b) < 0.5$인 경우

$1 \le a < b < 4$인 경우와 $4 < a < b \le 7$인 경우가 있다.

1) $1 \le a < b \le 4$

위의 범위에 속하는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 4)$

각각의 순서쌍에 대하여 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$을 구하면

$\mathrm{P}(1 \le X \le 2) = \mathrm{P}\left(-\frac{3}{2} \le Z \le -1\right) = \mathrm{P}\left(1 \le Z \le \frac{3}{2}\right) = 0.0919$

$\mathrm{P}(1 \le X \le 3) = \mathrm{P}\left(-\frac{3}{2} \le Z \le -\frac{1}{2}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le Z \le \frac{3}{2}\right) = 0.2417$

$\mathrm{P}(1 \le X \le 4) = \mathrm{P}\left(-\frac{3}{2} \le Z \le 0\right) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{3}{2}\right) = 0.4332$

$\mathrm{P}(2 \le X \le 3) = \mathrm{P}\left(-1 \le Z \le -\frac{1}{2}\right) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \le Z \le 1\right) = 0.1498$

$\mathrm{P}(2 \le X \le 4) = \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0) = \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) = 0.3413$

$\mathrm{P}(3 \le X \le 4) = \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2} \le Z \le 0\right) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{1}{2}\right) = 0.1915$

따라서 모든 순서쌍 $(a,\ b)$가 $\mathrm{P}(a \le X \le b) \le 0.6$을 만족시킨다.

이 중에서 $a+b>8$인 순서쌍 $(a,\ b)$는 없다.

2) $4 \le a < b \le 7$

조건을 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(4,\ 5)$, $(4,\ 6)$, $(4,\ 7)$, $(5,\ 6)$, $(5,\ 7)$, $(6,\ 7)$

각각의 순서쌍에 대하여 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$을 구하면

$\mathrm{P}(4 \le X \le 5) = \mathrm{P}(3 \le X \le 4)$

$\mathrm{P}(4 \le X \le 6) = \mathrm{P}(2 \le X \le 4)$

$\mathrm{P}(4 \le X \le 7) = \mathrm{P}(1 \le X \le 4)$

$\mathrm{P}(5 \le X \le 6) = \mathrm{P}(2 \le X \le 3)$

$\mathrm{P}(5 \le X \le 7) = \mathrm{P}(1 \le X \le 3)$

$\mathrm{P}(6 \le \mathrm{X} \le 7) = \mathrm{P}(1 \le X \le 2)$

1의 경우와 같으므로 모든 순서쌍 $(a,\ b)$가 $\mathrm{P}(a \le X \le b) \le 0.6$을 만족시킨다.

또한 모든 순서쌍 $(a,\ b)$가 $a+b>8$을 만족시킨다.

• $0.5 < \mathrm{P}(a \le X \le b) < 0.6$인 경우

$1 \le a < 4 < b \le 7$이므로 주어진 조건을 만족하는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 5)$, $(1,\ 6)$, $(1,\ 7)$, $(2,\ 5)$, $(2,\ 6)$, $(2,\ 7)$, $(3,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $(3,\ 7)$

각각의 순서쌍에 대하여 $\mathrm{P}(a \le X \le b)$을 구하면

$\mathrm{P}(1 \le X \le 5) = \mathrm{P}\left(-\frac{3}{2} \le Z \le \frac{1}{2}\right) = 0.6247 > 0.6$

$\mathrm{P}(1 \le X \le 6) = \mathrm{P}\left(-\frac{3}{2} \le Z \le 1\right) = 0.7745 > 0.6$

$\mathrm{P}(1 \le X \le 7) = \mathrm{P}\left(-\frac{3}{2} \le Z \le \frac{3}{2}\right) = 0.8664 > 0.6$

$\mathrm{P}(2 \le X \le 5) = \mathrm{P}\left(-1 \le Z \le \frac{1}{2}\right) = 0.5328$

$\mathrm{P}(2 \le X \le 6) = \mathrm{P}(-1 \le Z \le 1) = 0.6826 > 0.6$

$\mathrm{P}(2 \le X \le 7) = \mathrm{P}\left(-1 \le Z \le \frac{3}{2}\right) = 0.6247 > 0.6$

