2018학년도 대비 All Clear Day - 3rd

제 2 교시 수학 영역(가 형)

주의사항

30문항이 아닙니다! 어렵지도 않습니다!!

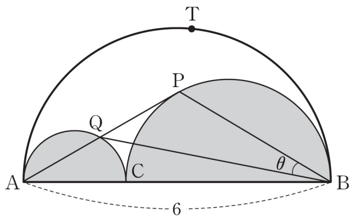
총 20문항, 60분입니다.

한문제가 틀리더라도 처음부터 다시 20문항을 풀어야 하는 교재입니다.

무의식을 단련하는 것은 쉽지 않습니다. 묵묵하게, 실수를 하지 않도록

틀리지 않게 계산하는 것이 이 교재의 목표입니다.

그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 C라 하고 세 선분 AB, AC, CB를 각각 지름으로 하는 세 반원을 같은 쪽에 그린다. 점 A에서 선분 CB를 지름으로 하는 반원에 접선을 그어 그 접점을 P라 하고, 접선 AP가 선분 AC를 지름으로 하는 반원과 만나는 점을 Q라 하자.
1번과 2번의 두 물음에 답하시오.



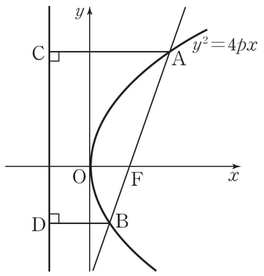
1. [1] $\angle \mathrm{PBQ} = \theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{\sqrt{2}}{5}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{5}$　④ $\frac{2}{5}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

2. [2] 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위를 움직이는 점 T가 있다. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{TP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{TQ}}$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{TP}}+\overrightarrow{\mathrm{TQ}}|$의 최솟값은?

① $\frac{5}{2}$　② $\frac{8}{3}$　③ 3　④ $\frac{10}{3}$　⑤ $\frac{7}{2}$

3. [3] 그림과 같이 좌표평면에서 포물선 $y^2=4px$ (p는 양의 상수)의 초점을 F라 하고, 점 F를 지나는 직선이 포물선과 제1사분면에서 만나는 점을 A, 제4사분면에서 만나는 점을 B라 하자. 점 A의 y좌표를 a, 점 B의 y좌표를 b라 할 때 $a+2b=0$인 관계가 성립하고, 두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ACDB의 넓이가 $27\sqrt{2}$이다. 두 점 A, B 사이의 거리는?

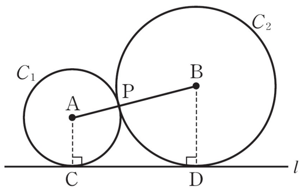


4. [4] 태블릿 PC를 만드는 어느 전자회사는 신제품을 시장에 내놓은 후에 이 제품을 구입한 사람 n명을 대상으로 가격 만족도와 성능 만족도를 조사하였는데 가격은 2명 중에 1명꼴로, 성능은 5명 중에 4명꼴로 만족한다고 답하였다. 이 결과를 이용하여 제품을 구입한 사람 전체를 대상으로 가격에 만족하는 사람의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[a,\ b]$, 성능에 만족하는 사람의 비율에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $[c,\ d]$이었다. $b-a=0.098$일 때, $d-c$의 값은? (단, n은 충분히 큰 수이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le 1.96)=0.95$, $\mathrm{P}(|Z|\le 2.58)=0.99$로 계산한다.)

① 0.1018　② 0.1032　③ 0.1046　④ 0.1060　⑤ 0.1074

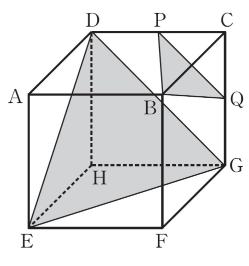
5. [5]그림과 같이 길이가 1인 선분 AB 위의 점 P에 대하여 점 A를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원을 C_1, 점 B를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원을 C_2라 하자. 두 원 C_1, C_2의 공통접선 중 점 P를 지나지 않는 직선을 l이라 하고 원 C_1과 직선 l의 접점을 C, 원 C_2와 직선 l의 접점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{PA}}=t$라 할 때, $\displaystyle\lim_{t\to\frac{1}{2}-}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{PD}}-\overset{\frown}{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}}$의 값은?

$\left(\text{단, } 0<t<\frac{1}{2}\text{이고, } \overset{\frown}{\mathrm{PC}}\text{와 } \overset{\frown}{\mathrm{PD}}\text{는 모두 중심각의 크기가 } \pi\text{보다 작은 쪽의 호의 길이이다.}\right)$



① $\frac{\pi}{2}-2$ ② $\frac{\pi}{2}-1$ ③ $\frac{\pi}{2}$
④ $\frac{\pi}{2}+1$ ⑤ $\frac{\pi}{2}+2$

6. [6]그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체 ABCD−EFGH에서 두 모서리 CD, CG의 중점을 각각 P, Q라 하자. 평면 PBQ와 평면 DEG가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $30\cos^2\theta$의 값을 구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



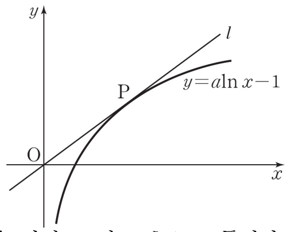
7. [7]실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이다.
(나) $f(x)=\begin{cases}3^{-x+1} & (0\le x<1)\\ x & (1\le x<3)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+27$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $a-\frac{b}{\ln 3}$이다. 두 유리수 a, b에 대하여 $10ab$의 값을 구하시오.

