5일차 과제

1. A 도시의 인구는 매년 일정한 비율로 증가하여 10 년 후에는 36 만 명, 20 년 후에는 81 만 명이 될 것으로 예상된다. 이때 A 도시의 15년 후의 인구는 얼마가 될 것으로 예상할 수 있는가?

① 51 만 명　② 53 만 명　③ 54 만 명
④ 55 만 명　⑤ 57 만 명

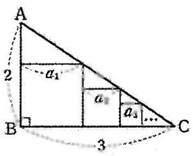
$a_1 \cdot r^{10} = 36\times10^4$

$a_1 \cdot r^{20} = 81\times10^4$　곱하라.

$\longrightarrow$ $a_1^2 \cdot r^{30} = 54^2\times10^8$

$a_1 \cdot r^{15}$?　54×10^4

2. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$ 이고 $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 차례대로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 할 때, $\frac{1}{2}a_9$ 의 값을 구하여라.



$a_1 : 2-a_1 = 3:2$.　$a_1=\frac{6}{5}$

마찬가지로 a_2를 구하면 공비는 $\frac{3}{5}$

$a_9 = \frac{6}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^8$

$\frac{1}{2}a_9 = \left(\frac{3}{5}\right)^9$

3. 세 수 $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt{4\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$ 중에서 가장 작은 수를 a, 가장 큰 수를 b라 할 때, 부등식 $a < \sqrt[6]{n} < b$를 만족시키는 자연수 n의 개수는?

① 42　② 43　③ 44
④ 45　⑤ 46

$\sqrt{3\sqrt[3]{3}} = 81^{\frac{1}{6}}$

$\sqrt{4\sqrt[3]{2}} = 128^{\frac{1}{6}}$

$\sqrt[3]{5\sqrt{5}} = 125^{\frac{1}{6}}$　이므로.

$81 < n < 128$.

$=$ 46개.

4. 두 실수 x, y에 대하여

$M(x,\ y)=\begin{cases} x & (x \ge y) \\ y & (x < y) \end{cases}$,　$m(x,\ y)=\begin{cases} y & (x > y) \\ x & (x \le y) \end{cases}$

로 정의하자. $a=\sqrt[4]{\sqrt{5}}$, $b=\sqrt[6]{3}\times\sqrt[12]{2}$, $c=\sqrt{\sqrt[3]{4}}$ 일 때, $M(a,\ m(b,\ c))$의 값을 구하여라.

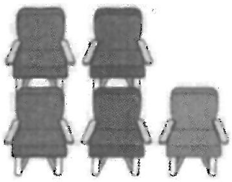
$a = \sqrt[24]{125}$

$b = \sqrt[24]{324}$　이므로　$a<c<b$

$c = \sqrt[24]{256}$

따라서 $M(a, m(b, c)) = \sqrt[3]{2}$.

5. 아래쪽 그림과 같은 좌석에 다섯 명의 학생이 앉아 발레 공연의 일부를 관람했다. 10분간의 휴식 시간 후 2부 공연을 관람하기 위해 임의로 좌석에 앉을 때, 한 사람만 1부 공연에 앉은 열과 같은 열의 좌석에 앉게 되는 방법의 수를 구하여라.



① ② ③

ⅰ) ① 에서 바른 경우 16.

ⅱ) ② 에서 바른 경우 16.

ⅲ) ③ 에서 바른경우. 4

∴ 36.

6. 각 자리의 숫자의 합이 4인 자연수를 작은 수부터 순서대로 나열했을 때, 가장 작은 다섯 자리 자연수는 몇 번째 수인지 구하여라.

4자리 이하의 자연수로 모두 세라.

1) 4,0,0,0 $\Rightarrow \frac{4!}{3!} = 4$.

2) 3.1.0.0 $\Rightarrow \frac{4!}{2!} = 12$.

3) 2.2.0.0 $\Rightarrow \frac{4!}{2!2!} = 6$.

4) 2.1.1.0 $\Rightarrow \frac{4!}{2!} = 12$.

5) 1.1.1.1 $\Rightarrow 1$.

총 35 이므로 그다음 수 36. 이 답이다.

7. 지우와 혜리가 각각 정답이 한 개인 오지선다형 문제 5개를 풀었는데 혜리는 1번 문제부터 5번 문제까지의 답을 각각 1, 2, 3, 4, 5로 택했고, 지우는 답을 모두 3으로 택했다. 이때 지우와 혜리 둘 다 3문제씩 맞히는 경우의 수를 구하여라.

가운데 문항은 둘다 맞히고.

4문항중 지우가 2문항을 맞추고

나머지를 혜리가 맞추면 된다.

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 = 6$$

8. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 순서쌍 (A, B)의 개수는?

(가) $A \cap B = \varnothing$
(나) $n(A) = n(B) = 2$
(다) 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 집합 B의 원소 중 가장 큰 수보다 크다.