$\mathrm{P}(3 \le X \le 5) = \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2} \le Z \le \frac{1}{2}\right) = 0.3830$

$\mathrm{P}(3 \le X \le 6) = \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2} \le Z \le 1\right) = 0.5328$

$\mathrm{P}(3 \le X \le 7) = \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2} \le Z \le \frac{3}{2}\right) = 0.6247 > 0.6$

$\mathrm{P}(a \le X \le b) < 0.6$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 5)$, $(3,\ 5)$, $(3,\ 6)$

이 중에서 $a+b>8$인 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 6)$

순서쌍 $(a,\ b)$가 $\mathrm{P}(a \le X \le b) < 0.6$을 만족시킬 사건을 A, $a+b>8$을 만족시킬 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{6+1}{6+6+3} = \frac{7}{15}$

20. 집합 $S=\{2, 3, 4, \ldots, 14\}$의 부분집합 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(A) 집합 A의 모든 원소의 합은 짝수이다.
(B) 집합 A의 모든 원소의 곱은 4의 배수이다.

다음은 집합 A의 개수를 구하는 과정이다.

조건 (A)에서 집합 A의 원소 중 홀수의 개수는 0이거나 짝수이다. 집합 S의 원소 중 홀수의 개수는 6이므로 이 중에서 홀수를 뽑지 않거나 짝수 개를 뽑는 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.

조건 (B)에서 집합 A의 원소 중 짝수만 고려하면, '(i) 4의 배수가 1개 이상인 경우', '(ii) 4의 배수는 없으나 2의 배수가 2개 이상인 경우'가 있다.

(i)의 경우 :
집합 S의 원소 중 짝수의 개수는 7이고 이 중에서 4의 배수는 3개다. 따라서 홀수는 포함하지 않고 4의 배수를 한 개 이상 포함하는 집합의 개수는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

(ii)의 경우:
집합 S의 원소 중 짝수의 개수는 7이고 이 중에서 4의 배수는 아니지만 2의 배수인 수는 4개다. 따라서 홀수와 4의 배수를 포함하지 않지만 2의 배수를 2개 이상 포함하는 집합의 개수는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

따라서 두 조건 (A), (B)를 만족시키는 집합 A의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}\times(\boxed{\text{(나)}}+\boxed{\text{(다)}})$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

① 151 ② 152 ③ 153 ④ 154 ⑤ 155

해설 :

서로 다른 6개의 홀수 중 0개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_0$이다.
서로 다른 6개의 홀수 중 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2$이다.
서로 다른 6개의 홀수 중 4개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_4$이다.
서로 다른 6개의 홀수 중 6개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_6$이다.
따라서 (가)$=\frac{1}{2}(1+1)^6=2^5$이다.

홀수를 포함하지 않고 4의 배수를 한 개 이상 포함하는 집합의 개수는 모든 원소가 짝수인 집합의 개수에서 모든 원소가 4의 배수가 아니지만 2의 배수인 집합의 개수를 뺀 것과 같다.
따라서 (나)$=2^7-2^4$이다.

서로 다른 4개의 4의 배수는 아니지만 2의 배수인 수 중 2개를 뽑는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2$이다.
서로 다른 4개의 4의 배수는 아니지만 2의 배수인 수 중 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3$이다.
서로 다른 4개의 4의 배수는 아니지만 2의 배수인 수 중 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_4$이다.
따라서 (다)$={}_4\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_4$이다.

21. 꼭짓점의 x좌표가 m인 이차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x \ge a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $(h \circ h)(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고, 그 근을 작은 수부터 크기 순으로 나열하면 m, a, 6이다.
>
> (나) 함수 $(h \circ h)(x)$는 $x=2\sqrt{5}$에서만 불연속이다.