8. [8]$0<a<\frac{1}{2}$일 때, 함수 $f(x)=x^2+a\ln(x+1)$의 극댓값과 극솟값의 합을 $g(a)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(\frac{1}{4},\ g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$에서의 접선의 방정식이 $y=px+q$일 때, 두 상수 p, q에 대하여 $e^{-p}\times q$의 값을 구하시오.

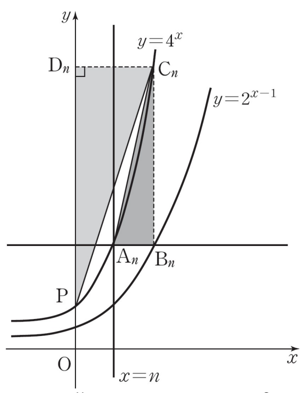
9. 함수 $f(x)=a\ln x-1$에 대하여 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선 l과 접점 P가 있다. 물음에 답하시오. (단, a는 양의 상수이다.)



[9]곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(a)$라 할 때, $\dfrac{S(4)}{S(2)}$의 값은?

① $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$　② $\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}}$　③ $2e^{-\frac{1}{4}}$
④ $2e^{\frac{1}{4}}$　⑤ $2e^{\frac{1}{2}}$

10. [10]자연수 n에 대하여 그림과 같이 직선 $x=n$이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 A_n이라 하고, 점 A_n을 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x-1}$과 만나는 점을 B_n이라 하자. 점 B_n을 지나고 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 C_n이라 하고 점 C_n에서 y축에 내린 수선의 발을 D_n이라 하자. 점 $\mathrm{P}(0,\ 1)$에 대하여 삼각형 $\mathrm{PC}_n\mathrm{D}_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}$의 값은?



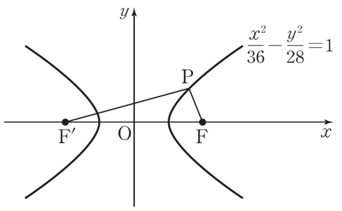
① 1　② $\frac{5}{4}$　③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$　⑤ 2

11. [11]곡선 $y=e^x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$에서 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta(t)$라 할 때, $\int_0^{\ln 2} e^t \sin\theta(t)\,dt$의 값은?

① $2-\sqrt{2}$　② $\sqrt{5}-\sqrt{2}$　③ $\sqrt{5}-1$
④ $3-\sqrt{2}$　⑤ $4-\sqrt{2}$

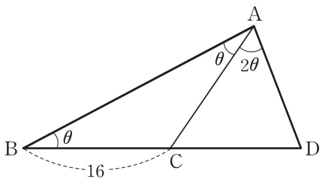
12. [12]어느 도시에서 영화 A의 관람률을 알아보기 위해 1600명을 임의추출하여 조사하였더니 영화 A를 관람했다고 응답한 인원이 320명이었을 때, 이 도시의 시민 전체를 대상으로 영화 A를 관람한 시민의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[a,\ b]$이다. $10000(b-a)$의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.4750$으로 계산한다.)

13. 13)그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F$'$이라 하자.



제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P와 원점 O에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OF'}}|=6$이 성립할 때, $\overrightarrow{\mathrm{PF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PF'}}$의 값을 구하시오.

14. 14)그림과 같이 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BAC}=\theta$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=16$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 BC의 연장선 위에 $\angle\mathrm{CAD}=2\angle\mathrm{ABC}$가 되도록 점 D를 잡자. 삼각형 ABD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오.



15. 15)좌표공간에서 평면 $2x-3y+6z=2$ 위를 움직이는 점 P와 구 $x^2+y^2+z^2-6x+2y-14z+50=0$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 PQ의 길이가 최소가 될 때, 원점 O에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

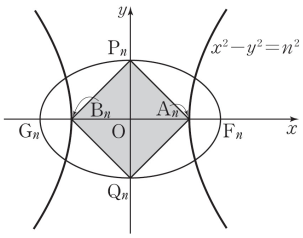
16. 16)닫힌 구간 $[0,\ \pi]$에서 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x \cos t\,dt-\int_0^{\pi-x}\sin t\,dt$$

로 정의하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 곱 ab의 값은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ 0 ④ $-\frac{\pi}{4}$ ⑤ $-\frac{\pi}{2}$

17. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 쌍곡선 $x^2-y^2=n^2$의 두 초점을 F_n, G_n이라 하고 쌍곡선의 두 꼭짓점을 A_n, B_n이라 하자. 선분 $\mathrm{F}_n\mathrm{G}_n$을 장축으로 하고 두 점 A_n, B_n을 초점으로 하는 타원의 단축의 양 끝점을 P_n, Q_n이라 할 때, 마름모 $\mathrm{P}_n\mathrm{B}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{A}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{6} S_n$의 값은? [4점]



① 176 ② 178 ③ 180
④ 182 ⑤ 184

18. 평균이 10, 표준편차가 x인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여 $f(x)=\mathrm{P}(10-x^2 \le X \le 11)$
이라 하자. 자연수 n에 대하여

$$\sum_{n=1}^{10} f\left(\frac{1}{n}\right)-\sum_{n=1}^{8} f(n+2)$$

의 값을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

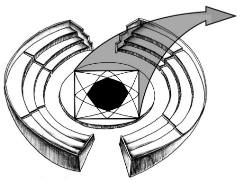
① 1.3513 ② 1.3826
③ 1.4037 ④ 1.4391
⑤ 1.4724