① 70 ② 84 ③ 90 ④ 96 ⑤ 105

$\underbrace{{}_7C_4}_{\text{A와 B의 원소가 될 원소 4개 고르기}} \times \underbrace{{}_3C_2}$

4개중, 가장 큰 원소 제외한 B의 원소 2개 고르기

9. 10명의 회원으로 구성된 동아리에서 각 회원이 동아리 모임에 참석할 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 구성원의 $\frac{4}{5}$ 이상이 참석할 때 동아리 활동을 진행할 수 있다고 하면 동아리 활동이 진행될 확률이 $\frac{n}{2^7}$이다. 이때 자연수 n의 값을 구하여라.

i) 8명

$${}_{10}C_{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{45}{2^{10}}$$

ii) 9명

$${}_{10}C_{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{10}{2^{10}}$$

iii) 10명

$${}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=\frac{1}{2^{10}}$$

$\therefore\ n=7$

10. 한 개의 주사위를 60번 던질 때, 6의 약수가 k번 나올 확률을 $\mathrm{P}(k)$라 하자. 이때 $\sum_{k=1}^{30}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}$의 값을 구하여라.

$$P(k)={}_{60}C_{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{60-k}.$$

이고 관식을 정리하면,

$$\sum_{k=1}^{30}\{P(2k-1)-P(2k)\}=0$$

$$*\ (a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_{n}C_{r}a^{r}b^{n-r}$$

11. 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2}{2a_n+1}=3$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$
④ $-\frac{3}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \lim a_n=-\frac{5}{3}$

12. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=7,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3\ (n=1,2,3,\cdots)$$

으로 정의될 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

$\lim a_n=\lim a_{n+1}=\alpha.$

$\alpha=\frac{1}{2}\alpha+3.$

$\therefore\ \alpha=6.$

5일차 과제

13. 자연수 n에 대하여 수직선 위의 점 A_n의 좌표를 x_n이라 하자. $\mathrm{A}_1(2)$, $\mathrm{A}_2(7)$이고, 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$을 $2:3$으로 내분하는 점을 A_{n+2}라 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값은?

① 4　② $\frac{19}{4}$　③ 5
④ $\frac{41}{8}$　⑤ $\frac{21}{4}$

$A_n \to x_n$　　$A_{n+1} \to x_{n+1}$

$A_{n+2} = \dfrac{2x_{n+1}+3x_n}{5} = x_{n+2}$

$5x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 0$

<계비 II> → 강의참고.

$x_n = x_1 + (x_2 - x_1)\dfrac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}}{1+\frac{3}{5}}$ 이므로

$\lim x_n = \dfrac{41}{8}$

14. 어느 공원의 잔디는 일주일에 4cm씩 자라고 매주 월요일 오전 10시에 잔디의 길이의 $\frac{3}{4}$을 잘라낸 다음 남은 잔디의 길이를 측정한다고 한다. 최초로 측정한 잔디의 길이가 12cm이고 n번째 측정한 잔디의 길이를 $a_n$cm라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$　⑤ 2

$a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n+4)$　　$a_1 = 12$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$

$\alpha = \frac{\alpha}{4}+1$　$\therefore \alpha = \frac{4}{3}$

15. $\lim_{x\to 0}\dfrac{|3x-a|-b}{2x} = \alpha$일 때, 상수 α의 값은?
(단, a, b는 상수이고, $a>0$이다.)

① $-\frac{3}{2}$　② -1　③ 1
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

응 풀이므로.　$|-a|-b=0$

∴ $a>0$ 이므로　$a-b=0$.

따라서 준식은 정리하고

$\lim_{x\to0}\dfrac{|a-3x|-a}{2x} = -\dfrac{3}{2}$

16. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{1}{f(a+h)}-\dfrac{1}{f(a)}\right\}$을 $f(a)$, $f'(a)$를 이용하여 나타내면?

① $-\dfrac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}$　② $\dfrac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}$　③ $\dfrac{f'(a)}{f(a)}$
④ $-\dfrac{f'(a)}{f(a)}$　⑤ $\dfrac{f(a)}{f'(a)}$

$\lim_{h\to0}\dfrac{1}{h}\left\{\dfrac{f(a)-f(a+h)}{f(a)\cdot f(a+h)}\right\}$

$= -f'(a) \times \dfrac{1}{\{f(a)\}^2}$

5일차 과제

17. 구간 $[-3, 0]$에서 함수 $f(x)=-x^4+6x^2-8x+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 24　② 25　③ 26　④ 27　⑤ 28

$f'(x) = -4x^3+12x-8 = -4(x-1)^2(x+2)$

$x=-2$ 일때 극대값을 가진다.

$x=-3$ 일때 최소값을 가진다.

$M=27$　$m=0$

18. 곡선 $y=-x^2+3x$ $(0<x<3)$위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 OPH의 넓이의 최댓값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{2}{3}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

$P(t, -t^2+3t)$

$H(t, 0)$.

$\triangle OPH$ 넓이 $= \frac{1}{2} \cdot (-t^3+3t^2)$.

로 $f(t)$라하면.

$f'(t) = -\frac{3}{2}t(t-2)$ 이고.

$t=2$ 에서 극대 이다.

$S(2)=2$.

19. 함수 $f(x)=x^3-3x+1$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프에서 극대가 되는 점을 A, 극소가 되는 점을 B라 할 때, $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표를 구하여라.

$f'(x) = 3x^2-3$.

$x=1$ 에서 극소.

$x=-1$ 에서 극대.

$A(-1, 3)$, $B(1, -1)$ 이므로.

$1:2$ 내분점은 $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

20. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{x-1}=0,\ \lim_{x\to 5}\frac{f(x)-4}{x-5}=0$$

을 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

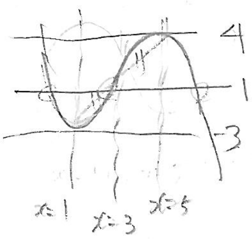
ㄱ. $f(x)$는 $x=3$의 좌우에서 증가하다가 감소한다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=5$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=1$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f'(1) = f'(5) = 0$

$f(1)=-3$, $f(5)=4$ 이므로

$x=1$에서 극소 $x=5$에서 극대 이다.



그림과 같으므로

ㄱ. $x=3$에서 증가.

ㄴ. (참)

ㄷ. (참)