구간 $[a, \infty)$에서 함수 $(h \circ h)(x)$의 최솟값은 -12일 때, $\frac{ma}{h(h(2))}$의 값은? (단, a와 m은 상수이다.) [4점]

① -16 ② -14 ③ -12 ④ -10 ⑤ -8

해설 :

함수 $(h \circ h)(x)$와 함수 $y=x$의 교점의 x좌표는 방정식 $h(x)=x$의 해인 경우와 해가 아닌 경우가 있다. 만약 그 해가 방정식 $h(x)=x$가 아니라면 반드시 한 쌍이 해가 된다. 예를 들어 $x=a$가 방정식 $h(h(x))=x$의 해라면 $h(a)=b$인 실수 b도 방정식 $h(h(x))=x$의 해가 된다. 그러므로 방정식 $(h \circ h)(x)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 될 경우는 방정식 $h(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 경우와 방정식 $h(x)=x$이 하나의 실근을 가지고 방정식 $h(x)=x$의 실근이 아니지만 방정식 $h(h(x))=x$의 실근인 두 개의 실수가 존재하는 경우가 있다.

(1) 방정식 $h(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이고 그 실근들이 모두 방정식 $h(h(x))=x$의 실근인 경우

조건 (가)에 의하여 $h(x)=x$의 서로 다른 실근은 m, a, 6이다.

$h(a)=a$이므로 $g(a)=a$이다. 함수 $(h \circ h)(x)$가 불연속인 점이 존재하기 위해서는 함수 $h(x)$가 적어도 한 점에서 불연속이어야 하므로 $x=a$에서 불연속이다. 즉, $f(a) \neq a$이다.

$h(m)=m$이므로 $f(m)=m$이고 함수 $f(x)$는 (m, m)을 꼭짓점으로 하는 이차함수이다. 그리고 $x=m$ 이외의 함수 $f(x)$와 $y=x$의 교점이 없어야 하므로 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.

하지만 이 경우에 함수 $h(h(x))$는 $x=a$와 $f(b)=a$인 b에 대하여 $x=b$에서 불연속이므로 조건 (나)에 모순이다.

(2) 방정식 $h(x)=x$이 하나의 실근을 가지고 방정식 $(h \circ h)(x)=x$가 방정식 $h(x)=x$의 실근이 아닌 서로 다른 두 실근을 더 가지는 경우

(i) $h(m)=m$이고 $h(a)=6$, $h(6)=a$일 때,

함수 $h(x)$가 $x=m$에서 함수 $y=x$와 만나므로 다른 점에서는 $y=x$와 만나지 않는다. 즉, 함수 $g(x)$는 $y=x$와 만나지 않고 $x \ge a$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>x \ge a$이다.

따라서 $6=h(a)=g(a)>a$이다. $6>a$이므로 $h(6)=g(6)=a$이다.

이는 $x \ge a$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)>a$라는 것에 모순이다.

(ii) $h(m)=6$, $h(6)=m$이고 $h(a)=a$일 때,

$h(a)=g(a)=a$이고 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 이차함수이므로 $x \ge a$에서 $g(b)=b$인 실수 b가 반드시 존재한다.

이는 함수 $h(x)$가 $x=a$를 제외한 모든 실수에서 함수 $y=x$와 만나지 않는다는 것에 모순이다.

(iii) $h(m)=a$, $h(a)=m$이고 $h(6)=6$일 때,

함수 $f(x)$는 꼭짓점을 (m, a)로 하는 이차함수이다.

또 조건 (가)에 의하여 $a>m=h(a)=g(a)$이다.

만약 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이면 $x<m$에서 반드시 함수 $y=x$와 만나는 점이 생기므로 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수이다.

함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고 $f(a)=m$이므로 $f(b)=a$인 a보다 큰 실수 b가 존재한다.

한편, $\lim_{x \to b+}(h \circ h)(x)=\lim_{x \to a+}h(x)=m$이고

$\lim_{x \to b-}(h \circ h)(x)=\lim_{x \to a-}h(x)=f(a)$인데 함수 $f(x)$는 꼭짓점을 (m, a)로 하는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 $f(a)>a$이다. 그러므로 $\lim_{x \to b-}(h \circ h)(x)=f(a)>a>m=\lim_{x \to b+}(h \circ h)(x)$

이고, 즉 $x=b$에서 함수 $(h \circ h)(x)$는 반드시 불연속이다.

따라서 조건 (나)에 의하여 $b=2\sqrt{5}$이고 $h(2\sqrt{5})=g(2\sqrt{5})=a$이다.