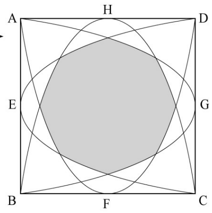
z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

19. 삼차함수 $f(x)=x^3-2x^2$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 x좌표가 양수인 점에서 접하고 기울기가 4인 직선을 l이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 교점 중에서 접점이 아닌 점을 P라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선을 l'이라 하자. 두 직선 l과 l'이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

20. [그림1]은 무대 디자이너 길섭이가 야외공연 무대디자인 공모전에 출품한 작품이다. [그림1]의 중앙무대를 확대하면 [그림2]와 같고, 중앙 무대를 디자인하는 과정은 다음과 같다.

(1) 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD를 그리고 각 변의 중점을 각각 E, F, G, H라 한다.
(2) 변 BC를 좌표평면 위의 x축과 평행하게 놓고 두 점 B, C를 지나며 점 H를 꼭짓점으로 하는 이차함수의 그래프와 두 점 A, D를 지나며 점 F를 꼭짓점으로 하는 이차함수의 그래프를 그린다.
(3) 변 AB를 좌표평면 위의 x축과 평행하게 놓고 (2)와 같은 방법으로 세 점 A, B, G를 지나는 이차함수와 세 점 C, D, E를 지나는 이차함수의 그래프를 추가로 그린다.





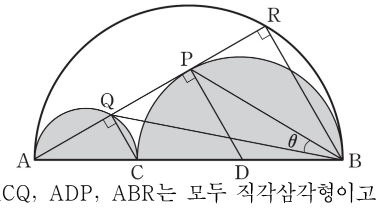
[그림1] [그림2]

[그림2]의 어두운 부분의 넓이를 $\frac{p\sqrt{2}+q}{3}$라 할 때, $p-q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.)

정답 및 해설

1) [정답] ③

선분 CB의 중점을 D라 하고, 접선 AP가 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 만나는 점을 R라 하자.



세 삼각형 ACQ, ADP, ABR는 모두 직각삼각형이고

$\overline{AD}=4,\ \overline{DP}=2,\ \overline{AP}=2\sqrt{3}$이므로 $\angle PAD=\frac{\pi}{6}$

$\overline{AQ}=\overline{AC}\cos\frac{\pi}{6}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$\overline{AR}=\overline{AB}\cos\frac{\pi}{6}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서

$\overline{QR}=\overline{AR}-\overline{AQ}=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\overline{PR}=\overline{AR}-\overline{AP}=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

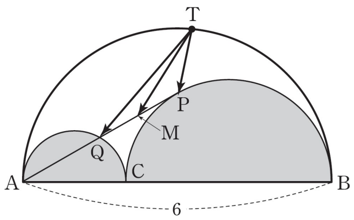
$\angle QBR=\alpha,\ \angle PBR=\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{\overline{QR}}{\overline{BR}}=\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \tan\beta=\frac{\overline{PR}}{\overline{BR}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

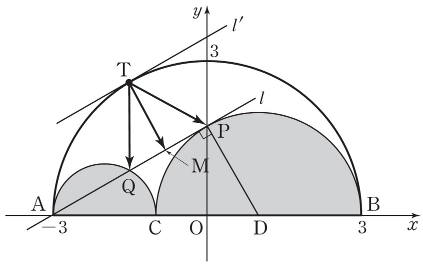
$$=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$$

2) [정답] ③



선분 PQ의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{TQ}=2\overrightarrow{TM}$

그림과 같이 좌표평면에 선분 AB의 중점이 원점 O에 오고, 선분 AB가 x축 위에 놓이도록 반원을 놓고 두 점 A, P를 지나는 직선을 l, 직선 l과 평행하면서 선분 AB를 지름으로 하는 반원에 접하는 직선을 l'이라 하면 $\overline{OM}\perp l$이므로 $|\overrightarrow{TM}|$의 최솟값은 두 직선 $l,\ l'$ 사이의 거리가 된다.



선분 CB의 중점을 D라 하면 직각삼각형 ADP에서

$\overline{AD}=4,\ \overline{DP}=2$이므로 $\angle PAD=\frac{\pi}{6}$

따라서 원 $x^2+y^2=3^2$에 접하고, 기울기가 $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$인 직선 l'의 방정식은

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}x+2\sqrt{3}$$

즉, $x-\sqrt{3}y+6=0$

점 A$(-3,\ 0)$과 직선 $x-\sqrt{3}y+6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1\times(-3)+(-\sqrt{3})\times0+6|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\frac{3}{2}$$

따라서 $|\overrightarrow{TP}+\overrightarrow{TQ}|=2|\overrightarrow{TM}|$의 최솟값은

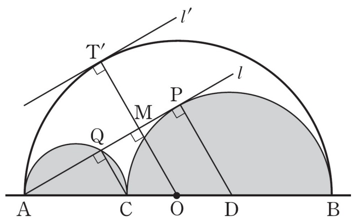
$2\times\frac{3}{2}=3$

참고

원 $x^2+y^2=r^2(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

참고



선분 AB의 중점을 O, 직선 l'과 반원의 접점을 T′이라 하면

$\overline{T'M}=\overline{OT'}-\overline{OM}$이고

$\overline{OM}=\overline{OA}\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \overline{T'M}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

3) [정답] ④

포물선 $y^2=4px$의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이므로 점 F를 지나는 직선의 방정식을 $x=my+p$ (m은 상수)라 하자.

$y^2=4px$에 $x=my+p$를 대입하면

$y^2=4p(my+p)$

$y^2-4pmy-4p^2=0$ …… ㉠

y에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이 $a,\ b$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$ab=-4p^2$ …… ㉡

주어진 조건에 의하여 $a+2b=0$이므로

$a=-2b$를 ㉡에 대입하면

$-2b^2=-4p^2$

$b=-\sqrt{2}p$ ($\because\ b<0$)

$a=-2b=2\sqrt{2}p$

따라서 점 A의 좌표는 $(2p,\ 2\sqrt{2}p)$, 점 B의 좌표는

$\left(\frac{p}{2},\ -\sqrt{2}p\right)$이고, 포물선의 준선의 방정식은 $x=-p$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=2p+p=3p$

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{p}{2}+p=\frac{3}{2}p$

$\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{2}p+\sqrt{2}p=3\sqrt{2}p$

그러므로 사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(3p+\frac{3}{2}p\right)\times3\sqrt{2}p=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}p\times3\sqrt{2}p$

$=\frac{27\sqrt{2}}{4}p^2$

$=27\sqrt{2}$

$\therefore\ p=2$ ($\because\ p>0$)

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{FB}}$

$=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}$

$=3p+\frac{3}{2}p$

$=\frac{9}{2}p$

$=\frac{9}{2}\times2=9$

4) [정답] ②

제품을 구입한 사람 전체를 대상으로 가격에 만족하는 사람의 비율을 p_1, 성능에 만족하는 사람의 비율을 p_2라 하면 그 표본비율은

각각

$\hat{p_1}=\frac{1}{2},\ \hat{p_2}=\frac{4}{5}$

n이 충분히 큰 수이므로 $Z=\dfrac{\hat{p_1}-p_1}{\sqrt{\dfrac{\hat{p_1}\left(1-\hat{p_1}\right)}{n}}}$ 은 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

모비율 p_1의 신뢰도 95% 신뢰구간의 양 끝값은

$a=\frac{1}{2}-1.96\sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}}$

$=\frac{1}{2}-\frac{0.98}{\sqrt{n}}$

$b=\frac{1}{2}+1.96\sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{0.98}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ b-a=2\times\frac{0.98}{\sqrt{n}}=\frac{1.96}{\sqrt{n}}$

$\frac{1.96}{\sqrt{n}}=0.098$에서

$\sqrt{n}=20$

마찬가지로 n이 충분히 큰 수이므로 $Z=\dfrac{\hat{p_2}-p_2}{\sqrt{\dfrac{\hat{p_2}\left(1-\hat{p_2}\right)}{n}}}$ 은 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

모비율 p_2의 신뢰도 99% 신뢰구간의 양 끝값은

$c=\frac{4}{5}-2.58\sqrt{\dfrac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{n}}$

$=\frac{4}{5}-\frac{1.032}{\sqrt{n}}$

$d=\frac{4}{5}+2.58\sqrt{\dfrac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{n}}$

$=\frac{4}{5}+\frac{1.032}{\sqrt{n}}$

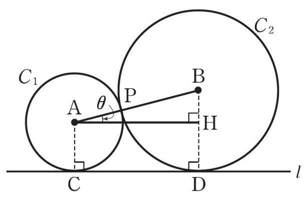
$\therefore\ d-c=2\times\frac{1.032}{\sqrt{n}}$

$=2\times\frac{1.032}{20}$

$=0.1032$

5) [정답] ②

그림과 같이 점 A에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle\mathrm{BAH}=\theta$라 하자.



$\overline{\mathrm{PA}}=t,\ \overline{\mathrm{PB}}=1-t$이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{HD}}$

$=\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{AC}}$

$=\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}$

$=(1-t)-t$

$=1-2t$

따라서 삼각형 BAH에서 $\sin\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=1-2t$이므로

$\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}=1-2t=\sin\theta$

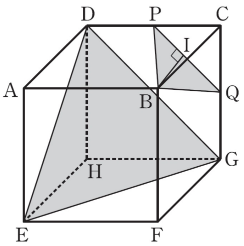
또 $\angle\mathrm{PAC}=\dfrac{\pi}{2}+\theta$, $\angle\mathrm{PBD}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{PD}}-\widehat{\mathrm{PC}}&=(1-t)\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-t\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\\&=\frac{\pi}{2}(1-2t)-\theta\\&=\frac{\pi}{2}\sin\theta-\theta\end{aligned}$$

$t\to\dfrac{1}{2}-0$일 때, $\theta\to+0$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\frac{1}{2}-0}\frac{\widehat{\mathrm{PD}}-\widehat{\mathrm{PC}}}{\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}}&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{\pi}{2}\sin\theta-\theta}{\sin\theta}\\&=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{\sin\theta}\right)\\&\frac{\pi}{2}-1\end{aligned}$$

6) [정답] 10



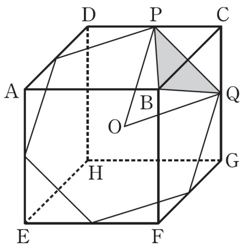
삼각형 PBQ에서

$\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}$

점 B에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{BI}}&=\sqrt{\overline{\mathrm{BQ}}^2-\overline{\mathrm{QI}}^2}\\&=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\\&=\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PBQ}&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{BI}}\\&=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$



평면 DEG를 선분 PQ와 만나도록 평행이동한 평면을 α라 하면

그림과 같이 평면 α는 정육각형을 포함한 평면이다.