조건 (나)에 의하여 $x=a$에서는 함수 $(h \circ h)(x)$가 연속이다.

즉, $\lim_{x \to a+}(h \circ h)(x)=\lim_{x \to m+}h(x)$(또는, $\lim_{x \to m-}h(x)$)$=a$가

$\lim_{x \to a-}(h \circ h)(x)=\lim_{x \to f(a)-}h(x)=h(f(a))=g(f(a))(\because f(a)>a)$

와 같다. 다시 쓰면, $g(f(a))=a$이다.

$x \ge a$에서 $g(x)=a$인 x는 b뿐이므로 $f(a)=b=2\sqrt{5}$이다.

즉, $f(m)=a$, $f(a)=b$, $g(a)=m$, $g(b)=a$이고 $g(6)=6$이다.

만약 함수 $g(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 a보다 작다면, 구간 $[a, \infty)$에서 함수 $h(h(x))$의 함숫값이 존재하지 않는다. (그림으로 간단히 확인할 수 있다.)

그러므로 함수 $g(x)$의 꼭짓점의 x좌표는 a보다 크고, 이때 구간 $[a, \infty)$에서 함수 $h(h(x))$의 최솟값은 함수 $g(x)$의 최솟값과 같다. 즉, 함수 $g(x)$의 꼭짓점의 y좌표는 -12이다.

함수 $g(x)$의 꼭짓점의 x좌표를 k라 할 때, $g(x)=\frac{1}{2}(x-k)^2-12$이고 $g(6)=6$이므로 $k=0$ 또는 $k=12$이다.

만약 $k=12$이면, 함수 $g(x)$의 꼭짓점은 $(12, 12)$이므로 조건 (가)에 모순이다. 그러므로 $k=0$이고 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-12$이다.

$g(b)=g(2\sqrt{5})=-2=a$이다.

$g(a)=g(-2)=-10=m$이다.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 n이라 할 때,

$f(x)=n(x-m)^2+a=n(x+10)^2-2$이다.

따라서 $h(2)=g(2)=-10$이고, $h(h(2))=h(-10)=-2$이므로

$\frac{ma}{h(h(2))}=-10$이다.

단답형

22. ${}_6\mathrm{H}_2$의 값을 구하시오. [3점]

해설 : ${}_6\mathrm{H}_2={}_{6+2-1}\mathrm{C}_2={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$

23. 함수 $f(x)=2x^3-3x^2+a$의 극솟값이 5일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

해설 ;

함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$이고

방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근은 $x=0$ 또는 $x=1$이다.

$x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f(1)=-1+a=5$, $a=6$이다.

$x=0$에서 극댓값을 가지므로 $f(0)=a=6$이다.

24. 다항식 $(a-x)(1+x)^6$의 전개식에서 x^3의 계수가 45일 때, x^4의 계수를 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

해설 :
$(1+x)^6$의 전개식에서 일반항은 ${}_6\mathrm{C}_r x^{6-r}$이다.
$r=2$일 때. x^4의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_2=15$,
$r=3$일 때, x^3의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_3=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$,
$r=4$일 때, x^2의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$이다.
따라서 주어진 다항식의 전개식에서 x^3의 계수는
$20a-15=45$ 즉, $a=3$이고
주어진 다항식의 전개식에서 x^4의 계수는 $15a-20=25$이다.

25. 자연수 8을 8의 양의 약수로만 분할하는 방법의 수를 구하시오. [3점]

해설 :
8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8이다.
$8=8$
$=4+4$
$=4+2+2$
$=4+2+1+1$
$=2+2+2+2$
$=2+2+2+1+1$
$=2+2+1+1+1+1$
$=4+1+1+1+1$
$=2+1+1+1+1+1+1+1+1$
$=1\times8$

총 10가지이다.

26. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2f'(x)}=1$$

를 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

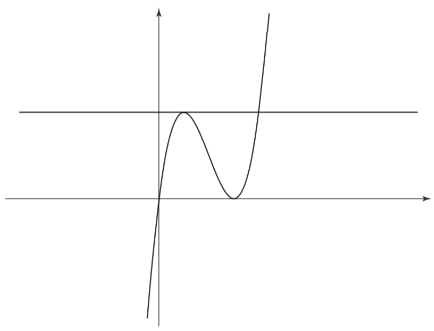
해설 :
$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$이므로 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.
$\lim_{x\to0}\dfrac{\{f(x)\}^2}{x^2f'(x)}=1$의 분모가 0으로 수렴하고 이 극한이 수렴하므로 분자도 0으로 수렴한다. 즉, $f(0)=0$이다.
따라서 함수 $f(x)=x^2+ax$이다.
이 식을 $\lim_{x\to0}\dfrac{\{f(x)\}^2}{x^2f'(x)}=1$에 대입하면 $\lim_{x\to0}\dfrac{(x+a)^2}{2x+a}=1$이므로
$a=1$이다.
그러므로 함수 $f(x)$는 x^2+x이고 $f(4)=20$이다.

27. 시각 $t=0$일 때 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도를 각각 $v_1(t)$, $v_2(t)$라 할 때,

$$v_1(t)-v_2(t)=3t^2-12t+9$$

이고, 출발한 후 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 2이다. $t=0$일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오. [4점]

해설 :
두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하면
$x_1(t)-x_2(t)=\int\{v_1(t)-v_2(t)\}dt=t^3-6t^2+9t+C$ (C는 적분상수)
출발한 후 두 점 P, Q가 만나는 횟수는
방정식 $x_1(t)-x_2(t)=0$ 즉, $t^3-6t^2+9t=-C$ $(t>0)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.
이는 함수 $y=x^3-6x^2+9x$의 그래프와 함수 $y=-C$의 그래프의 교점의 개수와 같다.
두 함수의 그래프의 교점의 개수가 2가 될 때, 두 함수의 그래프의 개형은 아래와 같다.



즉 $-C$는 함수 $y=x^3-6x^2+9x$의 극댓값과 같다.
$\therefore\ -C=1-6+9=4$ 즉, $C=-4$
$t=0$일 때 두 점 P, Q 사이의 거리는
$|x_1(0)-x_2(0)|=|C|=4$

28. 좌표평면에 네 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(3,0)$, $\mathrm{B}(3,3)$, $\mathrm{C}(0,3)$이 있다. 정사각형 OABC 위를 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

> (가) 점 A_0는 원점이다.
> (나) n이 홀수일 때, 점 A_n은 점 A_{n-1}에서 시계방향으로 점 P가 2^{n-1}만큼 이동한 위치에 있는 점이다.
> (다) n이 짝수일 때, 점 A_n은 점 A_{n-1}에서 반시계방향으로 점 P가 2^{n-1}만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 두 점 A_1, A_2의 좌표는 각각 $(0,1)$, $(1,0)$이다.
점 A_n의 x좌표와 y좌표의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{k}S_n=905$인 자연수 k의 값을 구하시오. [4점]

해설 :

점 $\mathrm{A}_0(0,0)$에서 $2^{1-1}=2^0=1$이므로 점 A_1의 좌표는 $\mathrm{A}_1(0,1)$
점 $\mathrm{A}_1(0,1)$에서 $2^{2-1}=2^1=2$이므로 점 A_2의 좌표는 $\mathrm{A}_2(1,0)$
점 $\mathrm{A}_2(1,0)$에서 $2^{3-1}=2^2=4$이므로 점 A_3의 좌표는 $\mathrm{A}_3(0,3)$
점 $\mathrm{A}_3(0,3)$에서 $2^{4-1}=2^3=8$이므로 점 A_4의 좌표는 $\mathrm{A}_4(3,2)$
점 $\mathrm{A}_4(3,2)$에서 $2^{5-1}=2^4=16=12\times1+4$이므로 점 A_5의 좌표는 $\mathrm{A}_5(1,0)$,
점 $\mathrm{A}_5(1,0)$에서 $2^{6-1}=2^5=32=12\times2+8$이므로 점 A_6의 좌표는 $\mathrm{A}_6(0,3)$,
점 $\mathrm{A}_6(0,3)$에서 $2^{7-1}=2^6=64=12\times5+4$이므로 점 A_7의 좌표는 $\mathrm{A}_7(3,2)$,
⋮
그러므로
$\mathrm{A}_1(0,1)$, $\mathrm{A}_{3k-1}(1,0)$, $\mathrm{A}_{3k}(0,3)$, $\mathrm{A}_{3k+1}(3,2)$ (단, k는 자연수)이다.
수열 S_n을 나열하면
1, 1, 3, 5, 1, 3, 5, ⋯ 이므로
$\sum_{n=1}^{k}S_n=S_1+S_2+S_3+S_4+\cdots+S_k$
$=S_1+(S_2+S_3+S_4)+\cdots+S_k$
$=1+9+9+\cdots+9+S_{k-2}+S_{k-1}+S_k$
$=905=1+9\times100+4=1+9\times100+1+3$ 이다.
따라서 $S_{k-2}=5$, $S_{k-1}=1$, $S_k=3$
9가 100번 반복해서 나타나므로 $k=1+300+2=303$이다.