점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 O라 하면

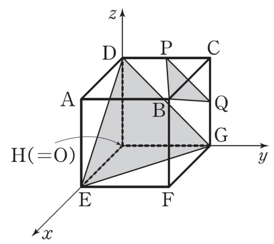
$\triangle\mathrm{POQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 PBQ의 평면 α 위로의 정사영이 삼각형 POQ이므로

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\triangle\mathrm{POQ}}{\triangle\mathrm{PBQ}}\\&=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

$\therefore\ 30\cos^2\theta=30\times\dfrac{1}{3}=10$

다른 풀이



그림과 같이 좌표공간에 정육면체를 놓으면 세 점 D, E, G의 좌표는 D$(0,\ 0,\ 2)$, E$(2,\ 0,\ 0)$, G$(0,\ 2,\ 0)$

이므로 세 점 D, E, G를 지나는 평면의 방정식은

$x+y+z=2$

또한 세 점 P, B, Q의 좌표는

P$(0,\ 1,\ 2)$, B$(2,\ 2,\ 2)$, Q$(0,\ 2,\ 1)$

이므로 세 점 P, B, Q를 지나는 평면의 방정식을

$a(x-2)+b(y-2)+c(z-2)=0$

이라 놓고, 두 점 P, Q의 좌표를 각각 평면의 방정식에 대입하면

$-2a-b=0$

$-2a-c=0$

$\therefore\ b=-2a,\ c=-2a$

따라서 세 점 P, B, Q를 지나는 평면의 방정식은

$a(x-2)-2a(y-2)-2a(z-2)=0$

$(x-2)-2(y-2)-2(z-2)=0$

$\therefore\ x-2y-2z+6=0$

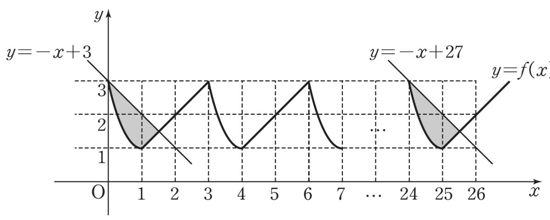
따라서 두 평면 $x+y+z=2$, $x-2y-2z+6=0$이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{|1\times1+1\times(-2)+1\times(-2)|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}\\&=\frac{3}{\sqrt{3}\times3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

$\therefore\ 30\cos^2\theta=30\times\dfrac{1}{3}=10$

7) [정답] 55

두 함수 $y=f(x)$, $y=-x+27$의 그래프는 다음과 같고, 두 점 $(24,\ 3)$, $\left(\dfrac{51}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$에서 만난다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+27$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+3$으로 둘러싸인 부분의

넓이와 같으므로

$$\int_{0}^{\frac{3}{2}}\{(-x+3)-f(x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{1}\{(-x+3)-3^{-x+1}\}dx+\int_{0}^{\frac{3}{2}}\{(-x+3)-x\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3^{-x+1}}{\ln 3}\right]_0^1+\left[-x^2+3x\right]_1^{\frac{3}{2}}$$

$$=\left\{\left(-\frac{1}{2}+3+\frac{1}{\ln 3}\right)-\frac{3}{\ln 3}\right\}+\left\{\left(-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}\right)-(-1+3)\right\}$$

$$=\frac{11}{4}-\frac{2}{\ln 3}$$

따라서 $a=\frac{11}{4}$, $b=2$이므로

$$10ab=10\times\frac{11}{4}\times 2=55$$

8) [정답] 6

$f(x)=x^2+a\ln(x+1)$에서

$$f'(x)=2x+\frac{a}{x+1}$$

$f'(x)=0$에서

$$2x+\frac{a}{x+1}=0$$

$$2x^2+2x+a=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$h(x)=2x^2+2x+a$라 하면

$$h(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a-\frac{1}{2}$$

이고, 주어진 조건에 의하여 $0<a<\frac{1}{2}$이므로

$$h\left(-\frac{1}{2}\right)=a-\frac{1}{2}<0,\ h(-1)=a>0$$

따라서 ㉠은 $x>-1$에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉠의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=\frac{\alpha}{2}$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-1)	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

극댓값이 $f(\alpha)$, 극솟값이 $f(\beta)$이므로

$$g(a)=f(\alpha)+f(\beta)$$

$$=a^2+a\ln(\alpha+1)+\beta^2+a\ln(\beta+1)$$

$$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+a\ln(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)$$

$$=1-a+a\ln\frac{a}{2}\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$$

$$g'(a)=-1+\ln\frac{a}{2}+a\times\frac{1}{a}=\ln\frac{a}{2}$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(\frac{1}{4},\ g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y-g\left(\frac{1}{4}\right)=g'\left(\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

$$y-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}\right)=\left(x-\frac{1}{4}\right)\ln\frac{1}{8}$$

$$y=x\ln\frac{1}{8}+\frac{3}{4}$$

그러므로 $p=\ln\frac{1}{8}$, $q=\frac{3}{4}$

$$\therefore\ e^{-p}\times q=e^{\ln 8}\times\frac{3}{4}$$

$$=8\times\frac{3}{4}=6$$

9) [정답] ③

곡선 $y=a\ln x-1\,(a>0)$ 위의 접점의 좌표를

$\mathrm{P}(t,\ a\ln t-1)\,(t>0)$

이라 하면 접선의 기울기는 $y'=\frac{a}{x}$에서 $\frac{a}{t}$이므로 접선 l의

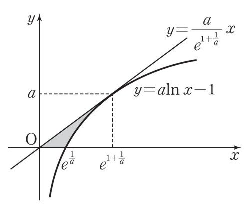
방정식은

$$y=\frac{a}{t}(x-t)+a\ln t-1$$

직선 l이 원점을 지나므로 $0=\frac{a}{t}(0-t)+a\ln t-1$에서

$$t=e^{1+\frac{1}{a}}$$

따라서 점 $\mathrm{P}(e^{1+\frac{1}{a}},\ a)$이고, 접선 l의 방정식은 $y=\frac{a}{e^{1+\frac{1}{a}}}x$이다.



$$S(a)=\frac{1}{2}e^{1+\frac{1}{a}}\times a-\int_{e^{\frac{1}{a}}}^{e^{1+\frac{1}{a}}}(a\ln x-1)dx$$

$$=\frac{a}{2}e^{1+\frac{1}{a}}-a\left[x\ln x-x\right]_{e^{\frac{1}{a}}}^{e^{1+\frac{1}{a}}}+\left[x\right]_{e^{\frac{1}{a}}}^{e^{1+\frac{1}{a}}}$$

$$=\frac{a}{2}e^{1+\frac{1}{a}}-a\times e^{\frac{1}{a}}$$

$$= \frac{e-2}{2} a e^{\frac{1}{a}}$$

$$\therefore \ \frac{S(4)}{S(2)} = \frac{\frac{e-2}{2} \times 4 \times e^{\frac{1}{4}}}{\frac{e-2}{2} \times 2 \times e^{\frac{1}{2}}} = 2e^{-\frac{1}{4}}$$

10) [정답] ⑤

점 A_n의 좌표는 $A_n(n,\ 4^n)$이고, $4^n = 2^{x-1}$에서

$2^{2n} = 2^{x-1}$

즉, $2n = x-1$에서 $x = 2n+1$이므로

점 B_n의 좌표는 $B_n(2n+1,\ 4^n)$,

점 C_n의 좌표는 $C_n(2n+1,\ 4^{2n+1})$,

점 D_n의 좌표는 $D_n(0,\ 4^{2n+1})$이다.

$\overline{C_nD_n} = 2n+1$, $\overline{PD_n} = 4^{2n+1} - 1$이므로

$$S_n = \frac{1}{2}(2n+1)(4^{2n+1}-1)$$

$\overline{A_nB_n} = (2n+1) - n = n+1$,

$\overline{B_nC_n} = 4^{2n+1} - 4^n$

이므로 $T_n = \frac{1}{2}(n+1)(4^{2n+1} - 4^n)$

$$\therefore \ \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{T_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(4\times 16^n - 1)}{(n+1)(4\times 16^n - 4^n)}$$

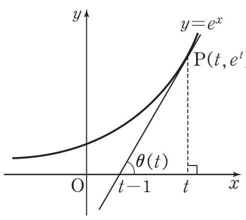
$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{4\times 16^n - 1}{4\times 16^n - 4^n}\right)$$

$$= 2 \times 1 = 2$$

11) [정답] ②

$y' = e^x$이므로 곡선 $y = e^x$ 위의 점 $P(t,\ e^t)$에서 접선의 방정식은

$y - e^t = e^t(x-t)$ …… ㉠



직선 ㉠이 x축과 만나는 점의 좌표는 $(t-1,\ 0)$이므로

$$\sin\theta(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}$$

$$\therefore \ \int_0^{\ln 2} e^t \sin\theta(t)\,dt = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2t}}{\sqrt{1+e^{2t}}}\,dt$$

$s = 1 + e^{2t}$이라 하면 $\frac{ds}{dt} = 2e^{2t}$, $t=0$일 때 $s=2$, $t = \ln 2$일 때 $s = 5$이므로

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2t}}{\sqrt{1+e^{2t}}}\,dt = \int_2^5 \frac{1}{2\sqrt{s}}\,ds$$

$$= \left[\sqrt{s}\right]_2^5$$

$$= \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

12) [정답] 392

이 도시에서 임의추출한 1600명 중 영화 A를 관람한 시민은 320명이므로

$$\hat{p} = \frac{320}{1600} = 0.2$$

$$\hat{q} = 1 - 0.2 = 0.8$$

$n = 1600$은 충분히 크므로 모비율의 신뢰구간은

$$\left[\hat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{1600}},\ \hat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{1600}}\right]$$

$$\left[0.2 - 1.96\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{1600}},\ 0.2 + 1.96\frac{\sqrt{0.2\times 0.8}}{1600}\right]$$

따라서

$$a = 0.2 - 1.96\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{1600}},$$

$$b = 0.2 + 1.96\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{1600}}$$

이므로

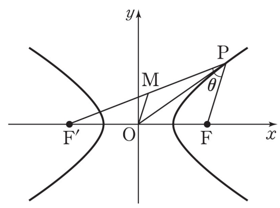
$$b - a = 2\times 1.96\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{1600}}$$

$$= 0.0392$$

$\therefore \ 10000(b-a) = 392$

13) [정답] 52

쌍곡선 $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$의 두 초점 F, F′의 좌표는 각각 $F(8,\ 0)$, $F'(-8,\ 0)$이다.