29. 상수 a, b, c에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<0) \\ bx^2+c & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이다. 방정식 $(f\circ f)(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수가 2이고 그 근을 α, β라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha+\beta=-3$
(나) 두 점 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\beta))$ 사이의 거리는 $4\sqrt{2}$이다.

$14a-3b-4c$의 값을 구하시오. [4점]

해설 :
방정식 $(f\circ f)(x)=x$ 즉, $f(f(x))=x$의 한 실근을 α_1이라고 하면 $f(f(\alpha_1))=\alpha_1$이다.
이때, $f(\alpha_1)=\alpha_2$라고 하면 $f(\alpha_1)=\alpha_2$, $f(\alpha_2)=\alpha_1$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 두 점 (α_1, α_2), (α_2, α_1)을 모두 지난다.
그리고 $f(f(\alpha_2))=f(\alpha_1)=\alpha_2$이므로 $x=\alpha_2$도 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이다.
문제의 조건에서 방정식 $f(f(x))=x$의 서로 다른 두 실근이 α, β이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 두 점 (α, β), (β, α)를 모두 지난다.
$\therefore\ f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$
이때 $\alpha<\beta$라 해도 일반성을 잃지 않는다.
(나)에서, $\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2(\beta-\alpha)^2}=4\sqrt{2}$
$\therefore\ (\beta-\alpha)^2=16$, $\beta-\alpha=4$
$\therefore\ \alpha=-\dfrac{7}{2}$, $\beta=\dfrac{1}{2}$
함수 $f(x)$의 그래프가 두 점 $\left(-\dfrac{7}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{2}\right)$를 지나므로
$-\dfrac{7}{2}a=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}b+c=-\dfrac{7}{2}$
$\therefore\ a=-\dfrac{1}{7}$
임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$이므로 함수 $f(x)$는 일대일함수이다.
따라서 $b<0$, $c<0$
($\because\ c=0$이면 $x=0$도 방정식 $f(f(x))=x$의 실근)
함수 $y=-\dfrac{1}{7}x$의 역함수 $y=-7x$에 대하여 점 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{2}\right)$은 함수 $y=-7x$의 그래프와 함수 $f(x)$의 그래프의 교점이다.
즉 점 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{2}\right)$은 함수 $y=-7x$의 그래프와 함수 $y=bx^2+c$ $(x\geq 0)$의 그래프의 교점이다.

만약 점 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{2}\right)$이 아닌 다른 교점 $(\gamma, f(\gamma))$가 존재한다면 $(\gamma>0)$ $f(\gamma)=-7\gamma$, $f(f(-7\gamma))=f(\gamma)=-7\gamma$이므로 점 $(-7\gamma, \gamma)$
즉, $(f(\gamma), \gamma)$는 함수 $f(x)$의 그래프 위에 있다.
$\therefore\ f(f(\gamma))=f(-7\gamma)=\gamma$, $f(f(-7\gamma))=f(\gamma)=-7\gamma$
이므로 $x=\gamma$와 $x=-7\gamma$도 방정식 $f(f(x))=x$의 실근이다.
이는 방정식 $f(f(x))=x$의 서로 다른 실근의 개수의 개수가 2라는 조건에 모순이다.
따라서 함수 $y=-7x$의 그래프와 함수 $y=bx^2+c$ $(x\geq 0)$의 그래프의 교점의 교점은 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{2}\right)$ 뿐이다.
즉 점 $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{2}\right)$에서 함수 $y=-7x$의 그래프와 함수 $y=bx^2+c$ $(x\geq 0)$의 그래프는 접한다.
$\therefore\ \dfrac{1}{4}b+c=-\dfrac{7}{2}$, $2b\times\dfrac{1}{2}=-7$
$\therefore\ a=-\dfrac{1}{7}$, $b=-7$, $c=-\dfrac{7}{4}$

30. 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 정의된 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 연속함수 $g(x)$를

$0 \le x < 2$일 때, $g(x) = f(x)$

$2n \le x < 2n+2$일 때, $g(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n f(x-2n)$

라 하자. 모든 자연수 k에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, n은 자연수이다.)

(가) $g'(2k-1) = 0$
(나) $\int_{2k-2}^{2k} g(x)\,dx = 4 \times \int_{2k-1}^{2k+1} g(x)\,dx$

$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{2k-2}^{2k} g(x)\,dx = \frac{8}{3}$일 때, $\sum_{k=1}^{13} \int_{2k-2}^{2k} |g(x)|\,dx = p - \left(\frac{1}{2}\right)^q$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 정수이다.) [4점]

해설 ;

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 개형을 알아보자.

함수 $f(x-2n)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $2n$만큼 평행이동한 그래프이다.

함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x-2n)$의 함숫값에 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$을 곱한 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

함수 $g(x)$가 연속이 되도록 하는 사차함수 $f(x)$의 특징은 다음과 같다.

1) $f(0) = f(2) = 0$, $f(1) = f'(1) = 0$인 경우

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 $(a < 0)$

$f(x) = ax(x-1)^2(x-2)$

조건 (나)는 자연수 k에 대한 항등식이므로 $k=1$을 대입하면

$\int_0^2 g(x)dx = 4 \times \int_1^3 g(x)dx$

$\int_0^1 g(x)dx = A$, $\int_1^2 g(x)dx = B$로 두면

$\int_2^3 g(x)dx = -\frac{A}{2}$, $\int_3^4 g(x)dx = -\frac{B}{2}$이다.

$\therefore\ A + B = 4 \times \left(B - \frac{A}{2}\right)$, 즉 $A = B$

$\therefore\ \int_0^2 g(x)dx = 2A$, $\int_2^4 g(x)dx = -A$, $\int_4^6 g(x)dx = \frac{A}{2}$, $\cdots$

따라서 수열 $\left\{\int_{2k-2}^{2k} g(x)dx\right\}$는 첫째항이 $2A$이고 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$\therefore\ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2k-2}^{2k} g(x)dx = \frac{2A}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}A = \frac{8}{3}$,

즉 $2A = \int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 f(x)dx = 4$

$\int_0^2 f(x)dx = 4$에서 a의 값을 구하면 $a = -15$

$\therefore\ f(x) = -15x(x-1)^2(x-2)$

$\int_{2k-2}^{2k} |g(x)|\,dx = \left|\int_{2k-2}^{2k} g(x)dx\right|$이므로

$\int_{2k-2}^{2k} |g(x)|\,dx = \left|4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right| = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{13} \int_{2k-2}^{2k} |g(x)|\,dx = \sum_{k=1}^{13} 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

$= \frac{4\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{13}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 8\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{13}\right\}$

$= 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$\therefore\ p + q = 18$

2) $f(0) = -\frac{1}{2}f(2)$, $f(1) = f'(1) = 0$인 경우

$f(0) \neq 0$라고 가정하자.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 $(a < 0)$

$f(x) = a(x-1)^2(x^2 + bx + c)$이고

$f(0) = -\frac{1}{2}f(2)$에서 $2b + 3c = -4$이다.

한편 1에서와 마찬가지의 방식으로 등식

$A = B$ 즉, $\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx$를 얻는다.

계산하면 $b = -2$이고 $c = 0$이다.

이는 $f(0) \neq 0$이라는 가정에 모순이다.