선분 PF′의 중점을 M이라 하면 $|\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF'}| = 6$이므로

$$|\overrightarrow{OM}| = \left|\frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF'}}{2}\right| = 3$$

삼각형 F′OM과 삼각형 F′FP가 닮음이고, 닮음비가 1 : 2이므로

$\overline{PF} + 2\overline{OM} = 6$

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2\times 6 = 12$

$\therefore \ \overline{PF'} = 18$

두 선분 PF, PF′이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

삼각형 PF′F에서 코사인법칙에 의하여

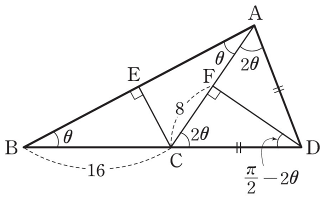
$$\cos\theta = \frac{6^2 + 18^2 - 16^2}{2\times 6\times 18}$$

$$= \frac{36 + 324 - 256}{216}$$

$$= \frac{104}{216} = \frac{13}{27}$$

$$\therefore \ \overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PF'} = |\overrightarrow{PF}||\overrightarrow{PF'}|\cos\theta = 6\times 18\times\frac{13}{27} = 52$$

14) [정답] 384



점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하면

$\overline{\mathrm{BE}}=16\cos\theta$, $\overline{\mathrm{AB}}=32\cos\theta$

$\angle\mathrm{ACB}=\pi-2\theta$이므로

$\angle\mathrm{ACD}=2\theta$

즉, $\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{CAD}=2\theta$이므로 삼각형 ACD는 이등변삼각형이다.

점 D에서 변 AC에 내린 수선의 발을 F라 하면 $\overline{\mathrm{CF}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{8}{\cos2\theta}=\overline{\mathrm{AD}}$

삼각형 ABD의 넓이가 $S(\theta)$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\sin3\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times32\cos\theta\times\frac{8}{\cos2\theta}\times\sin3\theta$$
$$=\frac{128\sin3\theta\cos\theta}{\cos2\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{128\sin3\theta\cos\theta}{\theta\cos2\theta}$$
$$=384\times\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin3\theta}{3\theta}\times\lim_{\theta\to+0}\frac{\cos\theta}{\cos2\theta}$$
$$=384\times1\times1=384$$

15) [정답] 57

$x^2+y^2+z^2-6x+2y-14z+50=0$에서

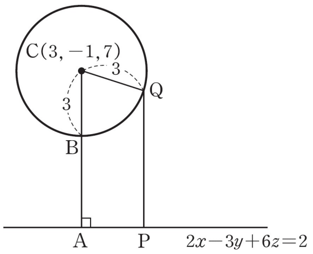
$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-7)^2=9$

구의 중심을 C라 할 때, 구의 중심 C로부터 평면에 내린 수선의 발에 점 P가 있고 수선이 구와 만나는 점에 점 Q가 있을 때 선분 PQ의 길이는 최소가 된다.

선분 PQ의 길이가 최소가 될 때의 점을 각각 A, B라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}\le\overline{\mathrm{CQ}}+\overline{\mathrm{QP}}$, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CQ}}$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}\le\overline{\mathrm{PQ}}$가 성립한다.



두 점 A, B의 좌표를 구하기 위하여 먼저 직선 CA 위의 점을 R$(x,\ y,\ z)$라 하면 이 직선은 점 C를 지나고, 방향벡터는 평면의 법선벡터와 같으므로

$(x,\ y,\ z)=(3,\ -1,\ 7)+t(2,\ -3,\ 6)$ (t는 실수)

$=(2t+3,\ -3t-1,\ 6t+7)$ …… ㉠

점 A는 이 직선과 평면의 교점이므로

$2x-3y+6z=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$2(2t+3)-3(-3t-1)+6(6t+7)=2$

$49t+51=2$

$\therefore\ t=-1$

$t=-1$을 ㉠에 대입하면

A$(1,\ 2,\ 1)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{(1-3)^2+(2+1)^2+(1-7)^2}=7$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=7-3=4$

점 B는 선분 CA를 $3:4$로 내분하는 점이므로

$\left(\dfrac{3\times1+4\times3}{7},\ \dfrac{3\times2+4\times(-1)}{7},\ \dfrac{3\times1+4\times7}{7}\right)$에서

$\mathrm{B}\left(\dfrac{15}{7},\ \dfrac{2}{7},\ \dfrac{31}{7}\right)$

따라서 선분 PQ의 길이가 최소가 될 때 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 값은 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 값과 같으므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1\times\frac{15}{7}+2\times\frac{2}{7}+1\times\frac{31}{7}$$
$$=\frac{15+4+31}{7}$$
$$=\frac{50}{7}$$

따라서 $p=7$, $q=50$이므로

$p+q=7+50$

$=57$

16) [정답] ④

$$f(x)=\int_0^x\cos t\,dt-\int_0^{\pi-x}\sin t\,dt$$
$$=\Big[\sin t\Big]_0^x+\Big[\cos t\Big]_0^{\pi-x}$$
$$=\sin x+\cos(\pi-x)-1$$
$$=\sin x-\cos x-1$$

$f'(x)=\cos x+\sin x$

$f''(x)=-\sin x+\cos x=0$에서 $\cos x=\sin x$

$0<x<\pi$이므로 $x=\dfrac{\pi}{4}$

$0<x<\dfrac{\pi}{4}$에서 $f''(x)>0$, $\dfrac{\pi}{4}<x<\pi$에서 $f''(x)<0$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$이므로

$$ab=\frac{\pi}{4}\times f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)$$
$$=-\frac{\pi}{4}$$

참고

$f(x)=\int_0^x \cos t\,dt-\int_0^{\pi-x}\sin t\,dt$ 에서

$f'(x)=\cos x-\sin(\pi-x)\times(\pi-x)'$

$=\cos x+\sin(\pi-x)$

$=\cos x+\sin x$

$f(x)=\sin x-\cos x+C$ (단, C는 적분상수) …… ㉠

$f(\pi)=\int_0^{\pi}\cos t\,dt-\int_0^{0}\sin t\,dt$

$=\Big[\sin t\Big]_0^{\pi}=0$

이므로 ㉠에서

$f(\pi)=1+C=0$

$\therefore\ C=-1$

$\therefore\ f(x)=\sin x-\cos x-1$

17) [정답] ④

쌍곡선 $x^2-y^2=n^2$, 즉 $\frac{x^2}{n^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$의

초점의 좌표는 $(\sqrt{2}n,\ 0)$, $(-\sqrt{2}n,\ 0)$이고

꼭짓점의 좌표가 $(n,\ 0)$, $(-n,\ 0)$이므로

$F_n(\sqrt{2}n,\ 0)$, $G_n(-\sqrt{2}n,\ 0)$, $A_n(n,\ 0)$, $B_n(-n,\ 0)$

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{(\sqrt{2}n)^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하면

$b^2=(\sqrt{2}n)^2-n^2=n^2$이므로

$P_n(0,\ n)$, $Q_n(0,\ -n)$

따라서 마름모 $P_nB_nQ_nA_n$의 넓이 S_n은

$S_n=4\times\frac{1}{2}\times n^2=2n^2$이므로

$\sum_{n=1}^{6}S_n=\sum_{n=1}^{6}2n^2$

$=2\times\frac{6\times7\times13}{6}$

$=182$

18) [정답] ①

확률변수 X가 정규분포 $N(10,\ x^2)$을 따를 때, $\frac{X-10}{x}=Z$라 하면 Z는 표준정규분포를 따르고

$P(10-x^2\le X\le 11)$

$=P\left(\frac{10-x^2-10}{x}\le Z\le\frac{11-10}{x}\right)$

$=P\left(-x\le Z\le\frac{1}{x}\right)$

이므로

$f(x)=P\left(-x\le Z\le\frac{1}{x}\right)$

$=P(0\le Z\le x)+P\left(0\le Z\le\frac{1}{x}\right)$

$\therefore\ f\left(\frac{1}{x}\right)=P\left(0\le Z\le\frac{1}{x}\right)+P(0\le Z\le x)$

$=f(x)$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}f\left(\frac{1}{n}\right)-\sum_{n=1}^{8}f(n+2)$

$=\sum_{n=1}^{10}f(n)-\sum_{n=3}^{10}f(n)$

$=f(1)+f(2)$

$=\{P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 1)\}$

$+\left\{P(0\le Z\le 2)+P\left(0\le Z\le\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=2\times0.3413+0.4772+0.1915$

$=1.3513$

19) [정답] 97

$f(x)=x^3-2x^2$에서

$f'(x)=3x^2-4x$

곡선 $y=f(x)$와 직선 l의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t^2)$이라 하면

접선의 기울기가 $f'(t)=3t^2-4t$이므로

$3t^2-4t=4$에서

$3t^2-4t-4=0$

$(3t+2)(t-2)=0$

$\therefore\ t=2\ (\because\ t>0)$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고 접선의 기울기는 4이므로

직선 l의 방정식은

$y=4x-8$

직선 $y=4x-8$과 곡선 $y=x^3-2x^2$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-2x^2-4x+8=0$

$(x-2)^2(x+2)=0$

$\therefore\ x=2$ 또는 $x=-2$

따라서 점 P의 x좌표는 -2이고, 점 P에서의 접선 l'의 기울기는

$f'(-2)=12+8=20$이므로

$\tan\theta=\left|\frac{20-4}{1+20\times4}\right|$

$=\frac{16}{81}$

따라서 $p=81$, $q=16$이므로

$p+q=81+16$

$=97$

참고

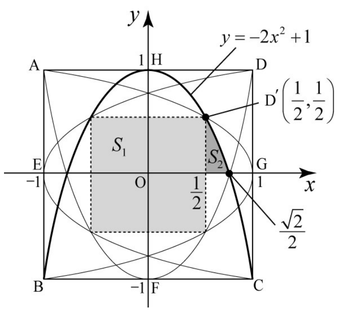
두 직선 l, l'의 기울기가 각각 m, m'이고, 두 직선 l, l'이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때

$\tan\theta=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$

20) [정답] 15

두 곡선 사이의 넓이

해설



점 E, G를 지나는 직선을 x축, 점 H, F를 지나는 직선을 y축으로 할 때, 세 점 B, H, C를 지나는 이차함수는 $y=-2x^2+1$

교점 D′의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이므로

어두운 부분의 넓이는

$$S_1+8S_2=1+8\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(-2x^2+1)dx=\frac{8\sqrt{2}-7}{3}$$

$p=8,\ q=-7$

따라서 $p-q=15$